

## 四川省什邡中学 2023-2024 学年高三下学期期中（文理）数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知随机变量  $X$  的分布列如下表：

$X$	-1	0	1
$P$	$a$	$b$	$c$

其中  $a, b, c > 0$ . 若  $X$  的方差  $D(X) \leq \frac{1}{3}$  对所有  $a \in (0, 1-b)$  都成立，则 ( )

- A.  $b \leq \frac{1}{3}$                   B.  $b \leq \frac{2}{3}$                   C.  $b \geq \frac{1}{3}$                   D.  $b \geq \frac{2}{3}$

2. 在  $\triangle ABC$  中， $D$  为  $AC$  的中点， $E$  为  $AB$  上靠近点  $B$  的三等分点，且  $BD, CE$  相交于点  $P$ ，则  $\vec{AP} =$  ( )

- A.  $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$                   B.  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$   
 C.  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$                   D.  $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

3. 若  $x, a, b$  均为任意实数，且  $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 1$ ，则  $(x-a)^2 + (\ln x - b)^2$  的最小值为 ( )

- A.  $3\sqrt{2}$                   B. 18                  C.  $3\sqrt{2} - 1$                   D.  $19 - 6\sqrt{2}$

4. 数列  $\{a_n\}$  满足：  $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$ ，  $a_1 = 1$ ，  $a_2 = 2$ ，  $S_n$  为其前  $n$  项和，则  $S_{2019} =$  ( )

- A. 0                  B. 1                  C. 3                  D. 4

5. 下列函数中，既是奇函数，又在  $(0, 1)$  上是增函数的是 ( )。

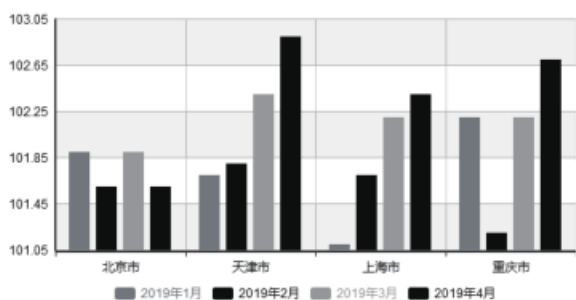
- A.  $f(x) = x \ln x$                   B.  $f(x) = e^x - e^{-x}$   
 C.  $f(x) = \sin 2x$                   D.  $f(x) = x^3 - x$

6. 设  $f(x) = \sqrt{x}$ ，点  $O(0, 0)$ ，  $A(0, 1)$ ，  $A_n(n, f(n))$ ，  $n \in \mathbb{N}^*$ ，设  $\angle AOA_n = \theta_n$  对一切  $n \in \mathbb{N}^*$  都有不等式

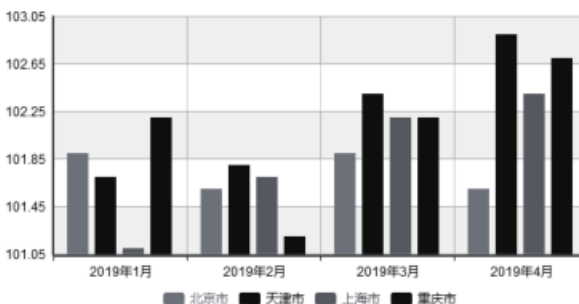
$\frac{\sin^2 \theta_1}{1^2} + \frac{\sin^2 \theta_2}{2^2} + \frac{\sin^2 \theta_3}{3^2} + \dots + \frac{\sin^2 \theta_n}{n^2} < t^2 - 2t - 2$  成立，则正整数  $t$  的最小值为 ( )

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

7. 以下两个图表是 2019 年初的 4 个月我国四大城市的居民消费价格指数（上一年同月 = 100）变化图表，则以下说法错误的是（ ）



图表一



图表二

（注：图表一每个城市的条形图从左到右依次是 1、2、3、4 月份；图表二每个月份的条形图从左到右四个城市依次是北京、天津、上海、重庆）

- A. 3 月份四个城市之间的居民消费价格指数与其它月份相比增长幅度较为平均  
 B. 4 月份仅有三个城市居民消费价格指数超过 102  
 C. 四个月的数据显示北京市的居民消费价格指数增长幅度波动较小  
 D. 仅有天津市从年初开始居民消费价格指数的增长呈上升趋势

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的方程  $f[f(x)] = 0$  有且只有一个实数根，则实数  $a$  的取值范围是（ ）

- A.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$                       B.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$   
 C.  $(-\infty, 0)$                               D.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. 已知集合  $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，若集合  $A = \{a_1, a_2\} \subseteq M$ ，且对任意的  $b \in M$ ，存在  $\lambda, \mu \in \{-1, 0, 1\}$  使得  $b = \lambda a_i + \mu a_j$ ，其中  $a_i, a_j \in A$ ， $1 \leq i \leq j \leq 2$ ，则称集合  $A$  为集合  $M$  的基底. 下列集合中能作为集合

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的基底的是（ ）

- A.  $\{1, 5\}$                       B.  $\{3, 5\}$                       C.  $\{2, 3\}$                       D.  $\{2, 4\}$

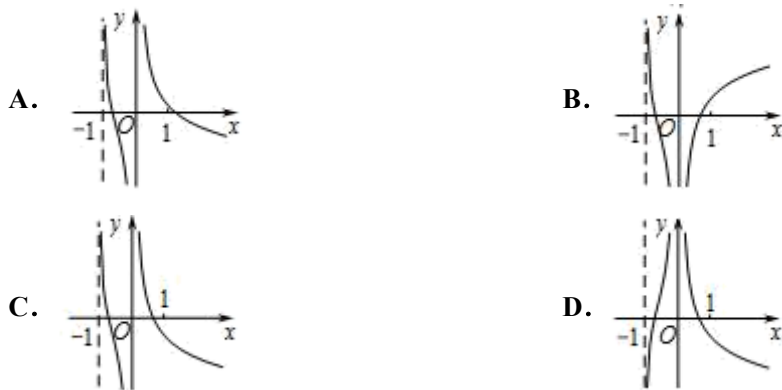
10. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_4 = 5, S_9 = 81$ ，则  $a_{10} =$ （ ）

- A. 23                              B. 25                              C. 28                              D. 29

11. 集合  $A = \{x | x > 2, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$ ，则  $A \cap B =$ （ ）

- A.  $(3, +\infty)$       B.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$       C.  $(2, +\infty)$       D.  $(2, 3)$

12. 函数  $y = \frac{1}{x} - \ln(x+1)$  的图象大致为( )

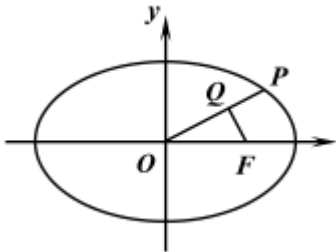


二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = 4$ ， $AA_1 = 2\sqrt{3}$ . 若  $M$  是侧面  $BCC_1B_1$  内的动点，且  $AM \perp MC$ ，则  $A_1M$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正切值的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 如图，椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $e$ ， $F$  是  $\Gamma$  的右焦点，点  $P$  是  $\Gamma$  上第一象限内任意一点，

$\vec{OQ} = \lambda \vec{OP} (\lambda > 0)$ ， $\vec{FQ} \cdot \vec{OP} = 0$ ，若  $\lambda < e$ ，则  $e$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



15. 已知向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (x, 1)$ ， $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ， $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ，且  $\vec{u} \perp \vec{v}$ ，则实数  $x$  的值是\_\_\_\_\_.

16. 某部队在训练之余，由同一场地训练的甲、乙、丙三队各出三人，组成  $3 \times 3$  小方阵开展游戏，则来自同一队的战士既不在同一行，也不在同一列的概率为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某百货商店今年春节期间举行促销活动，规定消费达到一定标准的顾客可进行一次抽奖活动，随着抽奖活动的有效开展，参与抽奖活动的人数越来越多，该商店经理对春节前 7 天参加抽奖活动的人数进行统计， $y$  表示第  $x$  天参加抽奖活动的人数，得到统计表格如下：

$x$	1	2	3	4	5	6	7
$y$	5	8	8	10	14	15	17

(1) 经过进一步统计分析, 发现  $y$  与  $x$  具有线性相关关系. 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ;

(2) 该商店规定: 若抽中“一等奖”, 可领取 600 元购物券; 抽中“二等奖”可领取 300 元购物券; 抽中“谢谢惠顾”, 则没有购物券. 已知一次抽奖活动获得“一等奖”的概率为  $\frac{1}{6}$ , 获得“二等奖”的概率为  $\frac{1}{3}$ . 现有张、王两位先生参与了本次活动, 且他们是否中奖相互独立, 求此二人所获购物券总金额  $X$  的分布列及数学期望.

参考公式:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 364$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$ .

18. (12分) 已知  $\{a_n\}$  是递增的等差数列,  $a_2, a_4$  是方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的根.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  的前  $n$  项和.

19. (12分) 某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏, 每次由一个小孩与其一位家长参与, 测试家长对小孩饮食习惯的了解程度. 在每一轮游戏中, 主持人给出  $A, B, C, D$  四种食物, 要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序, 然后由家长猜测小孩的排序结果. 设小孩对四种食物排除的序号依次为  $x_A x_B x_C x_D$ , 家长猜测的序号依次为  $y_A y_B y_C y_D$ , 其中  $x_A x_B x_C x_D$  和  $y_A y_B y_C y_D$  都是 1, 2, 3, 4 四个数字的一种排列. 定义随机变量  $X = (x_A - y_A)^2 + (x_B - y_B)^2 + (x_C - y_C)^2 + (x_D - y_D)^2$ , 用  $X$  来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度.

(1) 若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解.

(i) 求他们在一轮游戏中, 对四种食物排出的序号完全不同的概率;

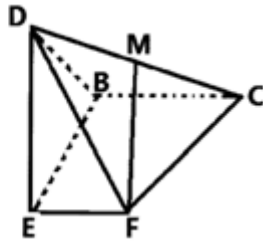
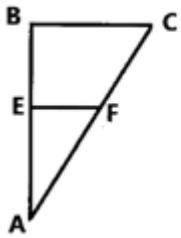
(ii) 求  $X$  的分布列 (简要说明方法, 不用写出详细计算过程);

(2) 若有一组小孩和家长进行来三轮游戏, 三轮的结果都满足  $X < 4$ , 请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解, 说明理由.

20. (12分) 如图在直角  $\triangle ABC$  中,  $B$  为直角,  $AB = 2BC$ ,  $E, F$  分别为  $AB, AC$  的中点, 将  $\triangle AEF$  沿  $EF$  折起, 使点  $A$  到达点  $D$  的位置, 连接  $BD, CD$ ,  $M$  为  $CD$  的中点.

(I) 证明:  $MF \perp$  面  $BCD$ ;

(II) 若  $DE \perp BE$ , 求二面角  $E - MF - C$  的余弦值.



21. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 的边长分别为 $a, b, c$ , 且 $c=2$ .

(1) 若 $A = \frac{\pi}{3}$ ,  $b=3$ , 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $\sin A \cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cos^2 \frac{A}{2} = 3 \sin C$ , 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{25}{2} \sin C$ , 求 $a$ 和 $b$ 的值.

22. (10分)  $a, b, c$ 分别为 $\triangle ABC$ 内角 $A, B, C$ 的对边. 已知 $a=3$ ,  $c \sin C = a \sin A + b \sin B$ , 且 $B=60^\circ$ .

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $D, E$ 是 $BC$ 边上的三等分点, 求 $\sin \angle DAE$ .

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据 $X$ 的分布列列式求出期望, 方差, 再利用 $a+b+c=1$ 将方差变形为 $D(X) = -4\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 + 1-b$ , 从而可以利用二

次函数的性质求出其最大值为 $1-b \leq \frac{1}{3}$ , 进而得出结论.

【详解】

由 $X$ 的分布列可得 $X$ 的期望为 $E(X) = -a+c$ ,

又 $a+b+c=1$ ,

所以 $X$ 的方差 $D(X) = (-1+a-c)^2 a + (a-c)^2 b + (1+a-c)^2 c$

$= (a-c)^2 (a+b+c) - 2(a-c)^2 + a+c$

$$\begin{aligned}
&= -(a-c)^2 + a + c \\
&= -(2a-1+b)^2 + 1-b \\
&= -4\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 + 1-b,
\end{aligned}$$

因为  $a \in (0, 1-b)$ , 所以当且仅当  $a = \frac{1-b}{2}$  时,  $D(X)$  取最大值  $1-b$ ,

又  $D(X) \leq \frac{1}{3}$  对所有  $a \in (0, 1-b)$  成立,

所以  $1-b \leq \frac{1}{3}$ , 解得  $b \geq \frac{2}{3}$ ,

故选:D.

**【点睛】**

本题综合考查了随机变量的期望、方差的求法, 结合了概率、二次函数等相关知识, 需要学生具备一定的计算能力, 属于中档题.

2、B

**【解析】**

设  $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ , 则  $\vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}$ ,  $\vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC}$ ,

由  $B, P, D$  三点共线,  $C, P, E$  三点共线, 可知  $x + 2y = 1$ ,  $\frac{3x}{2} + y = 1$ , 解得  $x, y$  即可得出结果.

**【详解】**

设  $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ , 则  $\vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}$ ,  $\vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC}$ ,

因为  $B, P, D$  三点共线,  $C, P, E$  三点共线,

所以  $x + 2y = 1$ ,  $\frac{3x}{2} + y = 1$ , 所以  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{4}$ .

故选:B.

**【点睛】**

本题考查了平面向量基本定理和向量共线定理的简单应用, 属于基础题.

3、D

**【解析】**

该题可以看做是圆上的动点到曲线  $y = \ln x$  上的动点的距离的平方的最小值问题, 可以转化为圆心到曲线  $y = \ln x$  上的动点的距离减去半径的平方的最值问题, 结合图形, 可以断定那个点应该满足与圆心的连线与曲线在该点的切线垂直

的问题来解决，从而求得切点坐标，即满足条件的点，代入求得结果.





**【详解】**

由题意可得，其结果应为曲线  $y = \ln x$  上的点与以  $C(-2, 3)$  为圆心，以 1 为半径的圆上的点的距离的平方的最小值，可以求曲线  $y = \ln x$  上的点与圆心  $C(-2, 3)$  的距离的最小值，在曲线  $y = \ln x$  上取一点  $M(m, \ln m)$ ，曲线有  $y = \ln x$  在点  $M$  处的切线的斜率为  $k' = \frac{1}{m}$ ，从而有  $k_{CM} \cdot k' = -1$ ，即  $\frac{\ln m - 3}{m + 2} \cdot \frac{1}{m} = -1$ ，整理得  $\ln m + m^2 + 2m - 3 = 0$ ，解得  $m = 1$ ，所以点  $(1, 0)$  满足条件，其到圆心  $C(-2, 3)$  的距离为  $d = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$ ，故其结果为  $(3\sqrt{2} - 1)^2 = 19 - 6\sqrt{2}$ ，

故选 D.

**【点睛】**

本题考查函数在一点处切线斜率的应用，考查圆的程，两条直线垂直的斜率关系，属中档题.

4、D

**【解析】**

用  $n+1$  去换  $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$  中的  $n$ ，得  $a_{n+3} + a_{n+1} = a_{n+2}$ ，相加即可找到数列  $\{a_n\}$  的周期，再利用  $S_{2019} = 336S_6 + a_1 + a_2 + a_3$  计算.

**【详解】**

由已知， $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$  ①，所以  $a_{n+3} + a_{n+1} = a_{n+2}$  ②，①+②，得  $a_{n+3} = -a_n$ ，

从而  $a_{n+6} = a_n$ ，数列是以 6 为周期的周期数列，且前 6 项分别为 1, 2, 1, -1, -2, -1，所以  $S_6 = 0$ ，

$S_{2019} = 336(a_1 + a_2 + \dots + a_6) + a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 2 + 1 = 4$ 。

故选：D.

**【点睛】**

本题考查周期数列的应用，在求  $S_{2019}$  时，先算出一个周期的和即  $S_6$ ，再将  $S_{2019}$  表示成  $336S_6 + a_1 + a_2 + a_3$  即可，本题是一道中档题.

5、B

**【解析】**

奇函数满足定义域关于原点对称且  $f(x) + f(-x) = 0$ ，在  $(0, 1)$  上  $f'(x) \geq 0$  即可.

**【详解】**

A: 因为  $f(x) = x \ln x$  定义域为  $x > 0$ ，所以不可能为奇函数，错误；

B:  $f(x) = e^x - e^{-x}$  定义域关于原点对称, 且  $f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^x = 0$

满足奇函数, 又  $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$ , 所以在  $(0,1)$  上  $f'(x) \geq 0$ , 正确;

C:  $f(x) = \sin 2x$  定义域关于原点对称, 且  $f(x) + f(-x) = \sin 2x + \sin -2x = 0$

满足奇函数,  $f'(x) = 2 \cos 2x$ , 在  $(0,1)$  上, 因为  $f'(0)f'(1) = 2 \times 2 \cos 2 < 0$ , 所以在  $(0,1)$  上不是增函数, 错误;

D:  $f(x) = x^3 - x$  定义域关于原点对称, 且  $f(x) + f(-x) = x^3 - x + (-x^3 + x) = 0$ ,

满足奇函数,  $f'(x) = 3x^2 - 1$  在  $(0,1)$  上很明显存在变号零点, 所以在  $(0,1)$  上不是增函数, 错误;

故选: B

### 【点睛】

此题考查判断函数奇偶性和单调性, 注意奇偶性的前提定义域关于原点对称, 属于简单题目.

6、A

### 【解析】

先求得  $\frac{\sin^2 \theta_n}{n^2} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , 再求得左边的范围, 只需  $t^2 - 2t - 2 \geq 1$ , 利用单调性解得  $t$  的范围.

### 【详解】

由题意知  $\sin \theta_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$ ,  $\therefore \frac{\sin^2 \theta_n}{n^2} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,

$\therefore \frac{\sin^2 \theta_1}{1^2} + \frac{\sin^2 \theta_2}{2^2} + \frac{\sin^2 \theta_3}{3^2} + \dots + \frac{\sin^2 \theta_n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ , 随  $n$  的增大而增大,  $\therefore$

$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ ,

$\therefore t^2 - 2t - 2 \geq 1$ , 即  $t^2 - 2t - 1 \geq 0$ , 又  $f(t) = t^2 - 2t - 1$  在  $t \geq 1$  上单增,  $f(2) = -1 < 0$ ,  $f(3) = 2 > 0$ ,

$\therefore$  正整数  $t$  的最小值为 3.

### 【点睛】

本题考查了数列的通项及求和问题, 考查了数列的单调性及不等式的解法, 考查了转化思想, 属于中档题.

7、D

### 【解析】

采用逐一验证法, 根据图表, 可得结果.

### 【详解】

A 正确, 从图表二可知,

3 月份四个城市的居民消费价格指数相差不大

B 正确，从图表二可知，

4 月份只有北京市居民消费价格指数低于 102

C 正确，从图表一中可知，

只有北京市 4 个月的居民消费价格指数相差不大

D 错误，从图表一可知

上海市也是从年初开始居民消费价格指数的增长呈上升趋势

故选：D

**【点睛】**

本题考查图表的认识，审清题意，细心观察，属基础题.

8、B

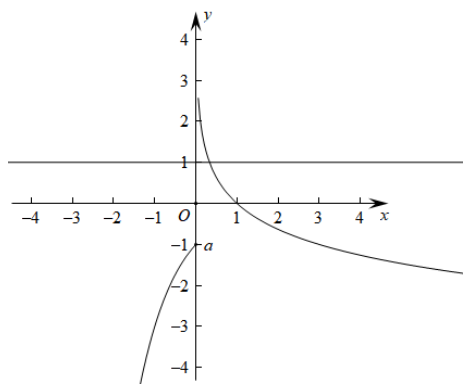
**【解析】**

利用换元法设  $t = f(x)$ ，则等价于  $f(t) = 0$  有且只有一个实数根，分  $a < 0, a = 0, a > 0$  三种情况进行讨论，结合函数的图象，求出  $a$  的取值范围.

**【详解】**

解：设  $t = f(x)$ ，则  $f(t) = 0$  有且只有一个实数根.

当  $a < 0$  时，当  $x \leq 0$  时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$ ，由  $f(t) = 0$  即  $\log_{\frac{1}{3}} t = 0$ ，解得  $t = 1$ ，



结合图象可知，此时当  $t = 1$  时，得  $f(x) = 1$ ，则  $x = \frac{1}{3}$  是唯一解，满足题意；

当  $a = 0$  时，此时当  $x \leq 0$  时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ ，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当  $a > 0$  时，当  $x \leq 0$  时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \in [a, +\infty)$ ，此时  $f(x)$  最小值为  $a$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/167044002023010003>