

江苏省无锡市太湖高级中学 2023-2024 学年高考考前提分数学仿真卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = 1 - i$ ， $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\frac{1+z}{\bar{z}} = (\quad)$

- A. $\frac{3+i}{2}$ B. $\frac{1+i}{2}$ C. $\frac{1-3i}{2}$ D. $\frac{1+3i}{2}$

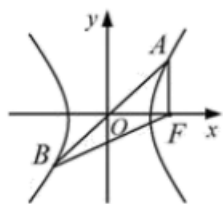
2. 在 $\begin{cases} 2x - y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ 条件下，目标函数 $z = ax + by (a > 0, b > 0)$ 的最大值为 40，则 $\frac{5}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 $(\quad)$

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 2

3. 已知集合 $M = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ，将集合 $M \cup N$ 的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$ ，则 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = (\quad)$

- A. 1194 B. 1695 C. 311 D. 1095

4. 如图所示，已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，双曲线 C 的右支上一点 A ，它关于原点 O 的对称点为 B ，满足 $\angle AFB = 120^\circ$ ，且 $|BF| = 2|AF|$ ，则双曲线 C 的离心率是 $(\quad)$ 。



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{7}$

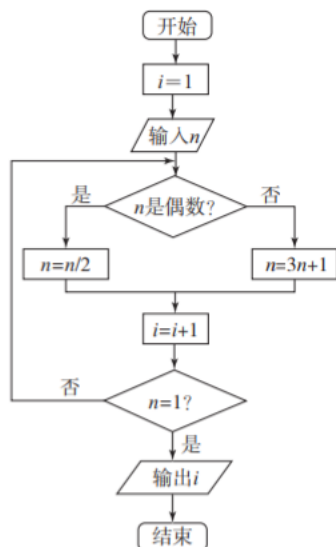
5. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | \log_2 x < 1\}$ ，则

- A. $A \cap B = \{x | 0 < x < 2\}$ B. $A \cap B = \{x | x < 2\}$
C. $A \cup B = \{x | x < 2\}$ D. $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\}$

6. 设全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | x < 2\}$ ， $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B = (\quad)$

- A. $(0,3)$ B. $[2,3)$ C. $(0,2)$ D. $(0,+\infty)$

7. “角谷猜想”的内容是：对于任意一个大于1的整数 n ，如果 n 为偶数就除以2，如果 n 是奇数，就将其乘3再加1，执行如图所示的程序框图，若输入 $n=10$ ，则输出 i 的（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

8. 已知复数 z 满足： $zi=3+4i$ (i 为虚数单位)，则 $\bar{z}=(\quad)$

- A. $4+3i$ B. $4-3i$ C. $-4+3i$ D. $-4-3i$

9. 过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 F ，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴的上方)， l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN \perp l$ ，则 M 到直线 NF 的距离为（ ）

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1=1$ ，公差 $d \in [1, 2]$ ，且 $a_4+\lambda a_{10}+a_{16}=15$ ，则实数 λ 的最大值为（ ）

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{53}{19}$ C. $-\frac{23}{19}$ D. $-\frac{1}{2}$

11. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(1)=1$ ，且 $f'(x) < 1$ ，则不等式 $f(\lg^2 x) < \lg^2 x$ 的解集为（ ）

- A. $\left(0, \frac{1}{10}\right)$ B. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ C. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ D. $(10, +\infty)$

12. 已知复数 z 满足 $i \cdot z = 3+2i$ (i 是虚数单位)，则 $\bar{z}=(\quad)$

- A. $2+3i$ B. $2-3i$ C. $-2+3i$ D. $-2-3i$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e \ln x}{x}, & x > 0 \\ -2019x, & x \leq 0 \end{cases}$ (其中 e 为自然对数的底数)， $g(x) = f^2(x) - (2m-1)f(x) + 2$ ，若函数 $g(x)$ 恰有4

个不同的零点，则实数 m 的取值范围为_____.

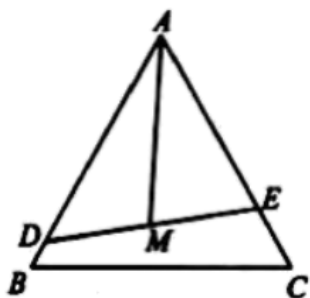
14. 以 $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$ 为圆心的两圆均过 $(1, 0)$, 与 y 轴正半轴分别交于 $(0, y_1)$, $(0, y_2)$, 且满足 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$, 则点 (a_1, a_2) 的轨迹方程为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ 2a_n, & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 则满足 $2019 \leq S_m \leq 3000$ 的正整数 m 的所有取值为_____.

16. 函数 $f(x) = ae^x$ 与 $g(x) = -x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴的对称点, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某公园有一块边长为 3 百米的正三角形 ABC 空地, 拟将它分割成面积相等的三个区域, 用来种植三种花卉. 方案是: 先建造一条直道 DE 将 $\triangle ABC$ 分成面积之比为 2:1 的两部分 (点 D, E 分别在边 AB, AC 上); 再取 DE 的中点 M , 建造直道 AM (如图). 设 $AD = x$, $DE = y_1$, $AM = y_2$ (单位: 百米).



(1) 分别求 y_1, y_2 关于 x 的函数关系式;

(2) 试确定点 D 的位置, 使两条直道的长度之和最小, 并求出最小值.

18. (12 分) 函数 $f(x) = ax - \ln(x+1)$, $g(x) = \sin x$, 且 $f(x) \leq 0$ 恒成立.

(1) 求实数 a 的集合 M ;

(2) 当 $a \in M$ 时, 判断 $f(x)$ 图象与 $g(x)$ 图象的交点个数, 并证明.

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, e^{\frac{x}{2}-1} \approx 1.77$)

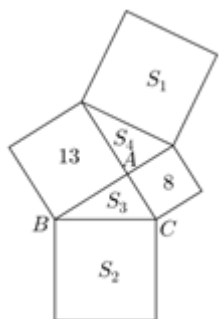
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos^2 x$.

(I) 若 α 是第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

20. (12 分)

某市计划在一片空地上建一个集购物、餐饮、娱乐为一体的大型综合园区，如图，已知两个购物广场的占地都呈正方形，它们的面积分别为 13 公顷和 8 公顷，美食城和欢乐大世界的占地也都呈正方形，分别记它们的面积为 S_1 公顷和 S_2 公顷；由购物广场、美食城和欢乐大世界围成的两块公共绿地都呈三角形，分别记它们的面积为 S_3 公顷和 S_4 公顷。



(1) 设 $\angle BAC = \theta$ ，用关于 θ 的函数 $S(\theta)$ 表示 $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ，并求 $S(\theta)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的最大值的近似值（精确到 0.001 公顷）；

(2) 如果 $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 52$ ，并且 $S_1 < S_2$ ，试分别求出 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 的值。

21. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ t & 1 \end{bmatrix}$ 的一个特征值为 4，求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 。

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 ， F_2 ，焦距为 2，且经过点 $T\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ ，

斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l_1 经过点 $M(0, 2)$ ，与椭圆 C 交于 G ， H 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 在 x 轴上是否存在点 $P(m, 0)$ ，使得以 PG ， PH 为邻边的平行四边形是菱形？如果存在，求出 m 的取值范围，如果不存在，请说明理由。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

求出 $\bar{z}$ ，直接由复数的代数形式的乘除运算化简复数。

【详解】

$$\frac{1+z}{\bar{z}} = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的代数形式的四则运算，共轭复数，属于基础题.

2、B

【解析】

画出可行域和目标函数，根据平移得到最值点，再利用均值不等式得到答案.

【详解】

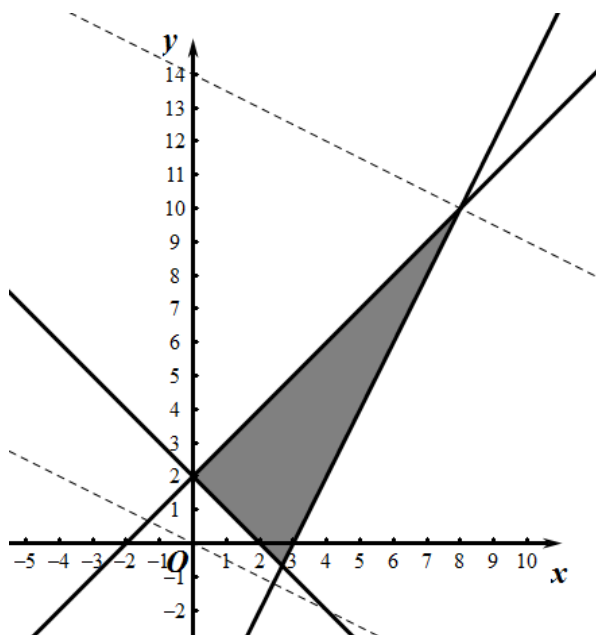
如图所示，画出可行域和目标函数，根据图像知：

当 $x=8, y=10$ 时， $z=8a+10b$ 有最大值为 40，即 $z=8a+10b=40$ ，故 $4a+5b=20$.

$$\frac{5}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{20} \left(\frac{5}{a} + \frac{1}{b} \right) (4a+5b) = \frac{1}{20} \left(25 + \frac{25b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \geq \frac{1}{20} (25 + 2\sqrt{100}) = \frac{9}{4}.$$

当 $\frac{25b}{a} = \frac{4a}{b}$ ，即 $a = \frac{10}{3}, b = \frac{4}{3}$ 时等号成立.

故选：B.



【点睛】

本题考查了线性规划中根据最值求参数，均值不等式，意在考查学生的综合应用能力.

3、D

【解析】

确定 $\{c_n\}$ 中前 35 项里两个数列中的项数，数列 $\{2n\}$ 中第 35 项为 70，这时可通过比较确定 $\{3^n\}$ 中有多少项可以插入这 35 项里面即可得，然后可求和.

【详解】

$n=35$ 时, $2 \times 35 = 70, 3^n < 70, n \leq 3$, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项和中, $\{3^n\}$ 有三项 3, 9, 27, $\{2n\}$ 有 32 项, 所以

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = 3 + 9 + 27 + 32 \times 2 + \frac{32 \times 31}{2} \times 2 = 1095.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查数列分组求和, 掌握等差数列和等比数列前 n 项和公式是解题基础. 解题关键是确定数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项中有多少项是 $\{2n\}$ 中的, 又有多少项是 $\{3^n\}$ 中的.

4、C

【解析】

易得 $|AF| = 2a$, $|BF| = 4a$, 又 $\overrightarrow{FO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA})$, 平方计算即可得到答案.

【详解】

设双曲线 C 的左焦点为 E , 易得 $AEBF$ 为平行四边形,

所以 $|BF| - |AF| = |BF| - |BE| = 2a$, 又 $|BF| = 2|AF|$,

故 $|AF| = 2a$, $|BF| = 4a$, $\overrightarrow{FO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA})$,

所以 $c^2 = \frac{1}{4}(4a^2 + 16a^2 - 2a \times 4a)$, 即 $c^2 = 3a^2$,

故离心率为 $e = \sqrt{3}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查求双曲线离心率的问题, 关键是建立 a, b, c 的方程或不等关系, 是一道中档题.

5、D

【解析】

因为 $A = \{x | x^2 < 1\} = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$,

$A \cup B = \{x | -1 < x < 2\}$, 故选 D.

6、B

【解析】

可解出集合 B , 然后进行补集、交集的运算即可.

【详解】

$Q B = \{x | x^2 - 3x < 0\} = (0, 3)$, $A = \{x | x < 2\}$, 则 $\complement_U A = [2, +\infty)$, 因此, $(\complement_U A) \cap B = [2, 3)$.

故选: B.

【点睛】

本题考查补集和交集的运算, 涉及一元二次不等式的求解, 考查运算求解能力, 属于基础题.

7、B

【解析】

模拟程序运行, 观察变量值可得结论.

【详解】

循环前 $i=1, n=10$, 循环时: $n=5, i=2$, 不满足条件 $n=1$; $n=16, i=3$, 不满足条件 $n=1$; $n=8, i=4$, 不满足条件 $n=1$; $n=4, i=5$, 不满足条件 $n=1$; $n=2, i=6$, 不满足条件 $n=1$; $n=1, i=7$, 满足条件 $n=1$, 退出循环, 输出 $i=7$.

故选: B.

【点睛】

本题考查程序框图, 考查循环结构, 解题时可模拟程序运行, 观察变量值, 从而得出结论.

8、A

【解析】

利用复数的乘法、除法运算求出 z , 再根据共轭复数的概念即可求解.

【详解】

由 $zi = 3 + 4i$, 则 $z = \frac{3+4i}{i} = \frac{3i-4}{-1} = 4-3i$,

所以 $\bar{z} = 4+3i$.

故选: A

【点睛】

本题考查了复数的四则运算、共轭复数的概念, 属于基础题.

9、C

【解析】

联立方程解得 $M(3, 2\sqrt{3})$, 根据 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 4$, 得到 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形, 计算距离得到答案.

【详解】

依题意得 $F(1, 0)$, 则直线 FM 的方程是 $y = \sqrt{3}(x-1)$. 由 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$.

由 M 在 x 轴的上方得 $M(3, 2\sqrt{3})$, 由 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 3 + 1 = 4$

又 $\angle NMF$ 等于直线 FM 的倾斜角, 即 $\angle NMF = 60^\circ$, 因此 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形

点 M 到直线 NF 的距离为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

故选: C.

【点睛】

本题考查了直线和抛物线的位置关系, 意在考查学生的计算能力和转化能力.

10、D

【解析】

利用等差数列通项公式推导出 $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d}$, 由 $d \in [1, 2]$, 能求出实数 λ 取最大值.

【详解】

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, 公差 $d \in [1, 2]$, 且 $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$,

$\therefore 1 + 3d + \lambda(1 + 9d) + 1 + 15d = 15$, 解得 $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d}$,

$\because d \in [1, 2]$, $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d} = -2 + \frac{15}{1+9d}$ 是减函数,

$\therefore d = 1$ 时, 实数 λ 取最大值为 $\lambda = \frac{13-18}{1+9} = -\frac{1}{2}$.

故选 D.

【点睛】

本题考查实数值的最大值的求法, 考查等差数列的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

11、B

【解析】

构造函数 $g(x) = f(x) - x$, 利用导数研究函数的单调性, 即可得到结论.

【详解】

设 $g(x) = f(x) - x$, 则函数的导数 $g'(x) = f'(x) - 1$, $\because f'(x) < 1$, $\therefore g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 为减函数, $\because f(1) = 1$,

$\therefore g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$, 则不等式 $g(x) < 0$ 等价于 $g(x) < g(1)$,

则不等式的解集为 $x > 1$, 即 $f(x) < x$ 的解为 $x > 1$, $\because f(\lg^2 x) < \lg^2 x$, 由 $\lg^2 x > 1$ 得 $\lg x > 1$ 或 $\lg x < -1$, 解得

$x > 10$ 或 $0 < x < \frac{1}{10}$,

故不等式的解集为 $\left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$. 故选: B.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数单调性，根据函数的单调性解不等式，考查学生分析问题解决问题的能力,是难题.

12、A

【解析】

把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

解：由 $i \cdot z = 3 + 2i$ ，得 $z = \frac{3+2i}{i} = \frac{(3+2i)(-i)}{-i^2} = 2 - 3i$ ，

$\therefore \bar{z} = 2 + 3i$.

故选 A .

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $m > 2$

【解析】

求函数 $f'(x)$ ，研究函数的单调性和极值，作出函数 $f(x)$ 的图象，设 $t = f(x)$ ，若函数 $g(x)$ 恰有 4 个零点，则等价于

函数 $h(t) = t^2 - (2m-1)t + 2$ 有两个零点，满足 $t > 1$ 或 $0 < t < 1$ ，利用一元二次函数根的分布进行求解即可.

【详解】

当 $x > 0$ 时， $f'(x) = \frac{e(1-\ln x)}{x^2}$ ，

由 $f'(x) > 0$ 得： $1 - \ln x > 0$ ，解得 $0 < x < e$ ，

由 $f'(x) < 0$ 得： $1 - \ln x < 0$ ，解得 $x > e$ ，

即当 $x = e$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，同时也是最大值， $f(e) = 1$ ，

当 $x \rightarrow +\infty$ ， $f(x) \rightarrow 0$ ，

当 $x \rightarrow 0$ ， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，

作出函数 $f(x)$ 的图象如图，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/166230025010010123>

