大 招　数轴上动点问题

模型介绍

1．数轴

（1）数轴的概念：规定了原点、正方向、单位长度的直线叫做数轴.

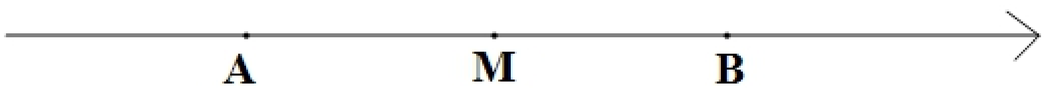
数轴的三要素：原点，单位长度，正方向.

（2）数轴上的点：所有的有理数都可以用数轴上的点表示，但数轴上的点不都表示有理数.（一般取右方向为正方向，数轴上的点对应任意实数，包括无理数.）

（3）用数轴比较大小：一般来说，当数轴方向朝右时，右边的数总比左边的数大.

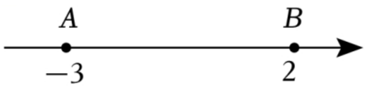
★（4）**数轴上两点间的距离公式：**$AB=X_B-X_A$（即：右端点减左端点）

★（5）**数轴上中点数公式：**$X_M=\frac{X_A+X_B}{2}$（即：中点等于两端点相加除以 2）



例题精讲

【例 1】. 如图，点 A 在数轴上表示的数为－3，点 B 表示的数为 2，点 P 在数轴上表示的是整数，点 P 不与 A、B 重合，且 $PA+PB=5$，则满足条件的 P 点表示的整数有___________.

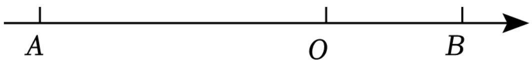


解：∵$PA+PB=5$，

∴点 P 在 A，B 两点之间，A，B 两点之间的整数有－2，－1，0，1，

➢变式训练

【变式 1-1】. 如图，点 O 为原点，A、B 为数轴上两点，$AB=15$，且 $OA=2OB$，点 P 从点 B 开始以每秒 4 个单位的速度向右运动，当点 P 开始运动时，点 A、B 分别以每秒 5 个单位和每秒 2 个单位的速度同时向右运动，设运动时间为 t 秒，若 $3AP+2OP-mBP$ 的值在某段时间内不随着 t 的变化而变化，则 $m=$ 2.5 或 5.5 .



解：∵$AB=15$，$OA=2OB$，

∴$AO=\frac{2}{3}AB=10$，$BO=\frac{1}{3}AB=5$，

∴A 点对应数为－10，B 点对应数为 5，

设经过 t 秒，则 $AP=|5+4t-(-10+5t)|=|15-t|$，$OP=5+4t$，$BP=5+4t-(5+2t)=2t$，

当 $t\leqslant 15$ 时，

$3AP+2OP-mBP$

$=45-3t+10+8t-2mt$

$=(5-2m)t+55$，

∴当 $5-2m=0$，即 $m=2.5$ 时，$3AP+2OP-mBP$ 的值在某段时间内不随着 t 的变化而变化，

当 $t>15$ 时，

$3AP+2OP-mBP$

$=3t-45+10+8t-2mt$

$=(11-2m)t-35$，

∴当 $11-2m=0$，即 $m=5.5$ 时，上式为定值 -35，也不随 t 发生改变，

故 m 为 2.5 或 5.5．

故答案为：2.5 或 5.5．

【变式 1-2】．已知数轴上两点 A、B 对应的数分别是 6，-8，M、N、P 为数轴上三个动点，点 M 从 A 点出发，速度为每秒 2 个单位，点 N 从点 B 出发，速度为 M 点的 3 倍，点 P 从原点出发，速度为每秒 1 个单位．

（1）若点 M 向右运动，同时点 N 向左运动，求多长时间点 M 与点 N 相距 46 个单位？

（2）若点 M、N、P 同时都向右运动，求多长时间点 P 到点 M，N 的距离相等？

（3）当时间 t 满足 $t_1<t\leqslant t_2$ 时，M、N 两点之间，N、P 两点之间，M、P 两点之间分别有 47 个、37 个、10 个整数点，请直接写出 t_1，t_2 的值．

解：（1）设运动时间为 t 秒，

由题意可得：$6+8+2t+6t=46$，

∴$t=4$，

∴运动 4 秒，点 M 与点 N 相距 46 个单位；

（2）设运动时间为 t 秒，由题意可知：M 点运动到 $6+2t$，N 点运动到 $-8+6t$，P 点运动到 t，

由 $t=-8+6t$ 可得 $t=1.6$，

当 $t<1.6$ 时，点 N 在点 P 左侧，若 $MP=NP$，则 $t-(-8+6t)=6+2t-t$，

解得 $t=\frac{1}{3}$（s）；

当 $t>1.6$ 时，点 N 在点 P 右侧，若 $MP=NP$，则 $-8+6t-t=6+2t-t$，

解得 $t=\frac{7}{2}$（s），

∴运动 $\frac{1}{3}s$ 或 $\frac{7}{2}s$ 时，点 P 到点 M，N 的距离相等；

（3）由题意可得：M、N、P 三点之间整数点的多少可看作它们之间距离的大小，

M、N 两点距离最大，M、P 两点距离最小，可得出 M、P 两点向右运动，N 点向左运动

①当 $t_1=4s$ 时，P 在 4，M 在 14，N 在 -32，

再往前一点，MP 之间的距离即包含 10 个整数点，NP 之间有 47 个整数点；

②当 N 继续以 6 个单位每秒的速度向左移动，P 点向右运动，

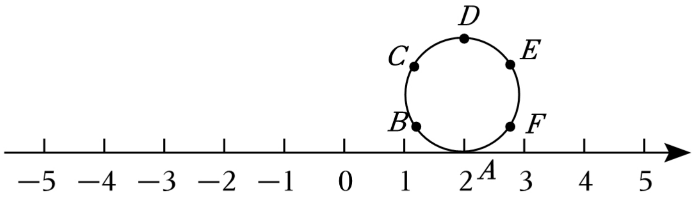
若 N 点移动到 -33 时，此时 N、M 之间仍为 47 个整数点，

若 N 点过了 -33 时，此时 N、M 之间为 48 个整数点

故 $t_2=\frac{1}{6}+4=\frac{25}{6}$（$s$），

∴t_1，t_2 的值分别为 $4s$，$\frac{25}{6}s$.

【例 2】. 如图，周长为 6 个单位长度的圆上的六等分点分别为 A，B，C，D，E，F，点 A 落在 2 的位置，将圆在数轴上沿负方向滚动，那么落在数轴上－2023 的点是 ＿点 D＿.



解：由图形可知，旋转一周，点 B 对应的数是 1，点 C 对应的数是 0，点 D 对应的数是－1，点 E 对应的数是－2，点 F 对应的点为－3，点 A 对应的点为－4，

继续旋转，点 B 对应的点为－5，点 C 对应的点为－6.

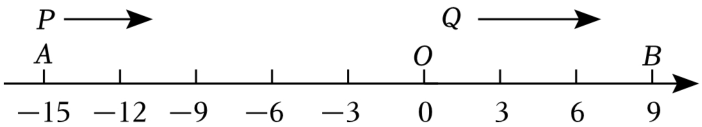
∵$2023\div6=337\cdots1$，

∴数轴上表示－2025 的点与圆周上点 D 重合.

故答案为：点 D.

➢变式训练

【变式 2-1】. 在数轴上，点 A，O，B 分别表示－15，0，9，点 P，Q 分别从点 A，B 同时开始沿数轴正方向运动，点 P 的速度是每秒 4 个单位，点 Q 的速度是每秒 1 个单位，运动时间为 t 秒．若点 P，Q，O 三点在运动过程中，其中一个点恰好是另外两点为端点的线段的一个中点，则运动时间为 ＿$\frac{6}{5}$或$\frac{39}{7}$或$\frac{33}{2}$＿秒.



解：由题知，P 点对应的数为：－15+4t，Q 点对应的数为：9+t，

（1）当 O 为 PQ 中点时，

根据题意得 15－4t＝9+t，

解得 $t=\frac{6}{5}$，

（2）当 P 是 OQ 的中点时，

根据题意得 2（4t－15）＝9+t，

解得 $t=\frac{39}{7}$，

（3）当 Q 是 OP 的中点时，

根据题意得 2（9+t）＝4t－15，

解得 $t=\frac{33}{2}$，

故答案为：$\frac{6}{5}$或$\frac{39}{7}$或$\frac{33}{2}$.

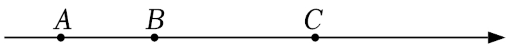
【变式 2-2】. 如图：在数轴上 A 点表示数－3，B 点示数 1，C 点表示数 9.

（1）若将数轴折叠，使得 A 点与 C 点重合，则点 B 与数表示的点重合；

（2）若点 A、点 B 和点 C 分别以每秒 2 个单位、1 个单位长度和 4 个单位长度的速度在数轴上同时向左运动.

①若 t 秒钟过后，A，B，C 三点中恰有一点为另外两点的中点，求 t 值；

②当点 C 在 B 点右侧时，是否存在常数 m，使 $mBC-2AB$ 的值为定值，若存在，求 m 的值，若不存在，请说明理由.



解：（1）$AB=9-(-3)=12$，

$12\div2=6$，

AB 的中点表示的数为：$9-6=3$，

$3-1=2$，$3+2=5$，

则点 B 与 5 表示的点重合；

（2）①由题意可知，

t 秒时，A 点所在的数为：$-3-2t$，

B 点所在的数为：$1-t$，

C 点所在的数为：$9-4t$，

（i）若 B 为 AC 中点，

则 $1-t=\frac{(-3-2t)+(9-4t)}{2}$.

∴$t=1$；

（ii）若 C 为 AB 中点，

则 $9-4t=\frac{(-3-2t)+(1-t)}{2}$，

∴$t=4$；

（iii）若 A 为 BC 中点，

则 $-3-2t=\frac{1-t+9-4t}{2}$，

∴$t=16$，

∴综上，当 $t=1$ 或 4 或 16 时，A，B，C 三点中恰有一点为另外两点的中点；

②假设存在.

∵C 在 B 右侧，B 在 A 右侧，

∴$BC=9-4t-(1-t)=8-3t$，

$AB=1-t-(-3-2t)=4+t$，

$mBC-2AB$

$=m(8-3t)-2(4+t)$

$=8m-3mt-8-2t$

$=8m-8-(3mt+2t)$

$=8m-8-(3m+2)t$，

当 $3m+2=0$ 即 $m=\frac{2}{3}$时，

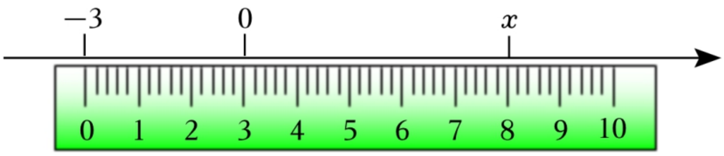
$mBC-2AB=8\times(-\frac{2}{3})-8=-\frac{40}{3}$为定值，

∴存在常数 $m=-\frac{2}{3}$，使 $mBC-2AB$ 的值为定值.

课后创新培养

实战演练

1．如图，将一刻度尺放在数轴上（数轴的单位长度是 1cm），刻度尺上表示“0cm”“8cm”的刻度分别对应数轴上的是﹣3 和 x 所表示的点，那么 x 等于（　　）



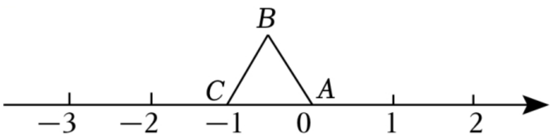
A．5　　　　B．6　　　　C．7　　　　D．8

解：根据数轴可知：

﹣3+8＝5，

故选：A．

2．等边△ABC 在数轴上的位置如图所示，点 A、C 对应的数分别为 0 和﹣1，若△ABC 绕顶点沿顺时针方向在数轴上连续翻转，翻转 1 次后，点 B 所对应的数为 1，则连续翻转 2021 次后，点 B（　　）



A．对应的数是 2019　　　　B．对应的数是 2020

C．对应的数是 2021　　　　D．不对应任何数

解：结合数轴，根据连续翻转可得出从原点开始，向右依次是 A、B、C 循环排列，2021 次后共得出 2022 个顶点，

∵2022÷3＝674，

∴最后一个点为 C，

∵最后一个点 C 是翻转了 2021 次后得到的，

∴点 C 表示的数为 2021，

∴点 B 表示的数为 2020，

故选：B．

3．在解决数学实际问题时，常常用到数形结合思想，比如：$|x+1|$的几何意义是数轴上表示数 x 的点与表示数－1 的点的距离，$|x-2|$的几何意义是数轴上表示数 x 的点与表示数 2 的点的距离．结合以上知识，下列说法中正确的个数是（　　）

①若$|x-2022|=1$，则 $x=2021$ 或 2023；

②若$|x-1|=|x+3|$，则 $x=-1$；

③若 $x>y$，则$|x-2|>|y-2|$；

④关于 x 的方程$|x+1|+|x-2|=3$ 有无数个解．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

解：①若$|x-2022|=1$，可得 $x-2022=\pm1$，则则 $x=2021$ 或 2023；所以①说法正确；

②若$|x-1|=|x+3|$，几何意义是数轴到表示数 1 的点和表示数 3 的点的距离相等的点，即可得出 $x=-1$；所以②说法正确；

③当 $y<x<0$ 时，则$|x-2|<|y-2|$，所以③说法不正确；

④因为$|x+1|+|x-2|=3$ 的几何意义是到数轴上表示－1 的点与表示 2 的点的距离和等于 3 的点，即$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时满足题意，所以有无数个解，故④说法正确．

故选：C．

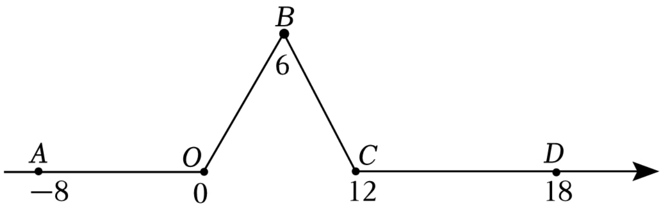
4．数轴上点 A 表示的数是－3，把点 A 向右移动 5 个单位，再向左移动 7 个单位到 A'，则 A' 表示的数是__－5__．

解：依题意得：$-3+5-7=-5$，即则 A' 表示的数是－5．

故答案为：－5．

5．数轴上点 A 表示－8，点 B 表示 6，点 C 表示 12，点 D 表示 18．如图，将数轴在原点 O 和点 B，C 处各折一下，得到一条“折线数轴”．在“折线数轴”上，动点 M 从点 A 出发，以 4 个单位/秒的速度沿着折线数轴的正方向运动，从点 O 运动到点 C 期间速度变为原来的一半，过点 C 后继续以原来的速度向终点 D 运动；点 M 从点 A 出发的同时，

点 N 从点 D 出发，一直以 3 个单位/秒的速度沿着“折线数轴”负方向向终点 A 运动．其中一点到达终点时，两点都停止运动．设运动的时间为 t 秒，t__=4.4__时，M、N 两点相遇（结果化为小数）．



解：当点 M、N 都运动到折线段 $O-B-C$ 上，即 $t\geqslant 2$ 时，M 表示的数是 $\frac{4}{2}\times(t-2)=2t-4$，$N$ 表示的数是 $12-3(t-2)=18-3t$，

∵M、N 两点相遇时，M、N 表示的数相同，

∴$2t-4=18-3t$，

解得：$t=\frac{22}{5}=4.4$，

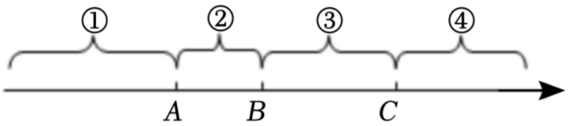
故答案为：4.4.

6．如图，在一条不完整的数轴上，从左到右的点 A、B、C 把数轴分成①②③④四部分，点 A、B、C 对应的数分别是 a、b、c，且 $ab<0$.

（1）原点在第 __②__ 部分（填序号）；

（2）化简式子：$|a-b|-|c-a|-|a|$；

（3）若 $|c-5|+(a+1)^2=0$，且 $BC=2AB$，求点 B 表示的数.



解：（1）∵点 A、B、C 对应的数分别是 a、b、c，且 $ab<0$，

∴$a<0$，$b>0$，

∴原点在点 A 和点 B 之间，

又∵从左到右的点 A、B、C 把数轴分成①②③④四部分，

∴原点在第②部分；

故答案为：②

（2）∵$a<0$，$b>0$，

∴$a-b<0$，$c>0$，

∴$c-a>0$，

∴$|a-b|-|c-a|-|a|=b-a-(c-a)-(-a)=b-a-c+a+a=a+b-c$；

（3）∵$|c-5|+(a+1)^2=0$，

又∵$|c-5|\geqslant 0$，$(a+1)^2\geqslant 0$，

∴$c-5=0$，$a+1=0$，

∴$c=5$，$a=-1$，

∵B 对应的数是 b，$5>b>-1$，

∴$BC=5-b$，$AB=b-(-1)=b+1$，

又∵$BC=2AB$，

∴$5-b=2\times(b+1)$，即 $3b=3$，

解得：$b=1$，

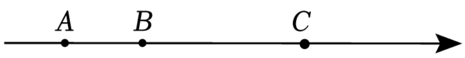
∴点 B 表示的数为 1．

7．已知 b 是最小的正整数，且 $(c-5)^2$ 与 $|a+b|$ 互为相反数．

（1）填空：$a=$___-1___，$b=$___1___，$c=$___5___；

（2）若 P 为一动点，其对应的数为 x，点 P 在 0 和 2 表示的点之间运动，即 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，化简：$|x+1|-|x-1|+2|x+5|$（请写出化简过程）；

（3）如图，a，b，c 在数轴上所对应的点分别为 A，B，C，在（1）的条件下，若点 A 以 1 个单位长度/s 的速度向左运动，同时，点 B 和点 C 分别以 2 个单位长度/s 和 5 个单位长度/s 的速度向右运动．ts 后，若点 B 与点 C 之间的距离表示为 BC，点 A 与点 B 之间的距离表示为 AB．请问：$BC-AB$ 的值是否随着时间 t 的变化而改变？若变化，请说明理由；若不变，请求其值．



解：（1）依题意得，$b=1$，$c-5=0$，$a+b=0$，

解得 $a=-1$，$c=5$．

故答案为：-1，1，5；

（2）点 P 在 0 和 2 表示的点之间运动，即 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$x+1>0$，$x-1\leqslant 0$，$x+5>0$，

原式$=x+1+x-1+2x+10$

$=4x+10$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$x+1>0$，$x-1>0$，$x+5>0$，

原式$=x+1-x+1+2x+10$

$=2x+12$．

综上可知，$|x+1|-|x-1|+2|x+5|=4x+10$ 或 $2x+12$；

（3）不变，

理由：t 秒后 A 点表示的数是 $-1-t$，B 点表示的数是 $1+2t$，C 的表示的数是 $5+5t$，

$\because AB=1+2t-(-1-t)$

$=3t+2$，

$BC=5+5t-(1+2t)$

$=3t+4$，

$\therefore BC-AB=2$，

$\therefore BC-AB$ 的值不变，是 2．

8．数轴上有 A、B、C 三点，如图 1，点 A、B 表示的数分别为 m、n（$m<n$），点 C 在点 B 的右侧，$AC-AB=2$．

（1）若 $m=-8$，$n=2$，点 D 是 AC 的中点．

①则点 D 表示的数为 __-2__．

②如图 2，线段 $EF=a$（E 在 F 的左侧，$a>0$），线段 EF 从 A 点出发，以 1 个单位每秒的速度向 B 点运动（点 F 不与 B 点重合），点 M 是 EC 的中点，N 是 BF 的中点，在 EF 运动过程中，MN 的长度始终为 1，求 a 的值；

（2）若 $n-m>2$，点 D 是 AC 的中点，若 $AD+3BD=4$，试求线段 AB 的长．

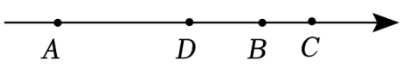


图1

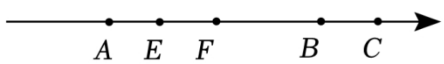
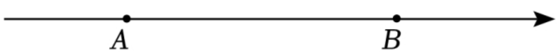


图2



备用图

解：（1）①$\because m=-8$，$n=2$，

$\therefore AB=2-(-8)=10$．

$\because AC-AB=2$，

$\therefore AC=12$，

$\therefore$ 点 C 对应的数字为 4，

$\because$ 点 D 是 AC 的中点，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AC=6$，

设点 D 表示的数为 x，

∴$4-x=6$，

∴$x=-2$．

∴点D表示的数为-2．

故答案为：-2；

②设EF运动的时间为t秒，

则点E对应的数字为$t-8$，点F对应的数字为$t-8+a$，

∵点M是EC的中点，N是BF的中点，

∴点M对应的数字为$\frac{t-8+4}{2}=\frac{t-4}{2}$，点$N$对应的数字为$\frac{t-8+a+2}{2}=\frac{t-6+a}{2}$，

∵$MN=1$，

∴$|\frac{t-4}{2}-\frac{t-6+a}{2}|=1$．

解得：$a=0$或$a=4$，

∵$a>0$，

∴$a=4$；

（2）设点C对应的数字为c，点D对应的是为d，

∵点A、B表示的数分别为m、n（$m<n$），点C在点B的右侧，$AC-AB=2$，

∴$c=n+2$，$AB=n-m$．

∵点D是AC的中点，

∴$d=\frac{m+n+2}{2}$，

∴$AD=\frac{m+n+2}{2}-m=\frac{n+2-m}{2}$，$BD=n-\frac{m+n+2}{2}=\frac{n-m-2}{2}$，

∵$AD+3BD=4$，

∴$\frac{n-m+2}{2}+3\times\frac{n-m-2}{2}=4$，

解得：$n-m=3$．

∴$AB=3$．

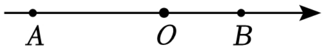
9．如图，数轴上点A，B分别表示数a，b，其中$a<0$，$b>0$．

（1）若$a=-7$，$b=3$，求线段AB的长度及线段AB的中点C表示的数c；

（2）该数轴上有另一点D表示数d．

①若$d=2$，点D在点B的左侧，且$AB=5BD$．求整式$2a+8b+2023$的值；

②若 $d=-2$，且 $AB=5BD$，能否求整式 $2a+8b+2023$ 的值？若能，求出该值；若不能，说明理由．



解：（1）∵$a=-7$，$b=3$，

∴线段 AB 的中点 C 表示的数 $c=3-\frac{1}{2}\times(|-7|+3)=3-\frac{1}{2}\times10=3-5=-2$；

（2）①∵$d=2$，点 D 在点 B 的左侧，且 $AB=5BD$，

∴$AB=b-a$，$BD=b-2$，

∴$b-a=5(b-2)$，

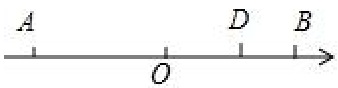
∴$a+4b=10$，

∴$2a+8b+2023$

$=2(a+4b)+2023$

$=2\times10+2023$

$=2043$；



②能求出代数式的值，

∵$d=-2$，点 D 在点 B 的左侧，且 $AB=5BD$，

∴$AB=b-a$，$BD=b+2$，

∴$b-a=5(b+2)$，

∴$a+4b=-10$，

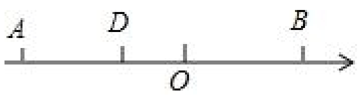
∴$2a+8b+2023$

$=2(a+4b)+2023$

$=2\times(-10)+2023$

$=-20+2023$

$=2003$；



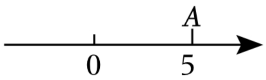
10．先阅读，后探究相关的问题

【阅读】$|5-2|$表示 5 与 2 差的绝对值，也可理解为 5 与 2 两数在数轴上所对应的两点之间的距离；$|5+2|$可以看做$|5-(-2)|$，表示 5 与 -2 的差的绝对值，也可理解为 5 与 -2 两数在数轴上所对应的两点之间的距离．

（1）如图，先在数轴上画出表示点 4.5 的相反数的点 B，再把点 A 向左移动 1.5 个单位，得到点 C，则点 B 和点 C 表示的数分别为 ＿﹣4.5＿和 ＿3.5＿，B，C 两点间的距离是 ＿8＿；

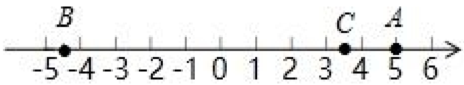
（2）若点 A 表示的整数为 x，则当 x 为 ＿﹣2＿时，$|x+6|$与$|x-2|$的值相等；

（3）要使代数式$|x+1|+|x-2|$取最小值时，相应的 x 的取值范围是 ＿$-1\leqslant x\leqslant 2$＿．



解：（1）4.5 的相反数是﹣4.5，即点 B 表示的数为﹣4.5；点 C 表示的数为 $5-1.5=3.5$；B，C 两点间的距离是 $3.5-(-4.5)=3.5+4.5=8$；

故答案为：﹣4.5，3.5，8；



（2）∵$|x+6|$与$|x-2|$的值相等，

∴$x+6=x-2$ 此种情况等式不成立，

或 $x+6=-(x-2)$，$x=-2$，

∴$x=-2$ 时，$|x+6|$与$|x-2|$的值相等；

故答案为：﹣2；

（3）∵$|x+1|+|x-2|$值最小，

∴在数轴上可以看作表示 x 的到﹣1 的距离与到 2 的距离和最小，

∴数 x 只能在﹣1 与 2 之间，包括﹣1 与 2 两个端点，

∴$-1\leqslant x\leqslant 2$．

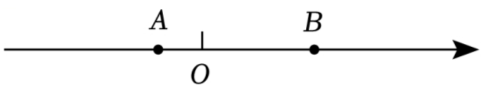
故答案为：$-1\leqslant x\leqslant 2$．

11．如图，已知点 O 为数轴的原点，点 A、B、C、D 在数轴上，其中 A、B 两点对应的数分别为﹣1、3．

（1）填空：线段 AB 的长度 $AB=$＿4＿；

（2）若点 A 是 BC 的中点，点 D 在点 A 的右侧，且 $OD=AC$，点 P 在线段 CD 上运动．问：该数轴上是否存在一条线段，当 P 点在这条线段上运动时，$PA+PB$ 的值随着点 P 的运动而没有发生变化？

（3）若点 P 以 1 个单位/秒的速度从点 O 向右运动，同时点 E 从点 A 以 5 个单位/秒的速度向左运动、点 F 从点 B 以 20 个单位/秒的速度向右运动，M、N 分点别是 PE、OF 的中点．点 P、E、F 的运动过程中，$\frac{EF-OP}{MN}$的值是否发生变化？请说明理由．



解：（1）∵A、B 两点对应的数分别为﹣1、3，

∴$OA=1$，$OB=3$，

∴$AB=OA+OB=4$.

故答案为：4；

（2）数轴上存在一条线段，当 P 点在这条线段上运动时，$PA+PB$ 的值随着点 P 的运动而没有发生变化.理由：

A、B 两点对应的数分别为 - 1、3，

∴$OA=1$，$OB=3$，

∵点 A 是 BC 的中点，

∴$AC=AB=4$.

∴$OC=AC+OA=5$，

∴C 点对应的数为 - 5.

又∵$OD=AC$，点 D 在点 A 的右侧，

∴D 点对应的数为 4.

设 P 点对应的数为 x，

①P 点在射线 CA 上时，$PA=-1-x$，$PB=3-x$，

∴$PA+PB=-1-x+(3-x)=2-2x$，

∴$PA+PB$ 的值随着点 P 的运动而发生变化；

②P 点在线段 AB 上时，$PA=x-(-1)=x+1$，$PB=3-x$，

∴$PA+PB=x+1+(3-x)=4$，

∴$PA+PB$ 的值随着点 P 的运动没有发生变化；

③P 点在射线 BD 上时，$PA=x-(-1)=x+1$，$PB=x-3$，

∴$PA+PB=x+1+(x-3)=2x-2$，

∴$PA+PB$ 的值随着点 P 的运动而发生变化.

综上，P 点在线段 AB 上时，$PA+PB$ 的值没有发生变化，

∴数轴上存在一条线段，当 P 点在这条线段上运动时，$PA+PB$ 的值随着点 P 的运动而没有发生变化；

（3）在运动过程中，$\frac{EF-OP}{MN}$的值不发生变化．理由：

设运动时间为 t 分钟，则 $OP=t$，$OE=5t+1$，$OF=20t+3$，

∴$EF=OE+OF=25t+4$，

∵M、N 分别是 PE、OF 的中点，

∴$EM=PM=\frac{1}{2}PE=\frac{1}{2}$（$OP+OE$）$=3t+\frac{1}{2}$，$ON=\frac{1}{2}OF=10t+\frac{3}{2}$，

∴$OM=OE-EM=5t+1-$（$3t+\frac{1}{2}$）$=2t+\frac{1}{2}$，

∴$MN=OM+ON=12t+2$，

∴$\frac{EF-OP}{MN}=\frac{25t+4-t}{12t+2}=2$.

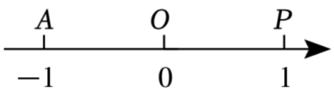
∴在运动过程中，$\frac{EF-OP}{MN}$的值不发生变化．

12．如图，在数轴上，点 O 表示原点，点 A 表示的数为﹣1，对于数轴上任意一点 P（不与点 A 点 O 重合），线段 PO 与线段 PA 的长度之比记作 $k_{(p)}$，即 $k_{(p)}=\frac{PO}{PA}$，我们称 $k_{(p)}$ 为点 P 的特征值，例如：点 P 表示的数为 1，因为 $PO=1$，$PA=2$，所以 $k_{(p)}=\frac{PO}{PA}=\frac{1}{2}$．

（1）当点 P 为 AO 的中点时，则 $k_{(p)}=$__1__；

（2）若 $k_{(p)}=2$，求点 P 表示的数；

（3）若点 P 表示的数为 p，且满足 $p=2^n-1$，（其中 n 为正整数，且 $1\leqslant n\leqslant 7$），求所有满足条件的 $k_{(p)}$ 的和．



解：（1）由题意可知，

当点 P 为 AO 的中点时点 P 表示的数为 $-\frac{1}{2}$，$PO=PA=\frac{1}{2}$，

∴$k_{(p)}=\frac{PO}{PA}=1$，

故答案为：1；

（2）设点 P 表示的数为 x，

则 $PO=|x|$，$PA=|x-(-1)|=|x+1|$，

∵$k_{(p)}=2$，

∴$\frac{PO}{PA}=2$，

即 $PO=2PA$，

∴$|x|=2|x+1|$，

∴$x=2(x+1)$ 或 $x=-2(x+1)$，

解得：$x=-2$ 或 $x=-\frac{2}{3}$；

故：点 P 表示的数－2 或 $-\frac{2}{3}$；

（3）点 P 表示的数为 p，且满足 $p=2^n-1$，（其中 n 为正整数，且 $1\leqslant n\leqslant 7$），$p=2^n-1>0$，

此时：$PO=p$，$PA=p-(-1)=p+1$ $k_{(p)}=\frac{PO}{PA}=\frac{p}{p+1}$，

当 $p=2^n-1$ 时 $k_{(p)}=\frac{PO}{PA}=\frac{2^n-1}{2^n-1+1}=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$∵$1\leqslant n\leqslant 7$，且 n 为正整数，

则所有满足条件的 $k_{(p)}$ 的值分别为：$1-\frac{1}{2}$，$1-\frac{1}{2^2}$，$1-\frac{1}{2^3}$，$1-\frac{1}{2^4}$，$1-\frac{1}{2^5}$，$1-\frac{1}{2^6}$，$1-\frac{1}{2^7}$，

故所有满足条件的 $k_{(p)}$ 的和为：$1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{2^3}+1-\frac{1}{2^4}+1-\frac{1}{2^5}+1-\frac{1}{2^6}+1-\frac{1}{2^7}=$

$7-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7})$，

令 $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}$①，

则 $2s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$②，

②－①得：$s=1-\frac{1}{2^7}$，

∴ $7-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7})$

$=7-(1-\frac{1}{2^7})$

$=6\frac{1}{128}$.

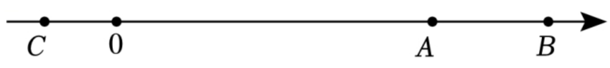
13．把一根小木排放在数轴上，木棒左端点与点 A 重合，右端点与点 B 重合，数轴的单位长度为 1cm，如图所示．

（1）若将木棒沿数轴向右移动，当木棒的左端点移动到点 B 处时、它的右端点在数轴上对应的数为 20；若将木棒沿数轴向左移动时，当它的右端点移动到点 A 处时，木棒左端点在数轴上对应的数为 5，由此可得木棒的长为 <u>5cm</u>；我们把这个模型记为“木捧摸型”；

（2）在（1）的条件下，已知点 C 表示的数为－2．若木棒在移动过程中，当木棒的左端点与点 C 相距 3cm 时，求木棒的右端点与点 A 的距离；

（3）请根据（1）的“木棒模型”解决下列问题．

某一天，小字问爷爷的年龄，爷爷说：“我若是你现在那么大，你还要 41 年才出生；你若是我现在这么大，我就有 124 岁了，世界级老寿星了，哈哈！”请你画出“木棒模型”示意图，求出爷爷现在的年龄．



解：（1）由图观察可知，三根木棒长是 20﹣5＝15（cm），

则此木棒长为：15÷3＝5（cm）；

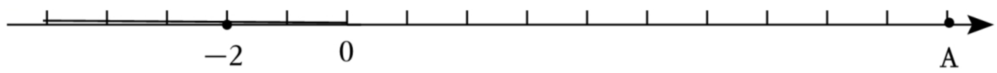
故答案为：5cm；

（2）由题可知，点 A 所表示的数是 5+5＝10，

∵木棒的左端点与点 C 相距 3cm，点 C 表示的数为﹣2，

当左端点在点 C 右侧 3cm 时，此时木棒左端点表示的数为：﹣2+3＝1，右端点表示的数为；1+5＝6，木棒的右端点与 A 的距离为：10﹣6＝4，

当左端点在点 C 左侧 3cm 时，此时木棒左端点表示的数为：﹣2﹣3＝﹣5，木棒的右端点表示的数为：﹣5+5＝0，木棒的右端点与点 A 的距离＝10﹣0＝10，



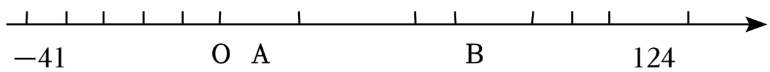
∴木棒的右端点与点 A 的距离为 4 或 10；（3）由图可知，把小红与爷爷的年龄差看作木棒 AB，类似爷爷是小红现在年龄时看作当 B 点移动到 A 点时，此时 A 点所对应的数位﹣41，

因为当 A 点移动到 B 点时，此时 B 点所对应的数为 124，

所以爷爷比小红大[124﹣（﹣41）]÷3＝55（岁），

所以爷爷的年龄为 124﹣55＝69（岁），

答：爷爷现在的年龄是 69 岁．



14．对于数轴上的 A，B，C 三点，给出如下定义：若其中一个点与其它两个点的距离恰好满足 2 倍的数量关系，则称该点是其它两个点的“联盟点”．例如：数轴上点 A，B，C 所表示的数分别为 1，3，4，此时点 B 是点 A，C 的“联盟点”．

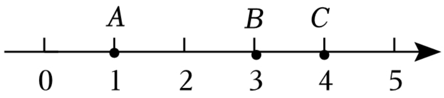
（1）若点 A 表示数﹣1，点 B 表示的数 2，下列各数：$-\frac{2}{3}$，0，1，4，5 所对应的点分别为 C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，其中是点 A，B 的“联盟点”的是 <u>C_2，C_3，C_5</u>；

（2）点 A 表示的数是﹣1，点 B 表示的数是 3，P 是数轴上的一个动点：

①若点 P 在线段 AB 上，且点 P 是点 A，B 的“联盟点”，求此时点 P 表示的数；

②若点 P 在点 A 的左侧，点 P、A、B 中有一个点恰好是其它两个点的“联盟点”，求出此时点 P 表示的

数.



解：（1）∵$AC_1=-\frac{2}{3}-(-1)=\frac{1}{3}$，$BC_1=2-(-\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$，

∴$2AC_1\neq BC_1$，

∴C_1 不是 A，B 的“联盟点”.

∵$AC_2=0-(-1)=1$，$BC_2=2-0=2$，

∴$2AC_2=BC_2$，

∴C_2 是 A，B 的“联盟点”.

∵$AC_3=1-(-1)=2$，$BC_3=2-1=1$，

∴$AC_3=2BC_3$，

∴C_3 是 A，B 的“联盟点”.

∵$AC_4=4-(-1)=5$，$BC_4=4-2=2$，

∴$AC_4\neq BC_4$，

∴C_4 不是 A，B 的“联盟点”.

∵$AC_5=5-(-1)=6$，$BC_5=5-2=3$，

∴$AC_5=2BC_5$，

∴C_5 是 A，B 的“联盟点”.

综合上述，是点 A，B 的“联盟点”的是 C_2，C_3，C_5.

（2）解；设点 P 表示的数为 x，

①∵P 在线段 AB 上，

∴$AP=x+1$，$BP=3-x$，

当 $AP=2BP$ 时，有 $x+1=2(3-x)$，解得 $x=\frac{5}{3}$，

当 $BP=2AP$ 时，有 $3-x=2(x+1)$，解得 $x=\frac{1}{3}$，

综上所述，点 P 表示的数为$\frac{5}{3}$，$\frac{1}{3}$.

②由题意得，$AB=4$，

∵P 在 A 的左侧，

∴$AP=-1-x$，$BP=3-x$，