第七章　参数预计

核心词：

矩预计法
极大似然预计法
} 点预计

置信区间
置信度
} 区间预计

问题的提出：

参数估计是统计推断的基本问题之一，实际工作中碰到的总体X，它的分布类型往往是知道的，只是不知道其中的某些参数，

例如：产品的质量指标X服从正态分布，其概率密度为：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty<x<+\infty$$

但参数μ,σ^2的值未知，要求估计μ,σ^2，有时还希望以一定的可靠性来估计μ值是在某个范围内或者不低于某个数。

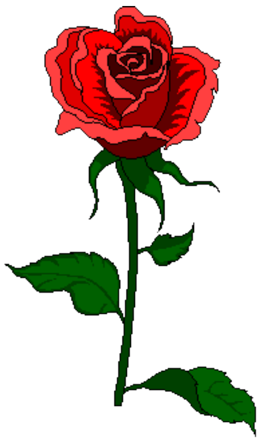
参数估计问题就是要求通过样本估计总体分布所包含的未知参数的值。

参数估计的两种方法：点估计法和区间估计法

§1 参数的点预计

点估计的问题就是根据样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对每一个未知参数$\theta_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，构造出一个统计量$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，作为参数$\theta_i$的估计，称为$\theta_i$的估计量。

点估计有两种方法:矩估计法和极大似然估计法



重要内容:

一. 矩预计法

二.极大似然预计

三.预计量的评比原则

一. 矩预计法

矩思想：运用样本矩作为对应总体矩的预计量

$$\text{Q}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{\text{估计}} E\left(X^k\right)\left(n\to\infty\right)$$

矩估计法 总体$X \sim f(x;\theta_1,\text{L}\ ,\theta_k)$, $\theta_1,\text{L}\ ,\theta_k$未知,

:

(一) 矩估计法:

设总体X的分布函数为$F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$是待估计的未知参数，假定总体$X$的$k$阶原点矩$E(X^k)$存在，

则有：$E(X^v)=\mu_v(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\quad v=1,2,\cdots,k$，对于样本$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，

其v阶样本矩是：$A_v=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^v\quad v=1,2,\cdots,k$

用样本矩作为总体矩的估计，即令：
$$\begin{cases}\mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_1\\ \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_2\\ \qquad\vdots\\ \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_k\end{cases}$$

解此方程即得$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$的一个矩估计量$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k)$

例：设总体X的均值μ和方差σ^2都存在，且$\sigma^2>0$，μ,σ^2均未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自X的一个样本，试求μ,σ^2的矩估计。

解：先求总体矩：

$$\mu_1=E(X),\ \mu_2=E\left(X^2\right)=D(X)+E^2(X)=\mu^2+\sigma^2$$

再求样本矩：

$$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X},\ A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

$$\text{令}\begin{cases}\mu_1=A_1\\ \mu_2=A_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\end{cases}$$

例2：设总体X的密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \theta>0\text{为未知参数，}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自X的样本，求θ的矩估计。

解：$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

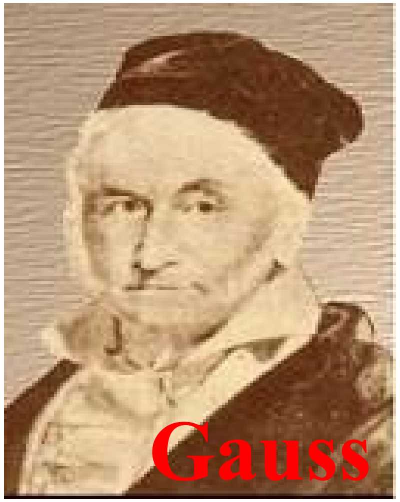
令$$E(X)=\bar{X}\Rightarrow\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$$

二、 极大似然预计法

极大似然预计法是在总体的分布类型已知的条件下所使用的一种参数预计办法.

它首先是由德国数学家

高斯在1821年提出的 .



然而，这个办法常归功于

英国统计学家费歇 .

费歇在1922年重新发现了这一办法,

并首先研究了这种办法的某些性质 .

极大似然原理： 一个随机试验有若干个可能结果A,B,C,…。若在一次试验中，结果A发生，**则一般认为试验条件对A最有利**，即A发生的概率$P(A/\theta)$最大

条件

如，甲$\begin{cases}99 & 红\\ 1 & 黑\end{cases}$，乙$\begin{cases}1 & 红\\ 99 & 黑\end{cases}$，任取1箱从中任取球，已知取到红球问最有可能从何箱取

$$P(红球/甲)=0.99 \quad P(红球/乙)=0.01$$

自然，认为从甲箱取更合理

又如，兔龟赛跑，得第一名的最有可能是谁？

极大似然预计法：

（1）X---离散型， 已知 X的分布

$$P(X=x)=p(x,\theta),\ \theta\text{未知}$$

样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取到观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

事件A

$$P(A)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$$\overset{\text{独立}}{=}P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_n=x_n)$$

$$\overset{\text{Xi与X 同分布}}{=\!=\!=} P(X=x_1)P(X=x_2)\cdots P(X=x_n)$$

$$=p(x_1,\theta)p(x_2,\theta)\cdots p(x_n,\theta)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$$

对给定的样本值$(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$

是参数 θ 的函数，称为似然函数，记做 $L(\theta)$.

即 $$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

结构：n 项连乘，总体分布 $p(x,\theta)$ $\xrightarrow{\text{改}}$ $p(x_i,\theta)$

$i=1,2,\cdots,n$

$P(A)=L(\theta)$,随θ变而变，A已经发生，由极大似然原理，$L(\theta)$ 达到最大，所以 θ 的最合理估计值$\hat{\theta}$ 应满足：$L(\hat{\theta})$为最大值

定义 对给定的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，若$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta} L(\theta)$$

称: $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 θ 的极大似然估计值

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 的极大似然估计量

如何求 $\hat{\theta}$ ？ 即求 $L(\theta)$ 的最大值点问题

方法一: 若 $L(\theta)$ 为可导函数

解方程 $\dfrac{dL(\theta)}{d\theta} = 0,$

得到 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

回忆：

(1) $f(x)>0$, $\ln[f(x)]$ 单调性相同，从而最大值点相同.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ n项连乘，求导麻烦

$\ln[L(\theta)]$ n项相加，求导简单

对数似然函数

从而，

求的$L(\theta)$最大值点就转为求$\ln[L(\theta)]$的最大值点

方法二：

解方程 $\dfrac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta}=0$, 得到$\hat{\theta}$

（2）持续型总体似然函数的求法

设X为持续型总体，其概率密度为：

$$f(x;\theta) \quad 其中\,\theta\,未知$$

对来自总体的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$， 其观测值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，作为与总体X同分布且相互独立的n维随机变量，样本的联合概率密度为:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

$$=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

于是，样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$落入点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

邻域内的概率为$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\Delta x_i$，由极大似然原

理，最合理的 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ 应该是使

$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\Delta x_i$ 达到最大，由于Δx_i是不依赖于θ

的增量，所以我们只需求使

$$\text{似然函数}\quad L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \quad \text{达到最大}$$

求$\hat{\theta}$ 的环节：

(1) 写出$L(\theta)$

(2) 取对数$\ln L(\theta)$

(3) 解方程$\dfrac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta}=0$, 得到$\hat{\theta}$

例1：设总体X的分布律为：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$0<p<1$, p未知，求参数p 的极大似然预计量.

解:总体X的分布律为：

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1.$$

设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是来自总体X的样本。

似然函数为：

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i,p)=\prod_{i=1}^{n}p^{X_i}(1-p)^{1-X_i}$$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}X_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

$$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0$$

解得p的极大似然预计量为：

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

阐明：p的极大似然预计值为：

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

例2：设(X1,X2,…Xn)是来自总体X的一种样本,

$$X \sim f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1 \\ 0, \quad 其它\end{cases}, \quad 其中\theta>0未知,$$

求θ的极大似然预计量.

解： θ的似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta X_i^{\theta-1}(0<X_i<1)$$

$$=\theta^n (X_1 X_2 \cdots X_n)^{\theta-1} \quad 1 \le i \le n$$

取对数

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

求导并令其为0

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

从中解得

$\hat{\theta}=-n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$，$\hat{\theta}$ 即为θ的极大似然估计量。

推广：$X \sim f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$, $\theta_1,\cdots,\theta_k$未知

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

解方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_k}=0 \end{cases}$$

得到$\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$

例3： $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中$\mu,\sigma>0$未知,

给定一组样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，求 μ,σ^2

的极大似然估计量.

解 $$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

解得 $\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

例4：设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，$\theta>0$未知，试由样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$求出θ的极大似然估计和矩估计。

解：(1) 极大似然估计

因X的概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故参数θ的似然函数为：$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由于$\dfrac{d\ln(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}\ne 0$，不能用微分法求$\hat{\theta}_L$

以下从定义出发求$\hat{\theta}_L$：

因为$0\le x_i\le\theta$，故θ的取值范围最小为$x_{(n)}=max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

又$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$对$\theta>x_{(n)}$的$\theta$是减函数，$\theta$越小，$L$越大，故$\hat{\theta}_L=x_{(n)}$时，$L$最大；

所以θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

(2) 矩估计

由$E(X)=\int_0^\theta \dfrac{1}{\theta}x\,dx=\dfrac{\theta}{2}=\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}=2\bar{X}$

例5：设总体X的概率分布率为:$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta/2 & 1-3\theta/2 \end{pmatrix}$,其中$\theta>0$未知,

现得到样本观测值2，3，2，1，3，求θ的矩估计与极大似然估计。

解：(1) 矩估计

$$E(X)=\sum x_k p_k=\theta+2\times\theta/2+3\times(1-3\theta/2)=3-5\theta/2$$

$$\bar{X}=2.2$$

令 $E(X)=\bar{X} \quad \Rightarrow \hat{\theta}=0.32$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta)=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)$$

$$=\tfrac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$\ln L(\theta)=-\ln 16+3\ln\theta+2\ln(2-3\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta}=0 \qquad \Rightarrow \hat{\theta}=0.4$$

三、 衡量预计量好坏的原则

θ 的点估计量$\hat{\theta}$ 一般是不唯一的，如何选择好的 $\hat{\theta}$ ？首先我们要对估计量提出衡量其好坏的标准.

原则：无偏性，有效性，一致性

1、无偏性

定义：若$E[\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)] = \theta$,

则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。

即$\hat{\theta}$取值在真值θ附近来回摆动

例6 总体X, $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$存在, 但未知

给定样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,

试证:(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$, $\overline{X}$都是μ的无偏估计量

(2) S^2是σ^2的无偏估计量。

证明:(1)

$$E(X_i)=E(X)=\mu,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

(2) $$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right]$$

利用公式： $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$

$$E(X_i^2) = D(X_i) + [E(X_i)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E(\bar{X})^2 = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$(Q\ \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}))$$

$$\therefore E(S^2) = \frac{1}{n-1}[n\sigma^2 + n\mu^2 - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)] = \sigma^2$$

例7：检验例4的矩估计量$\hat{\theta} = 2\bar{X}$与极大似然估计量$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$的无偏性。

解：$\because X \sim U[0,\theta]$，$E(X) = \dfrac{\theta}{2}$， 由于$X_1, \cdots, X_n$与$X$同分布

$$\therefore E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$$

因此$\hat{\theta} = 2\bar{X}$是θ的无偏估计

为考察$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$的无偏性，先求$X_{(n)}$的分布，

由第三章第5节知：

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n,\quad 于是\ f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0 \le x \le \theta \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

因此有：$E(\hat{\theta}_L) = E(X_{(n)}) = \displaystyle\int_0^{\theta} \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{n}{n+1}\theta \ne \theta$

所以$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$是有偏的。

2、有效性

设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是θ的两个无偏预计量，若

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$比 $\hat{\theta}_2$有效。

Q $E(X_1) = \mu, \quad E(\overline{X}) = \mu,$

$\therefore X_1$与$\overline{X}$都是μ的无偏估计量

又由于$D\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} < D(X_1) = \sigma^2$

故 $\overline{X}$比X_1有效.

例8：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1, \cdots, X_n$是取自X的样本，已知θ的两个无偏估计为$\theta_1 = 2\bar{X}, \theta_2 = \frac{n+1}{n} X(n)$ [见例7]，判别θ_1与θ_2哪个有效($n \ge 2$时)？

解：$D(\theta_1) = D(2\bar{X}) = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$

由 $f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0 < x < \theta \\ 0 & 其它 \end{cases} \Rightarrow E(X_{(n)}^2) = \int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2}\theta^2$

根据例7结果：$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$

于是$D(\theta_2) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \left\{ E(X_{(n)}^2) - [E(X_{(n)})]^2 \right\} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

因为$D(\theta_1) = \frac{\theta^2}{3n} > \frac{\theta^2}{n(n+2)} = D(\theta_2) \Rightarrow \theta_2$比$\theta_1$更有效

- **相合性(一致性)**

定义：设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，$\hat{\theta}_n$依概率收敛于θ，

即$\forall\varepsilon>0$，有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$成立，

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量

例9：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

证明：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$是$\theta$的相合估计。

证：$E\left(\hat{\theta}_1\right) = E\left(\hat{\theta}_2\right) = \theta$, $D\left(\hat{\theta}_1\right) = \dfrac{\theta^2}{3n}$, $D\left(\hat{\theta}_2\right) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$

由契比雪夫不等式，$\forall \varepsilon > 0$, 当$n \to +\infty$时，

有：$$P\left\{\left|\hat{\theta}_1 - \theta\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D\left(\hat{\theta}_1\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2} \to 0$$

同理：$$P\left\{\left|\hat{\theta}_2 - \theta\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \to 0$$

所以$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是θ的相合估计。

5.(02,7分) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

,

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数. 利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

【解】 $EX=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,\quad \theta=\frac{1}{4}(3-EX).$

θ的矩计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{X})$,根据给定的样本观察值计算$\bar{x}=\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$.

因此θ的矩估计值$\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{x})=\frac{1}{4}$.

对于给定的样本值似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,\quad \ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$,得方程$12\theta^2-14\theta+3=0$,解得

$$\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}\ \left(\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2},\text{不合题意舍去}\right).$$

9.（07，11分） 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\[2ex] \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\[2ex] 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数$\theta(0<\theta<1)$未知．$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值．

（Ⅰ）求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$；

（Ⅱ）判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量，并说明理由．

【解】 我们用样本矩作为总体矩的矩估计量,用样本矩的函数估计总体矩的同一函数,为此要首先求出被估参数 θ 与总体矩的关系.

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x + \int_{\theta}^{1} \frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{4\theta}\bigg|_0^{\theta} + \frac{x^2}{4(1-\theta)}\bigg|_{\theta}^{1} = \frac{2\theta+1}{4} \triangleq \mu,$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = 2\mu - \frac{1}{2}.$$

则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$.