中 文 摘 要

图的哈密尔顿性理论研究是非常热门的研究领域, 哈密尔顿圈问题引出了诸如货郎问题、邮递员问题等类似的问题. 这类问题的研究, 促进了最优化方法的研究及运筹学、拓扑学等学科的发展. 目前还没有找到一个图存在哈密尔顿圈的充分必要条件. 多部有向图是有向图的一个重要的图类, 对多部有向图中圈的研究, 以往都集中于多部竞赛图或几乎正则的多部有向图, 关于度条件的研究还很少. 近几年, 关于二部有向图中度条件的研究取得了突破性进展, 但是仍不完善. 本文研究了不平衡二部有向图中长圈问题的度条件以及平衡三部有向图中哈密尔顿圈问题的度条件.

本文共分为三章.

第一章给出了本文所涉及到的关于有向图的一些基本概念以及所研究问题的研究现状.

第二章研究不平衡二部有向图存在覆盖较小部集中所有顶点的圈的半度和条件. 在 2012 年, Adamus 等给出了平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的半度和条件并提出如下猜想: 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a\le b=|Y|$. 若 D 中任意两个属于不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+(x)+d^-(y)>\frac{a+b+2}{2}$, 则 D 包含长为 $2a$ 的有向圈. 设 $b=a+k$, 则 $d^+(x)+d^-(y)>\frac{a+b+2}{2}$ 等价于 $d^+(x)+d^-(y)\ge a+2+\frac{k-1}{2}$. 在本章, 我们将猜想中的条件从两个方面进行加强后得出有向图包含长为 2a 的圈, 即给出下面的定理: 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a\le b=|Y|$, $b=a+k$, $a\ge 2$, $k\ge 3$. 若 D 满足下面条件之一, 则 D 包含长为 $2a$ 的有向圈.

(i) D 中任意两个属于不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+(x)+d^-(y)\ge a+k$;

(ii) D 中任意两个属于不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+(x)+d^-(y)\ge a+2+\frac{k-1}{2}$ 且任意两个顶点 $u,v\in Y$ 都有 $d^+(u)+d^-(v)\ge a+1$.

第三章研究了平衡三部有向图存在哈密尔顿圈的半度和条件. 在 2012 年, Adamus 等证明了平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的不同部顶点的半度和条件, 即设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a=|Y|$, $a\ge 2$. 若 D 中任意两个属于不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+(x)+d^-(y)\ge a+2$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈. 本章将其推广到平衡三部有向图, 给出了平衡三部有向图存在哈密尔顿圈的半度

和条件, 即给出了下面的定理: 设 $D=(V_1,V_2,V_3)$ 是一个阶为 $3a$ 的平衡三部有向图. 若 D 中任意两个属于不同部集的顶点 $x\in V_i$, $y\in V_j$ $(i\neq j)$, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+_{V_j}(x)+d^-_{V_i}(y)\geq a+2$, 则 D 中存在哈密尔顿圈.

关键词: 有向图; 多部有向图; 哈密尔顿圈; 度条件

中图分类号: O157.5

目 录

第一章　绪论

随着互联网和计算机技术的发展, 图论这一学科受到了学者广泛的关注, 研究成果已经应用到了许多领域. 图的哈密尔顿性是图论中重要的一部分, 国内外每年都有大量的研究论文涉及图的哈密尔顿性问题, 该问题与着名的四色问题存在着紧密联系. 哈密尔顿问题在运筹学、通讯网络、社交网络、计算机科学、编码理论以及复杂性理论中都有着广泛应用, 故而受到众多学者的青睐. 有关结论可参考文献 [1-4]. 如果一个图中顶点的度数越大, 那么这个图中存在哈密尔顿圈或哈密尔顿路的可能性更大. 因此度条件是研究哈密尔顿问题的经典途径. 本文主要研究有向图中长圈的半度和条件. 本章我们首先给出图论的一些基本术语和概念并简要介绍本文的主要内容.

§1.1　符号术语

在本文中, 我们考虑的有向图是无环且无多重弧的简单有向图. 对于文中未定义的基本符号术语请参考文献 [5]. 设 D 是一个有向图, $V(D)$ 和 $A(D)$ 分别表示 D 的顶点集和弧集.

对于任意的顶点 $x, y \in V(D)$, 如果 $xy \in A(D)$, 则称 x 控制 y 或者 y 被 x 控制, 也记作 $x \to y$. 如果 $xy \notin A(D)$, 则称 x 不控制 y 或者 y 不被 x 控制, 也记作 $x \nrightarrow y$. 对于 $V(D)$ 中不相交的两个子集 X 和 Y, 如果 X 中的每个顶点都控制 Y 中的每个顶点, 记作 $X \to Y$. 如果 X 中的每个顶点都控制顶点 y, 记作 $X \to y$. 如果 X 到 Y 没有弧, 记作 $(X, Y) = \varnothing$. 在有向图 D 中, 如果顶点集 $S \subset V(D)$, 则 S 的外邻集和内邻集分别是指 $N^+(S) = \{u \in V(D) \mid vu \in A(D),\ v \in S\}$, $N^-(S) = \{u \in V(D) \mid uv \in A(D),\ v \in S\}$. 如果 $S = \{v\}$ 是一个单点集, 则称 $d^+(v) = |N^+(v)|$, $d^-(v) = |N^-(v)|$ 分别为 v 的外度和内度. 定义 v 的度为 $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$. 用 $\delta^+(D) = \min\ \{d_D^+(x) : x \in V(D)\}$ 和 $\delta^-(D) = \min\ \{d_D^-(x) : x \in V(D)\}$ 分别表示 D 的最小外度和最小内度. 假设 V' 是 $V(D)$ 的一个非空子集. 以 V' 为顶点集, 以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图, 称为 D 的由 V' 导出的子图, 记为 $D[V']$. 在无向图中, 用 $dist(u, v)$ 表示任意两个顶点 u, v 之间的最短路的长度, 称其为两点之间的距离.

本文中的路和圈除特殊说明外都是有向路和有向圈. 设 $P = y_0y_1 \cdots y_k$ 是 D 中的一条路. 对任意的 $y_i, y_j \in V(P)$, $i \neq j$, 用 y_iPy_j 或 $P[y_i, y_j]$ 表示为 P 中从 y_i 到 y_j 的子路. 如果 $0 < i \leq k$, 则称 y_{i-1} 是 P 中 y_i 的前继, 记作 y_i^-. 如果 $0 \leq i < k$, 则称 y_{i+1}

是 P 中 y_i 的后继, 记作 y_i^+. 类似地, 设 $C = y_0y_1\cdots y_ky_0$ 是 D 中的一个圈, 对任意的 $y_i, y_j \in V(C)$, $i \neq j$, 用 y_iCy_j 或 $C[y_i, y_j]$ 表示为 C 中从 y_i 到 y_j 的子路. 称 y_{i-1} 是 C 中 y_i 的前继, 记作 y_i^-. 称 y_{i+1} 是 C 中 y_i 的后继, 记作 y_i^+ (下标模 $k+1$).

设 C 是 D 中的一个圈, P 是 D 中的一条路. 如果 $V(C) = V(D)$, $V(P) = V(D)$, 则称 C 为 D 中的一个哈密尔顿圈, P 为 D 中的一条哈密尔顿路. 如果 D 包含哈密尔顿圈, 则称 D 是哈密尔顿的. 若 D 中任意顶点对 x, y, 有 $xy \in A(D)$ 且 $yx \in A(D)$, 则称 D 是完全有向图.

在有向图 D 中, 如果 $V(D)$ 存在一个非空划分 V_1, V_2, 使得 $A(D)$ 中每条弧的两个端点分别在 V_1 和 V_2 中, 则称 D 是二部有向图, 称 V_1, V_2 是 D 的两个部集. 如果 $|V_1| = |V_2|$, 则称有向图 D 是平衡的. 我们称 V_1 到 V_2 的匹配是尾在 V_1 中, 而头在 V_2 中的独立弧集(当 $u_1 \neq v_1$ 且 $u_2 \neq v_2$, 称弧 u_1u_2 和 v_1v_2 是独立的). 如果 D 是平衡的且匹配中恰有 $|V_1|$ 条弧, 则称该匹配是完美匹配. 如果一条路(圈)的边在 M 与 $A(D)\backslash M$ 中交替出现则称之为 M 交错路(圈). 对于从 V_1 到 V_2 的完美匹配 M, 对 $x \in V_1$, 在 V_2 中有唯一的一个顶点 y, 使 $xy \in M$, 记 $y = M(x)$. 类似地, 对 $y \in V_2$, 在 V_1 中有唯一的一个顶点 x, 使 $xy \in M$, 记 $x = M^-(y)$. 在二部有向图 D 中, 如果属于不同部集的任意两个顶点 x 和 y, 有 $xy \in A(D)$ 且 $yx \in A(D)$, 则称 D 是完全二部有向图. 记 $K_{n,n,n}$ 为阶为 $3n$ 的完全三部有向图.

§1.2 问题的提出与内容的安排

哈密尔顿性的研究是图论不可分割的一部分, 合理的利用哈密尔顿性的结论不仅可以提高效率, 还能降低工作的成本. 因此很多学者致力于哈密尔顿图问题的研究, 目前已经有了很大的突破, 以下是本文的研究背景及研究现状.

1952 年, Dirac 在文献 [6] 中给出了无向图存在哈密尔顿圈的最小度条件.

定理 1.2.1. ([6]) 设 D 是一个阶为 n 的无向图, 其中 $n \geq 3$. 若 D 中任意一个顶点 $x \in V(D)$ 都满足 $d(x) \geq \frac{n}{2}$, 则 D 是哈密尔顿的.

1960 年, Ore 在文献 [7] 中推广了 Dirac 型条件, 给出了无向图存在哈密尔顿圈的关于两个不相邻顶点的度和条件. 这是一个非常经典的定理.

定理 1.2.2. ([7]) 设 D 是一个阶为 n 的无向图, 其中 $n \geq 3$. 若 D 中任意两个不相邻顶点 x, y 都有 $d(x) + d(y) \geq n$, 则 D 是哈密尔顿的.

1984 年, 范更华在文献 [8] 中推广了 Ore 型条件给出了下面的结论.

定理 1.2.3. ([8]) 设 D 是一个阶为 n 的 2 连通无向图, 其中 $n \geq 3$. 若 D 中任意两个距离为 2 的顶点 x, y 满足 $\max\{d(x),\ d(y)\} \geq \frac{n}{2}$, 则 D 是哈密尔顿的.

1963 年, Moon 和 Moser 在文献 [9] 中将 Ore 型条件推广到了平衡二部无向图, 证明了平衡二部无向图存在哈密尔顿圈的度和条件.

定理 1.2.4. ([9]) 设 D 是一个阶为 $2n$ 的平衡二部无向图. 若 D 中任意两个属于不同部不相邻顶点 x, y 都有 $d(x) + d(y) \geq n + 1$, 则 D 是哈密尔顿的.

1996 年, 高太平和杨爱民在平衡二部无向图中引入了 Fan 型条件.

定理 1.2.5. ([10]) 设 D 是一个阶为 $2n$ 的 2 连通平衡二部无向图, 其中 $n \geq 2$. 若 $\min\{\max\{d(x),\ d(y)\} : x, y \in V(D),\ dist(x, y) = 2\} \geq \frac{n}{2} + 1$, 则 D 是哈密尔顿的.

2018 年, 王淼等将上述定理进行推广, 结论如下.

定理 1.2.6. ([11]) 设 D 是一个阶为 $2n$ 的 2 连通平衡二部无向图, 其中 $n \geq 2$. 若 $\min\{\max\{d(x),\ d(y)\} : x, y \in V(D),\ dist(x, y) = 2\} \geq \frac{n+1}{2}$, 则 D 是哈密尔顿的.

上述的定理使用度条件研究了无向图的哈密尔顿性, 为后来的研究奠定了基础.

1960 年, Ghouila-Houri 在文献 [12] 中将 Dirac 型条件推广到了有向图, 给出了强连通有向图存在哈密尔顿圈的最小度条件.

定理 1.2.7. ([12]) 设 D 是一个阶为 n 的强连通有向图, 其中 $n \geq 2$. 若 D 中任意顶点 $x \in V(D)$ 都满足 $d(x) \geq n$, 则 D 是哈密尔顿的.

1969 年, Nash-Williams 在文献 [13] 中给出了有向图存在哈密尔顿圈的最小半度条件.

定理 1.2.8. ([13]) 设 D 是一个阶为 n 的有向图, 其中 $n \geq 3$. 若 $\delta^+(D) \geq \frac{n}{2}$ 且 $\delta^-(D) \geq \frac{n}{2}$, 则 D 是哈密尔顿的.

1972 年, Woodall 在文献 [14] 中给出了有向图中存在哈密尔顿圈的半度和条件并且该条件的下界是紧的.

定理 1.2.9. ([14]) 设 D 是一个阶为 n 的有向图, 其中 $n \geq 3$. 若 D 中任意两个顶点 x, y, 当 $xy \notin A(D)$ 时都有 $d^+(x) + d^-(y) \geq n$, 则 D 是哈密尔顿的.

1973 年, Meyniel 在文献 [15] 中给出了有向图存在哈密尔顿圈的度和条件.

定理 1.2.10. ([15]) 设 D 是一个阶为 n 的有向图, 其中 $n \geq 2$. 若 D 中任意两个不相邻的顶点 x, y 都有 $d(x) + d(y) \geq 2n - 1$, 则 D 是哈密尔顿的.

定理 1.2.7-定理 1.2.10 的关系如下("⇒" 表示可推出):

定理1.2.10 ⇒ 定理1.2.9 ⇒ 定理1.2.8	定理1.2.10 ⇒ 定理1.2.7 ⇒ 定理1.2.8

1990 年, Amar 和 Manoussakis 在文献 [16] 中考虑了二部有向图中存在哈密尔顿圈的最小半度条件.

定理 1.2.11. ([16]) 设 $D = (X, Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X| = a \leq b = |Y|$. 若 $\delta^+(D) \geq \frac{a+2}{2}$ 且 $\delta^-(D) \geq \frac{a+2}{2}$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈.

当定理 1.2.11 假设中的 $a = b$ 时, 该定理是平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的 Dirac 型条件.

目前, 关于二部有向图存在长为 $2a$ 的有向圈的 Ore 型条件的结论较少, 1999 年, Manoussakis 和 Milis 在文献 [17] 中给出了二部有向图存在哈密尔顿圈的半度和条件.

定理 1.2.12. ([17]) 设 $D = (X, Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X| = a \leq b = |Y|$. 若 D 中任意两个顶点 x, y, 当 $xy \notin A(D)$ 时都有 $d^+(x) + d^-(y) \geq a + 2$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈.

上述定理的条件涉及 D 中的所有非相邻顶点对, 特别地, 包含同一部集中的每对顶点. 在 2012 年, 为了使条件更有意义 Adamus 等在文献 [18] 中给出了平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的不同部顶点的半度和条件.

定理 1.2.13. ([18]) 设 $D = (X, Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X| = a = |Y|, a \geq 2$. 若 D 中任意两个属于不同部集的顶点 x, y, 当 $xy \notin A(D)$ 时都有 $d^+(x) + d^-(y) \geq a + 2$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈.

定理 1.2.13 的度条件的下界是紧的. 在文献 [18] 中, Adamus 等还给出了不平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的不同部顶点的半度和条件的猜想. 该猜想是 Broersma 和 Yoshimoto 所证明的定理" 设 $D = (X, Y)$ 是一个二部无向图, 其中 $|X| \geq |Y|$. 若 D 中任意两个不同部不相邻的顶点 x, y 都有 $d(x) + d(y) \geq \frac{|V(D)|+2}{2}$, 则 D 包含一个长为 $2|Y|$ 的圈"在有向图上的推广.

猜想 1.2.1. ([18]) 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a\le b=|Y|$. 若 D 中任意两个不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+(x)+d^-(y)>\frac{a+b+2}{2}$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈.

关于此猜想, 2017 年, 王瑞霞和郭晶在文献 [19] 中证明了当 $k=1,2$ 时该猜想是正确的.

定理 1.2.14. ([19]) 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a\le a+k=|Y|$, $a\ge 2$ 且 $k=1$ 或 2. 若 D 中任意两个不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有 $d^+(x)+d^-(y)\ge a+2+\frac{k-1}{2}$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈.

在第二章中给出了该猜想不平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的更一般的充分条件, 证明了如果不平衡二部有向图 D 的度条件大于等于 $a+k$, 则 D 包含一个长为 $2a$ 的有向圈. 研究不平衡二部有向图存在长为 $2a$ 的有向圈时其同一部集与不同部集结合考虑的半度和条件.

Adamus 等在 2014 年的文献 [20] 中证明了平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的 Meyniel 型条件. 先给出一个定义: D 是一个阶为 $2a$ 的平衡二部有向图, 若 D 中任意两个不相同顶点 $u,v\in A(D)$, 当 $uv,vu\notin A(D)$ 时有 $d(u)+d(v)\ge 3a+k$, 则称 D 满足条件 M_k.

定理 1.2.15. ([20]) 设 D 是一个阶为 $2a$ 的平衡二部有向图, 其中 $a\ge 2$. 若 D 满足下面条件之一, 则 D 是哈密尔顿的.

(i) D 满足条件 M_1;

(ii) D 是强连通的且 D 满足条件 M_0.

现如今对于二部图在顶点的度条件和顶点的邻域条件下存在哈密尔顿圈的结论已经很多了, 部分学者开始研究多部图存在哈密尔顿圈的度条件.

1995 年, 陈冠涛等在文献 [21] 中给出了平衡 k 部无向图存在哈密尔顿圈的最小度条件.

定理 1.2.16. ([21]) 设 D 是一个阶为 kn 的平衡 k 部无向图. 若 D 满足

$$\delta(D)>\begin{cases}(\frac{k}{2}-\frac{1}{k+1})n, & \text{当 } k\text{为奇数;}\\ (\frac{k}{2}-\frac{2}{k+1})n, & \text{当 } k\text{为偶数;}\end{cases}$$

则 D 是哈密尔顿的.

当上述 $n = 1$ 时, 由定理 1.2.16 可以推出 Dirac 型条件, 该定理是 Dirac 型条件在 $n > 1$ 时的推广.

1997 年, 陈冠涛等在文献 [23] 中将最小度条件推广到了不同部不相邻顶点的度和条件, 结论如下.

定理 1.2.17. ([23]) 设 D 是一个阶为 kn 的平衡 k 部无向图, 其中 $k \geq 2$. 若 D 满足

$$d(u) + d(v) > \begin{cases} (k - \frac{2}{k+1})n, & \text{当 } k\text{为奇数;} \\ (k - \frac{4}{k+2})n, & \text{当 } k\text{为偶数;} \end{cases}$$

则 D 是哈密尔顿的.

1998 年, Yokomura 在陈冠涛等的基础上考虑了关于平衡三部无向图存在哈密尔顿圈的度和条件, 参考文献 [24].

定理 1.2.18. ([24]) 设 $D = (V_1, V_2, V_3)$ 是一个阶为 $3n$ 的平衡三部无向图, 若 D 中任意两个不同部不相邻的顶点 $x \in V_i$, $y \in V_j$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ 都有 $|N(x) \cap V_j| + |N(y) \cap V_i| \geq n + 1$, 则 D 是哈密尔顿的.

2021 年, DeBiasio 等在文献 [22] 中给出了严格的最小度条件.

定理 1.2.19. ([22]) 设 D 是一个阶为 n 的平衡 k 部无向图, 其中 $k \geq 2$. 若 D 满足 $\delta(D) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n+2}{2\lceil \frac{k+1}{2} \rceil} \rfloor - \frac{n}{k}$, 则 D 或者是哈密尔顿的或者 4 整除 n 且 $k \in \{2, \frac{n}{2}\}$.

第三章在 Yokomura 证明的平衡三部有向图存在哈密尔顿圈的度和条件的基础上猜想并证明了平衡三部有向图存在哈密尔顿圈的半度和条件.

第二章　不平衡二部有向图中的长圈

本章研究的是不平衡二部有向图存在覆盖较小部集中所有顶点的圈的半度和条件. 在 2012 年, Adamus 等在文献 [18] 中给出了平衡二部有向图存在哈密尔顿圈的半度和条件并提出关于不平衡二部有向图包含长为 2a 的圈的半度和条件的猜想. 在本章, 我们将猜想中的条件从两个方面进行加强后得出定理 2.2.1 与定理 2.2.2.

§2.1　准备知识

下面给出本章用到的一个定义和证明主要结果时需要用到的一些引理.

定义 2.1.1. 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a\le b=|Y|$. 若 D 中任意两个属于不同部集的顶点 x,y, 当 $xy\notin A(D)$ 时都有

$$d^+(x)+d^-(y)\ge a+n,$$

称 D 满足条件 A_n^*.

引理 2.1.1. ([19]) 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a\le b=|Y|$. 若 D 满足条件 A_0^*, 则 D 包含一个从 X 到 Y 的匹配, 且 X 的每个顶点都被匹配饱和.

在本章中 $D=(X,Y)$ 均指一个二部有向图, 其中 $|X|=a$, $|Y|=a+k$, $k\ge 1$. 当 D 中存在从 X 到 Y 且饱和 X 中每个顶点的匹配时, 在所有的从 X 到 Y 且饱和 X 中所有顶点的匹配中, 选择匹配 M 使得 M 交错路是最长的, 记 P 是一条最长的 M 交错路, 设为 $P=p_1p_2\cdots p_s$. 进一步可以选择一条最长的交错路 P 满足下面引理 2.1.2 的条件. 令 $Q=V(D)\backslash V(P)$, $Q_X=Q\cap X$, $Q_Y=Q\cap Y$, $Q'=\{u\in Q_Y\mid vu\notin M$, 对每个 $v\in Q_X\}$, $P_X=V(P)\cap X$, $P_Y=V(P)\cap Y$.

引理 2.1.2. ([19]) 若 D 满足条件 A_0^*, 则可以选择路 P 使得满足下面条件之一.

(a) 若 s 是偶数, 则 $p_1\in X, p_s\in Y$.

(b) 若 s 是奇数, 则 $p_1\in Y, p_s\in Y$.

(c) 在情况 (a) 中, $d^+_{Q_X}(p_s)=d^-_{Q_Y}(p_1)=0$; 在情况 (b) 中, $d^+_{Q_X}(p_s)=d^-_{Q_Y\backslash Q'}(p_2)=0$.

引理 2.1.3. ([19]) 设 D 满足条件 A_1^*. 若 $p_sp_1\in A(D)$, 则 D 中包含一条长为 $2a$ 的 M 交错圈.

引理 2.1.4. 若 D 满足条件 $A^*_{2+\frac{k-1}{2}}$, 则 D 中包含一条长至少为 $a+1$ 的圈, 它与某个从 X 到 Y 且饱和 X 中所有顶点的匹配是交错的.

证明: 我们分 s 是偶数与 s 是奇数两种情况来讨论.

假设 s 是偶数. 由引理 2.1.2 (a), 知 $p_1 \in X$, $p_s \in Y$. 若 $p_sp_1 \in A(D)$, 由引理 2.1.3, D 中包含一条长为 $2a$ 的 M 交错圈. 下设 $p_sp_1 \notin A(D)$. 由引理 2.1.2 (c), 有 $d^+_{Q_X}(p_s) = d^-_{Q_Y}(p_1) = 0$. 故

$$a+2 \le a+2+\frac{k-1}{2} \le d^+(p_s)+d^-(p_1) = d^+_{V(P)}(p_s)+d^-_{V(P)}(p_1),$$

可得 $d^+_{V(P)}(p_s) \ge \frac{a+2}{2}$ 或者 $d^-_{V(P)}(p_1) \ge \frac{a+2}{2}$ 成立. 若 $d^+_{V(P)}(p_s) \ge \frac{a+2}{2}$, 令 $i_0 = \min\{i : p_sp_i \in A(D)\}$. 注意到, $p_{i_0}Pp_sp_{i_0}$ 是阶至少为 $2d^+_{V(P)}(p_s)$ 的圈而 $2d^+_{V(P)}(p_s) \ge a+2$. 若 $d^-_{V(P)}(p_1) \ge \frac{a+2}{2}$, 令 $j_0 = \max\{j : p_jp_1 \in A(D)\}$. 注意到, $p_1Pp_{j_0}p_1$ 是阶至少为 $2d^-_{V(P)}(p_1)$ 的圈而 $2d^-_{V(P)}(p_1) \ge a+2$.

假设 s 是奇数. 首先证明 $p_sp_2 \notin A(D)$ 且 $p_{s-1}p_1 \notin A(D)$.

用反证法, 假设 $p_sp_2 \in A(D)$. 若 $Q_X = \emptyset$, 则 $p_2Pp_sp_2$ 是一条长为 $2a$ 的 M 交错圈. 下设 $Q_X \ne \emptyset$, 从而 $Q_Y \backslash Q' \ne \emptyset$. 下面分两种情形讨论,

情形1. $d^-(p_1) = 0$.

任取一个顶点 $x \in Q_X$, 有 $xp_1 \notin A(D)$. 因此

$$\begin{aligned} a+2+\frac{k-1}{2} \le d^+(x)+d^-(p_1) &= d^+_{V(P)}(x)+d^+_{Q_Y\backslash Q'}(x)+d^+_{Q'}(x)+d^-(p_1) \\ &\le a+d^+_{Q'}(x), \end{aligned}$$

经计算, $d^+_{Q'}(x) \ge 2+\frac{k-1}{2}$. 对任意的 $v \in N^+_{Q'}(x)$, 可得 $d^+_{V(P)}(v) = 0$, 否则存在顶点 $p_i \in P_X$ 使 $vp_i \in A(D)$, 从而 $xvp_iPp_sp_2Pp_{i-1}$ 是一条比 P 更长的交错路, 注意到该路是与另一个匹配 $M' = M \cup \{xv\} \backslash \{xM(x)\}$ 交错的, 这与 P 的极大性矛盾! 特别地, $N^+_{Q'}(x) \cap N^-_{Q'}(p_2) = \emptyset$, 即 $d^-_{Q'}(p_2) + d^+_{Q'}(x) \le k-1$. 经计算, $d^-_{Q'}(p_2) \le k-1-d^+_{Q'}(x) \le k-1-(2+\frac{k-1}{2}) = \frac{k-1}{2}-2$. 根据引理 2.1.2 (c), 可得 $d^-_{Q_Y\backslash Q'}(p_2) = 0$. 由 $vp_2 \notin A(D)$, 有

$$\begin{aligned} a+2+\frac{k-1}{2} \le d^+(v)+d^-(p_2) &= d^+_{Q_X}(v)+(d^-_{V(P)}(p_2)+d^-_{Q'}(p_2)) \\ &\le (a-\frac{s-1}{2})+(\frac{s+1}{2}+\frac{k-1}{2}-2) \\ &= a+\frac{k-1}{2}-2, \end{aligned}$$

这是矛盾的!

情形2. $d^-(p_1) > 0$.

对任意的 $z \in \{p_1\} \cup N^-_{Q'}(p_2)$, 当 $d^-(z) = 0$ 时, 类似于情形 1, 可得矛盾. 下设 $d^-(z) > 0$. 显然 $d^-_{Q'}(z) = 0$, 否则存在 $x' \in Q_X$ 使 $x'z \in A(D)$, 从而 $x'zp_2Pp_s$ 是一条比 P 更长的交错路. 注意到该路是与另一个匹配 $M' = M \cup \{x'z\} \backslash \{x'M(x')\}$ 交错的, 这与 P 的极大性矛盾! 因为 $d^-(z) > 0$, 所以存在顶点 $p_i \in P_X$ 使得 $p_iz \in A(D)$. 注意到 $p_{i+1}Pp_sp_2Pp_iz$ 是一条与 P 的长度相等的 M 交错路. 因此 $d^+_{Q_X}(z) = 0$, 对任意的 $x \in Q_X$, 有 $N^-_{Q'}(p_2) \cap N^-_{Q'}(x) = \emptyset$, 即 $d^-_{Q'}(p_2) + d^-_{Q'}(x) \leq k - 1$. 任取顶点 $y \in Q_Y \backslash Q'$, 显然 $d^+_{P_X}(y) = 0$, $d^-_{P_Y}(x) = 0$. 因此

$$
\begin{aligned}
2(a+2+\frac{k-1}{2}) &\leq d^+(y) + d^-(p_2) + d^+(z) + d^-(x) \\
&= d^+_{Q_X}(y) + d^-_{V(P)}(p_2) + d^-_{Q'}(p_2) + d^+_{V(P)}(z) + d^-_{Q_Y\backslash Q'}(x) + d^-_{Q'}(x) \\
&\leq (a - \frac{s-1}{2}) + (\frac{s-1}{2} + 1) + k - 1 + \frac{s-1}{2} + (a - \frac{s-1}{2}) \\
&= 2a + k,
\end{aligned}
$$

这是矛盾的! 综上所述, $p_sp_2 \notin A(D)$.

用反证法, 假设 $p_{s-1}p_1 \in A(D)$. 若 $s - 1 \geq a + 1$, 则 $p_1Pp_{s-1}p_1$ 是一条长至少为 $a + 1$ 的交错圈, 该圈是与匹配 $M' = M \cup \{p_{s-1}p_1\} \backslash \{p_{s-1}p_s\}$ 交错的. 这与 C 的极大性矛盾! 下设 $s - 1 \leq a$. 因为 $p_sp_2 \notin A(D)$, 所以有 $a + 2 + \frac{k-1}{2} \leq d^+(p_s) + d^-(p_2) = d^+_{V(P)}(p_s) + d^-_{V(P)}(p_2) + d^-_{Q'}(p_2) \leq \frac{s-1}{2} - 1 + \frac{s-1}{2} + d^-_{Q'}(p_2) \leq a - 1 + d^-_{Q'}(p_2)$. 经计算, $d^-_{Q'}(p_2) \geq 3 + \frac{k-1}{2}$. 令 $v \in N^-_{Q'}(p_2)$, $vp_2Pp_{s-1}p_1$ 是一条与 P 长度相等的路. 注意到 $p_1p_2 \in A(D)$, 类似于上述 $p_sp_2 \notin A(D)$ 的证明, 可得矛盾. 因此 $p_{s-1}p_1 \notin A(D)$.

由 $p_sp_2 \notin A(D)$ 且 $p_{s-1}p_1 \notin A(D)$ 有

$$
\begin{aligned}
2(a+2+\frac{k-1}{2}) &\leq d^+(p_s) + d^-(p_2) + d^+(p_{s-1}) + d^-(p_1) \\
&= d^+_{V(P)}(p_s) + d^-_{V(P)}(p_2) + d^-_{Q'}(p_2) + d^+_{V(P)}(p_{s-1}) + d^-_{V(P)}(p_1) \\
&\leq \frac{a}{2} + d^-_{V(P)}(p_2) + k - 1 + d^+_{V(P)}(p_{s-1}) + \frac{a}{2},
\end{aligned}
$$

可得 $d^+_{V(P)}(p_{s-1}) \geq \frac{a+4}{2}$ 或者 $d^-_{V(P)}(p_2) \geq \frac{a+4}{2}$ 成立. 若 $d^+_{V(P)}(p_{s-1}) \geq \frac{a+4}{2}$, 令 $i_0 = \min\{i : p_{s-1}p_i \in A(D)\}$. 注意到, $p_{i_0}Pp_{s-1}p_{i_0}$ 是阶至少为 $2(d^+_{V(P)}(p_{s-1}) - 1)$ 的圈而 $2(d^+_{V(P)}(p_{s-1}) - 1) \geq a + 2$. 若 $d^-_{V(P)}(p_2) \geq \frac{a+4}{2}$, 令 $j_0 = \max\{j : p_jp_2 \in A(D)\}$. 注意到, $p_2Pp_{j_0}p_2$ 是阶至少为 $2(d^-_{V(P)}(p_2) - 1)$ 的圈而 $2(d^-_{V(P)}(p_2) - 1) \geq a + 2$. ■

根据引理 2.1.1, 可得 D 中包含一个从 X 到 Y 的匹配, 使得 X 中每个顶点都被匹配饱和. 当 $k \geq 3$ 时, $a+k \geq a+2+\frac{k-1}{2}$. 根据引理 2.1.4, 可得 D 中包含一条长至少为 $a+1$ 的圈. 在所有从 X 到 Y 且饱和 X 中所有顶点的匹配中选择一个匹配 M, 使 M 交错圈是最长的, 记为 $C = x_1y_1\cdots x_my_mx_1$, 其中 $x_v \in X,\ y_v \in Y$, $v = 1,2,\ldots,m$. 根据引理 2.1.4, 可得 $2m \geq a+1$.

若 $m = a$, 结论成立. 下设 $m < a$. 令 P 是 $D - V(C)$ 中最长的 M 交错路, 记 $P = p_1p_2\cdots p_s,\ s \geq 2$. 令 $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor = p$, $R = V(D)\backslash(V(C)\cup V(P))$, $P_X = V(P)\cap X$, $P_Y = V(P)\cap Y$, $C_X = V(C)\cap X$, $C_Y = V(C)\cap Y$, $R_X = R\cap X$, $R_Y = R\cap Y$, $R' = \{u \in R_Y \mid vu \notin M,\ 对每个\ v \in X\}$, $|R_X| = r$. 若 s 是偶数, 则 $|V(P)| = s = 2p$, $|R'| = k$, $|R_Y| = r+k$; 若 s 是奇数, 则 $|V(P)| = s = 2p+1$, $|R'| = k-1$, $|R_Y| = r+k-1$. 因此 $a = m+p+r$ 且 $2p+2r = 2a-2m \leq a-1$.

由于 P 为 $D-V(C)$ 中最长的 M 交错路, 与引理 2.1.3 的证明类似, 可得 P 满足下面条件之一.

(i) 若 s 是偶数, 则 $d_R^+(p_s) = 0$ 且 $d_R^-(p_1) = 0$;

(ii) 若 s 是奇数, 则 $d_R^+(p_s) = 0$ 且 $d_{R\backslash R'}^-(p_2) = 0$.

引理 2.1.5. 若 $V(C)$ 中存在两个不同的顶点 c_i, c_j 有 $c_ip_1 \in A(D), p_sc_j \in A(D)$, 则 $d_{V(C)}^+(p_s) + d_{V(C)}^-(p_1) \leq m-p+1$.

证明: 设 $s = 2p+\varepsilon$, 当 $p_1 \in Y$ 时 $\varepsilon = 1$; 当 $p_1 \in X$ 时 $\varepsilon = 0$. 我们选择顶点 c_i, c_j, 使得序列 $c_{i+1}\cdots c_{j-1}$ 的顶点个数尽可能少, 令 $2l+\varepsilon$ 为该序列的顶点数. 容易得到 $l \geq p$, 否则 $c_ip_1Pp_sc_jCc_i$ 是一条比 C 更长的交错圈. 当 s 为偶数时, 该圈与匹配 M 交错; 当 s 为奇数时, 该圈与匹配 $M' = M\cup\{c_ip_1\}\backslash\{c_ic_{i+1}\}$ 交错, 这与 C 的极大性矛盾! 当 $\varepsilon = 0$ 时, 有 $p_1 \in X,\ p_s \in Y$. 对序列 $c_{j+1}\cdots c_{i-1}$ 中的顶点对 $c_k,\ c_{k+1},\ k \in \{j+1, j+3, \ldots, i-2\}$, c_kp_1 与 p_sc_{k+1} 中至多只有一条弧属于 $A(D)$, 从而 $d_{V(C)}^+(p_s)+d_{V(C)}^-(p_1) \leq \frac{1}{2}(2m-2l-2)+2 = m-l+1 \leq m-p+1$. 当 $\varepsilon = 1$ 时, 有 $p_1 \in Y$, $p_s \in Y$. 不失一般性, 设序列 $c_j\cdots c_i$ 为 $x_1y_1x_2y_2\cdots x_{m-l}$. 对 $x_1y_1\cdots x_{m-l-1}y_{m-l-1}x_{m-l}$ 中的任意顶点对 $x_k,\ x_{k+1},\ k \in \{1,\ldots,m-l-1\}$, x_kp_1 与 p_sx_{k+1} 中至多只有一条弧属于 $A(D)$. 令

$$e(x_i,p_1) = \begin{cases} 1, & 当\ x_i \to p_1; \\ 0, & 当\ x_i \nrightarrow p_1; \end{cases} \qquad e(p_s,x_i) = \begin{cases} 1, & 当\ p_s \to x_i; \\ 0, & 当\ p_s \nrightarrow x_i. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}d^+_{V(C)}(p_s)+d^-_{V(C)}(p_1)&=\sum_{i=1}^{m-l}e(x_i,p_1)+\sum_{i=1}^{m-l}e(p_s,x_i)\\&=\sum_{i=1}^{m-l-1}(e(x_i,p_1)+e(p_s,x_{i+1}))+e(x_{m-l},p_1)+e(p_s,x_1)\\&\le m-l-1+2=m-l+1\le m-p+1,\end{aligned}$$

综上所述, $d^+_{V(C)}(p_s)+d^-_{V(C)}(p_1)\le m-p+1$. ■

§2.2　主要结论及证明

下面给出本章的主要定理.

定理 2.2.1. 设 $D=(X,Y)$ 是一个二部有向图, 其中 $|X|=a$, $|Y|=a+k$, $a\ge 2$, $k\ge 3$. 若 D 满足条件 A_k^*, 则 D 中包含一个长为 $2a$ 的有向圈.

证明: 首先给出证明中频繁使用的几个断言.

断言 1. 若 s 是偶数且 $p_sp_1\in A(D)$, 则 $(P_Y,R_X)=\emptyset$, $(R_Y,P_X)=\emptyset$. 若 s 是奇数且 $p_sp_2\in A(D)$, 则 $(P_Y\backslash\{p_1\},R_X)=\emptyset$, $(R_Y\backslash R',P_X)=\emptyset$.

断言 1 的证明与引理 2.1.2 (c) 的证明类似, 此处不再给出证明过程.

断言 2. 设 $d^+_{V(C)}(p_s)=0$. 当 s 是偶数且存在一个顶点 $x\in C_X$ 使得 $d^-_{V(P)}(x)=0$ 时, $R_X=\emptyset$ 且 $p_sp_1\in A(D)$; 当 s 是奇数且存在一个顶点 $x\in C_X$ 使得 $d^-_{V(P)\backslash\{p_1\}}(x)=0$ 时, $R_X=\emptyset$ 且 $p_sp_2\in A(D)$.

断言 2 的证明: 我们仅证 s 为偶数的情况, 当 s 为奇数时证明类似. 根据断言 2 的假设 $p_s\nrightarrow x$, 因此

$$\begin{aligned}a+k\le d^+(p_s)+d^-(x)&=d^+_{V(P)}(p_s)+d^-_{V(C)}(x)+d^-_R(x)\\&\le p+m+r+k=a+k,\end{aligned}$$

当所有不等式取等号时上式成立, 因此 $d^+(p_s)=d^+_{V(P)}(p_s)=p$, $d^-(x)=m+r+k$. 由此可知, $p_sp_1\in A(D)$, $R_Y\to x$. 若 $R_X\ne\emptyset$, 令 $u\in R_X$, 注意到 $x^-u\notin A(D)$, 否则 $uM(u)$ 能嵌入 C 中得到比 C 更长的 M 交错圈. 由断言 1, 有 $(P_Y,u)=\emptyset$, 特别地, $p_s\nrightarrow u$, 因

此

$$\begin{aligned} a+k &\le d^+(p_s)+d^-(u) = d^+_{V(P)}(p_s)+d^-_{V(C)}(u)+d^-_R(u) \\ &\le p+m-1+r+k = a+k-1, \end{aligned}$$

这是矛盾的! 因此 $R_X=\emptyset$ 且 $p_sp_1\in A(D)$. 断言 2 证明完毕. □

断言 3. 设 $d^-_{V(C)}(p_2)=0$. 当 s 是奇数且存在一个顶点 $y\in C_Y$ 使得 $d^+_{V(P)}(y)=0$ 时, $R_X=\emptyset$.

断言 3 的证明: 根据断言 3 的假设 $y\nrightarrow p_2$, 因此

$$\begin{aligned} a+k &\le d^+(y)+d^-(p_2) = d^+_{V(C)}(y)+d^+_R(y)+d^-_{R'}(p_2)+d^-_{V(P)}(p_2) \\ &\le m+r+k-1+p+1 = a+k, \end{aligned}$$

当所有不等式取等号时上式成立, 因此 $d^+(y)=m+r$ 且 $d^-(p_2)=p+k$. 由此可知, $p_sp_2\in A(D)$, $y\to R_X$. 若 $R_X\neq\emptyset$, 令 $u\in R_X$. 由断言 1, 有 $(M(u),P_X)=\emptyset$, 特别地, $M(u)\nrightarrow p_2$. 注意到 $M(u)y^+\notin A(D)$, 否则 $yuM(u)y^+Cy$ 是一条比 C 更长的 M 交错圈, 这与 C 的极大性矛盾! 因此

$$\begin{aligned} a+k &\le d^+(M(u))+d^-(p_2) = d^+_R(M(u))+d^+_{V(C)}(M(u))+d^-_{R'}(p_2)+d^-_{V(P)}(p_2) \\ &\le r+m-1+k-1+p+1 = a+k-1, \end{aligned}$$

这是矛盾的! 因此 $R_X=\emptyset$. 断言 3 证明完毕. □

下面我们根据 s 的奇偶性分为两种情形来讨论.

情形 1. s 是偶数.

子情形 1.1. $d^+_{V(C)}(p_s)>0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_1)>0$.

因为 $d^+_{V(C)}(p_s)>0$, $d^-_{V(C)}(p_1)>0$, 所以在 $V(C)$ 中存在两个顶点 x_{j_0}, y_{i_0}, 使得 $y_{i_0}p_1\in A(D)$, $p_sx_{j_0}\in A(D)$. 不失一般性, 可以假设 $j_0=1$, $i_0=m-l$. 令 $C'=C[x_{m-l+1},y_m]$, $C''=C[y_1,x_{m-l}]$. 从而 $|V(C')|=2l$, $|V(C'')|=2(m-l-1)$. 显然 $l\ge p$, 否则 $p_sx_1Cy_{m-l}p_1Pp_s$ 是一条比 C 更长的 M 交错圈, 这与 C 的极大性矛盾! 不失一般性, 可设对于所有的 $y_v\in V(C')$ 有 $y_vp_1\notin A(D)$; 对于所有的 $x_v\in V(C')$ 有 $p_sx_v\notin A(D)$.

由引理 2.1.5 可得 $d^+_{V(C)}(p_s)+d^-_{V(C)}(p_1)\le m-p+1$. 类似地, 可以推出 $d^+_{V(C'')}(y_m)+d^-_{V(C'')}(x_{m-l+1})\le m-p-1$.

若 $p_sp_1 \notin A(D)$, 则

$$a+k \le d^+(p_s)+d^-(p_1)=(d^+_{V(P)}(p_s)+d^-_{V(P)}(p_1))+(d^+_{V(C)}(p_s)+d^-_{V(C)}(p_1))$$
$$\le 2(p-1)+(m-p+1)=m+p-1<a,$$

这是矛盾的!

因此, $p_sp_1 \in A(D)$, 从而 $p_1Pp_sp_1$ 是一个圈.

下面我们证明 $R_X=\emptyset$. 若 $R_X \neq \emptyset$, 令 P' 是 R 中最长的 M 交错路. 记 $P'=p'_1p'_2\cdots p'_t$. 类似于引理 2.1.2, 不失一般性, 可以设 $p'_t \in R_Y$. 当 t 是偶数时, 令 $v=1$; 当 t 是奇数时, 令 $v=2$; 从而 $p'_v \in R_X$. 因为 P 是 $D-V(C)$ 中最长的 M 交错路, 所以 $d^-_{V(P)}(p'_v)=d^+_{V(P)}(p'_t)=0$. 由 C 的极大性可得, 对于 $V(C)$ 中的任意对顶点 y_i, x_{i+1}, $y_ip'_v$ 与 p'_tx_{i+1} 中至多只有一条弧属于 $A(D)$, 从而 $d^+_{V(C)}(p'_t)+d^-_{V(C)}(p'_v)\le m$. 故

$$d^+(p'_t)+d^-(p'_v)=(d^+_{V(C)}(p'_t)+d^-_{V(C)}(p'_v))+(d^+_R(p'_t)+d^-_R(p'_v))\le m+2r+k.$$

进一步有

$$2(a+k)\le d^+(p'_t)+d^-(p_1)+d^+(p_s)+d^-(p'_v)=(d^+(p'_t)+d^-(p'_v))+(d^+(p_s)+d^-(p_1))$$
$$\le (m+2r+k)+(m-p+1)+2p=2m+2r+p+k+1$$
$$=2m+2r+2p+k+1-p=2a+k+1-p\le 2a+k,$$

这是矛盾的! 因此 $R=\emptyset$, 从而 $r=0$ 且 $a=m+p$.

由 x_1 和 y_{m-l} 的选择, 可知 $p_sx_{m-l+1}\notin A(D)$ 和 $y_mp_1\notin A(D)$. 又由圈 C 的极大性, 可得 $d^+_{V(P)}(y_m)=d^-_{V(P)}(x_{m-l+1})=0$. 因此

$$2(a+k)\le d^+(p_s)+d^-(x_{m-l+1})+d^+(y_m)+d^-(p_1)=(d^+(p_s)+d^-(p_1))+(d^+(y_m)+d^-(x_{m-l+1}))$$
$$\le (m-l+1+2p)+(m-l-1+2+2l+k)=2m+2p+k+2=2a+k+2,$$

这与 $k\ge 3$ 矛盾!

子情形 1.2. $d^+_{V(C)}(p_s)>0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_1)=0$.

因为 $d^+_{V(C)}(p_s)>0$, 所以在 $V(C)$ 中存在顶点 $x_i\in C_X$, 使得 $p_sx_i\in A(D)$. 根据圈 C 的极大性, 可以得出 $d^+_{V(P)}(y_{i-1})=0$. 特别地, $y_{i-1}p_1\notin A(D)$, 因此

$$a+k\le d^+(y_{i-1})+d^-(p_1)=(d^+_{V(C)}(y_{i-1})+d^+_R(y_{i-1}))+d^-_{V(P)}(p_1)$$
$$\le m+r+p=a,$$

这与 $k \geq 3$ 矛盾!

子情形 1.3. $d^+_{V(C)}(p_s) = 0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_1) = 0$.

若 $p_s p_1 \notin A(D)$, 则根据定理的假设有

$$\begin{aligned} a + k &\leq d^+(p_s) + d^-(p_1) = d^+_{V(P)}(p_s) + d^-_{V(P)}(p_1) \\ &\leq 2(p-1) = 2p - 2 \leq (a-1) - 2 = a - 3, \end{aligned}$$

这是矛盾的! 因此, $p_s p_1 \in A(D)$, 从而 $p_1 P p_s p_1$ 是一个圈. 根据断言 1, 对于任意的$z \in R_Y$, 有 $d^+_{V(P)}(z) = 0$. 特别地, $z p_1 \notin A(D)$, 因此

$$\begin{aligned} a + k \leq d^+(z) + d^-(p_1) &= d^+_{V(C)}(z) + d^+_R(z) + d^-_{V(P)}(p_1) \\ &\leq m + r + p = a, \end{aligned}$$

这与 $k \geq 3$ 矛盾!

子情形 1.4. $d^+_{V(C)}(p_s) = 0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_1) > 0$.

因为 $d^-_{V(C)}(p_1) > 0$, 所以在 $V(C)$ 中存在顶点 $y_i \in V(C)$, 使得 $y_i p_1 \in A(D)$. 由圈 C 的极大性可以得出 $d^-_{V(P)}(x_{i+1}) = 0$. 根据断言 2, 可知 $R_X = \emptyset$ 和 $p_s p_1 \in A(D)$. 若存在顶点 $p_j \in P_Y$ 使得 $d^+_{V(C)}(p_j) > 0$, 则类似于子情形 1.1 和子情形 1.2, 可以得出矛盾. 因此下面假设对于所有的 $p_j \in P_Y$, 有 $d^+_{V(C)}(p_j) = 0$. 由此可知对于所有的 $x_t \in C_X$ 都有 $d^-_{V(P)}(x_t) = 0$. 因为 $p_s \nrightarrow x_t$, 有

$$\begin{aligned} a + k \leq d^+(p_s) + d^-(x_t) &= d^+_{V(P)}(p_s) + d^-_{V(C)}(x_t) + d^-_{R'}(x_t) \\ &\leq p + m + k = a + k, \end{aligned}$$

当所有不等式取等号时上式成立, 因此 $d^-_{R'}(x_t) = k$, 即 $R' \to x_t$. 对任意的 $z \in R'$, $V(C)$ 中的每对顶点 x_t, y_t, $x_t z$ 与 $p_1 y_t$ 中至多只有一条弧属于 $A(D)$, 从而 $d^+_{V(C)}(p_1) + d^-_{V(C)}(z) \leq m$, 否则 D 中存在一个新的匹配 $M' = M \cup \{p_1 y_t\} \cup \{x_t z\} \backslash \{p_1 p_2\} \cup \{x_t y_t\}$, 使得 $x_t z x_{t+1} C x_t$ 是一条与 C 长度相等的 M' 交错圈. $p_2 P p_s p_1 y_t$ 是一条比 P 更长的 M' 交错路, 这与 C 和 P 的选择矛盾! 由断言 1, 有$(P_X, z) = \emptyset$, 特别地, $p_1 z \notin A(D)$. 因此

$$a + k \leq d^+(p_1) + d^-(z) = d^+_{V(P)}(p_1) + d^-_{V(C)}(z) + d^+_{V(C)}(p_1) \leq p + m = a,$$

这与 $k \geq 3$ 矛盾!

情形 2. s 是奇数.

子情形 2.1. $d^+_{V(C)}(p_s) > 0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_2) > 0$.

因为 $d^+_{V(C)}(p_s) > 0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_2) > 0$, 所以在 $V(C)$ 中存在两个顶点 x_{j_0}, y_{i_0}, 使得 $y_{i_0}p_2 \in A(D)$, $p_s x_{j_0} \in A(D)$. 不失一般性, 可以假设 $j_0 = 1$, $i_0 = m - l$. 令 $C' = C[x_{m-l+1}, y_m]$, $C'' = C[y_1, x_{m-l}]$. 从而 $|V(C')| = 2l$, $|V(C'')| = 2(m-l-1)$. 显然 $l \geq p$, 否则 $p_s x_1 C y_{m-l} p_1 P p_s$ 是一条比 C 更长的 M 交错圈, 这与 C 的极大性矛盾! 不失一般性, 可设对于所有的 $y_v \in V(C')$ 有 $y_v p_2 \notin A(D)$; 对于所有的 $x_v \in V(C')$ 有 $p_s x_v \notin A(D)$.

由引理 2.1.5 可得 $d^+_{V(C)}(p_s) + d^-_{V(C)}(p_2) \leq m - p + 1$. 类似地, 可以推出 $d^+_{V(C'')}(y_m) + d^-_{V(C'')}(x_{m-l+1}) \leq m - p - 1$.

若 $p_s p_2 \notin A(D)$, 则

$$\begin{aligned}a + k \leq d^+(p_s) + d^-(p_2) &= (d^+_{V(P)}(p_s) + d^-_{V(P)}(p_2)) + (d^+_{V(C)}(p_s) + d^-_{V(C)}(p_2)) + d^-_R(p_2)\\ &\leq (2p-1) + (m-p+1) + k - 1 = p + m + k - 1 \leq a + k - 1,\end{aligned}$$

这是矛盾的! 因此 $p_s p_2 \in A(D)$.

下面我们证明 $R_X = \emptyset$. 若 $R_X \neq \emptyset$, 令 P' 是 R 中最长的 M 交错路. 记 $P' = p'_1 p'_2 \cdots p'_t$. 类似于引理 2.1.2, 不失一般性, 可以设 $p'_t \in R_Y$. 当 t 是偶数时, 令 $v = 1$; 当 t 是奇数时, 令 $v = 2$; 从而 $p'_v \in R_X$. 因为 P 是 $D - V(C)$ 中最长的 M 交错路, 所以 $d^-_{V(P)}(p'_v) = d^+_{V(P)}(p'_t) = 0$. 由 C 的极大性可得, 对于 $V(C)$ 中的任意对顶点 y_i, x_{i+1}, $y_i p'_v$ 与 $p'_t x_{i+1}$ 中至多只有一条弧属于 $A(D)$, 从而 $d^+_{V(C)}(p'_t) + d^-_{V(C)}(p'_v) \leq m$. 故

$$\begin{aligned}d^+(p'_t) + d^-(p'_v) &= (d^+_{V(C)}(p'_t) + d^-_{V(C)}(p'_v)) + (d^+_R(p'_t) + d^-_R(p'_v)) + (d^+_{V(P)}(p'_t) + d^-_{V(P)}(p'_v))\\ &\leq m + (2r + k - 1) + 1 = m + 2r + k.\end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned}2(a+k) &\leq d^+(p'_t) + d^-(p_2) + d^+(p_s) + d^-(p'_v)\\ &= (d^+(p'_t) + d^-(p'_v)) + (d^+(p_s) + d^-(p_2))\\ &\leq (m + 2r + k) + (m - p + 1) + 2p + 1 + k - 1\\ &= 2m + p + 2k + 2r + 1\\ &= 2a + 2k - p + 1.\end{aligned}$$

当 $p \leq 1$ 时, 上式中所有不等式取等号时上式成立. 根据 p 的选择, $p \geq 1$, 因此 $p = 1$. 根据上式还可得 $d^+_R(p'_t) + d^-_R(p'_v) = 2r + k - 1$, $d^-_{R'}(p_2) = d^-_{R'}(p'_2) = k - 1$, 前者可推出

$t=3, v=2, r=1, p_3'p_2' \in A(D)$. 后者可推出 $R' \to \{p_2', p_2\}$. 由此可得 $d^+_{R'}(p_2')=0$, 否则存在顶点 $z \in R'$ 使 $p_2'z \in A(D)$, 从而 $p_2'zp_2p_3$ 是一条比 P 更长的交错路, 这与 P 的极大性矛盾! 同理可得 $d^+_{R'}(p_2)=0$.

下面我们根据四个顶点 p_2, p_3', p_2', p_3 的控制关系进行分类讨论.

(a) $p_2p_3' \notin A(D)$ 且 $p_2'p_3 \notin A(D)$, 有

$$\begin{aligned}
2(a+k) &\le d^+(p_2)+d^-(p_3')+d^+(p_2')+d^-(p_3)\\
&= d^+_{V(C)}(p_2)+d^-_{V(C)}(p_3')+d^+_{V(P)}(p_2)+d^+_R(p_2)+d^-_{V(P)}(p_3')+d^-_R(p_3')\\
&+ d^+_{V(P)}(p_2')+d^+_R(p_2')+d^-_{V(P)}(p_3)+d^-_R(p_3)\\
&\le 2m+2+0+0+1+1+1+1+0\\
&= 2m+6=2a+2,
\end{aligned}$$

这是矛盾的!

(b) $p_2p_3' \in A(D)$ 且 $p_2'p_3 \in A(D)$, 从而存在 $p_1'p_2'p_3p_2p_3'$ 是一条比 P 更长的交错路, 注意到该路是与另一个匹配 $M' = M \cup \{p_2p_3'\} \cup \{p_2'p_3\} \backslash \{p_2p_3\} \cup \{p_2'p_3'\}$ 交错的, 这与 P 的极大性矛盾!

(c) $p_2p_3' \in A(D)$ 且 $p_2'p_3 \notin A(D)$ 或者 $p_2p_3' \notin A(D)$ 且 $p_2'p_3 \in A(D)$. 不失一般性, 假设 $p_2p_3' \in A(D)$ 且 $p_2'p_3 \notin A(D)$, 有

$$a+k \le d^+(p_2')+d^-(p_3) = (d^+_{V(C)}(p_2')+d^-_{V(C)}(p_3))+1+2.$$

经计算, $d^+_{V(C)}(p_2')+d^-_{V(C)}(p_3) \ge a+k-3 \ge a=m+2$. 故 $V(C)$ 中存在两个顶点 x_t, y_t, 使得 $x_tp_3 \in A(D)$, $p_2'y_t \in A(D)$, 从而 $x_tp_3p_2p_3'p_2'y_tCx_t$ 是一条长为 $2a$ 的交错圈, 这与 C 的极大性矛盾!

因此 $R_X=\emptyset$.

下面证明 $p_1x_{m-l+1} \notin A(D)$. 假设 $p_1x_{m-l+1} \in A(D)$, 有 $d^-_{V(P)}(p_1)=0$, 否则在 P 中存在顶点 $p_i \in P_X$ 使 $p_ip_1 \in A(D)$, 从而 $p_1x_{m-l+1}Cy_{m-l}p_2Pp_ip_1$ 是一条比 C 更长的交错圈, 注意到该圈是与另一个匹配 $M' = M \cup \{p_ip_1\} \backslash \{p_ip_{i+1}\}$ 交错的, 这与 C 的极大性矛盾! 特别地, $p_{s-1}p_1 \notin A(D)$. 因此

$$\begin{aligned}
a+k \le d^+(p_{s-1})+d^-(p_1) &= d^+_{V(C)}(p_{s-1})+d^-_{V(C)}(p_1)+d^+_{V(P)}(p_{s-1})+d^+_{R'}(p_{s-1})\\
&\le m+p+k-1=a+k-1,
\end{aligned}$$

这是矛盾的! 因此 $p_1x_{m-l+1} \notin A(D)$. 类似地, 可以证明 $N^-_{R'}(p_2) \cap N^-_{R'}(x_{m-l+1})=\emptyset$, 从

而 $d^-_{R'}(p_2)+d^-_{R'}(x_{m-l+1})\le k-1$. 因此

$$\begin{aligned}2(a+k)&\le d^+(p_s)+d^-(x_{m-l+1})+d^+(y_m)+d^-(p_2)\\&=(d^+(p_s)+d^-(p_2))+(d^+(y_m)+d^-(x_{m-l+1}))\\&\le(m-l+1+2p+1+d^-_{R'}(p_2))+(m-l+1+2l+d^-_{R'}(x_{m-l+1}))\\&\le 2m+2p+3+k-1=2a+k+2,\end{aligned}$$

这是矛盾的!

子情形 2.2. $d^+_{V(C)}(p_s)>0$ 且 $d^-_{V(C)}(p_2)=0$.

因为 $d^+_{V(C)}(p_s)>0$, 所以在 $V(C)$ 中存在顶点 x_i, 使得 $p_sx_i\in A(D)$. 由 C 的极大性可得 $d^+_{V(P)}(y_{i-1})=0$. 特别地, $y_{i-1}p_2\notin A(D)$. 根据断言 3 可知 $R_X=\emptyset$, $d^-_{V(P)}(p_2)=p+1$, $d^-_R(p_2)=k-1$, $d^+(y_{i-1})=d^+_{V(C)}(y_{i-1})=m$. 进一步根据 C 的极大性与 $\{p_1\}\cup R_Y\to p_2$, 可得 $d^+_R(x_{i-1})=0$, $d^+_{V(P)}(x_{i-1})\le 1$. 因此, 对任意的 $z\in\{p_1\}\cup R_Y$, 有

$$a+k\le d^+(x_{i-1})+d^-(z)\le(m+1)+p+d^-_{V(C)}(z),$$

经计算, $d^-_{V(C)}(z)\ge k-1\ge 2$. 因此存在顶点 $x_j\in C_X\backslash\{x_i\}$, 使得 $x_j\to p_1$. 不失一般性, 假设 $i=1$, $j=m-l$. 令 $C'=C[y_{m-l},y_m]$, $C''=C[y_1,y_{m-l-1}]$. 从而 $|V(C')|=2l+1$, $|V(C'')|=2(m-l)-3$. 显然 $m\ge l+2$, $l\ge p$. 不失一般性, 可设对于所有的 $x_v\in V(C')$ 有 $x_vp_1\notin A(D), p_sx_v\notin A(D)$. 若 $p_1x_{m-l+1}\in A(D)$, 则可以考虑圈 $\overline{C}=x_{m-l}p_1x_{m-l+1}Cx_{m-l}$ 与路 $\overline{P}=zp_2Pp_s$. 圈 $\overline{C}$ 是长为 $2m$ 的 M' 交错圈, 路 $\overline{P}$ 是长为 $s-1$ 的 M' 交错圈, 其中 $M'=M\cup\{x_{m-l}p_1\}\backslash\{x_{m-l}y_{m-l}\}$. 注意到 $d^-_{V(\overline{C})}(p_2)>0$ 和 $d^+_{V(\overline{C})}(p_s)>0$. 类似于子情形 2.1, 可得矛盾. 因此, $p_1x_{m-l+1}\notin A(D)$ 且 $d^-_{V(P)}(x_{m-l+1})=0$. 因为 $d^+_{V(C)}(y_m)=m$, 所以 $d^-_{V(C'')}(x_{m-l+1})=0$, 否则 $x_{m-l+1}Cy_m$ 可以被嵌入到 C'' 中, 这与 C 的极大性矛盾! 对任意的 $x_j\in V(C'')\cup\{x_{m-l}\}$, 若 $p_sx_j\in A(D)$, 则由 C 的极大性可得 $d^+_{V(P)}(y_{j-1})=0$. 特别地, $y_{j-1}p_2\notin A(D)$, 有

$$a+k\le d^+(y_{j-1})+d^-(p_2)\le m+p+1+k-1=a+k,$$

当所有不等式取等号时上式成立, 因此可得 $d^+(y_{j-1})=d^+_{V(C)}(y_{j-1})=m$. 特别地, $y_{j-1}x_{m-l+1}\in A(D)$, 这与 $d^-_{V(C'')}(x_{m-l+1})=0$ 矛盾! 故 $d^+_{V(C)}(p_s)=1$. 因此

$$\begin{aligned}a+k&\le d^+(p_s)+d^-(x_{m-l+1})\le p+1+l+1+k-1\\&=p+l+1+k\le p+m-2+1+k=a+k-1,\end{aligned}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/166242103122010223