变量间的相关关系

●**三维目标**

1．知识与技能

通过收集现实问题中两个有关联变量的数据，认识变量间的相关关系．

2．过程与方法

明确事物间的相互联系．认识现实生活中变量间除了存在确定的关系外，仍存在大量的非确定性的相关关系，并利用散点图直观体会这种相关关系．

3．情感、态度与价值观

通过对事物之间相关关系的了解，　让学生们认识到现实中任何事物都是相互联系的辩证法思想．

●**重点难点**

重点：(1)通过收集现实问题中两个有关联变量的数据直观认识变量间的相关关系；

(2)利用散点图直观认识两个变量之间的线性关系．

难点：(1)变量之间相关关系的理解；

(2)作散点图和理解两个变量的正相关和负相关．

从现实生活入手，抓住学生们的注意力，引导学生分析得出概念，让学生真正参与到概念的形成过程中来．通过对典型事例的分析，　向学生们介绍什么是散点图，并总结出如何从散点图上判断变量之间关系的规律．通过实验让学生们感受散点图的主要形成过程，并由此引出线性相关关系强化本节重点．

通过学生讨论、交流，用 *TI*

图形计算器展示、对比自己作出的散点图，得出线性相关关系、正负相关关系的概念．教师及时将求线性方程的公式展示出来，通过例题的讲解和训练，进一步加深对散点图和回归方程的理解，突破难点．

教学方案设计 设教案 流程细解 导“学案” 教案设计区↓

●**教学建议**

结合本节课的教学内容和学生的认知水平，充分发挥教师的主导作用，让学生真正成为教学活动的主体．通过多媒体辅助教学，充分调动学生参与课堂教学的主动性与积极性．

本节课宜采用探究式课堂教学模式，即在教学过程中，在教师的启发引导下，以学生独立自主和合作交流为前提，以“散点图”为基本探究内容，以周围世界和生活实际为参照对象，为学生提供充分自由表达、质疑、探究、讨论问题的机会，让学生通过个人、小组、集体等多种解难释疑的尝试活动，通过例题和变式训练进一步巩固本节知识，将自己所学知识应用于对现实生活的深入探讨．让学生在“活动”中学习，在“主动”中发展，在“合作”中增知，在“探究”中创新．

●**教学流程**

创设问题情境引入问题：人体内脂肪的含量与年龄之间有何关系？⇒

引导学生结合必修一中函数图象的画法将对应点在坐标系中描出，观察比较，分析这些点的特征⇒

通过引导学生回答所提问题理解相关关系与散点图的概念进一步探究这些点的特征给出求 $\hat{b}$，$\hat{a}$ 的公式⇒

通过例1及变式训练使学生进一步理解和掌握线性相关的应用，及散点图与线性相关的关系

⇒通过例 2 及其变式训练，使学生掌握线性回归方程的求法⇒研究现实生活中的实际问题，应用本节知识完成例 3 及变式能够对总体进行估计⇒

归纳整理，进行课堂小结，整体把握本节知识⇒完成当堂双基达标，巩固所掌握的知识，并进行反馈矫正

课前自主导学　理教材　自查自测　固“基础”　自主学习区

课标解读	1.理解两个变量的相关关系的概念．(难点) 2．会作散点图，并利用散点图判断两个变量之间是否具有相关关系．(重点) 3．会求回归直线方程．(重点) 4．相关关系与函数关系．(易混点)

知识1　变量间的相关关系

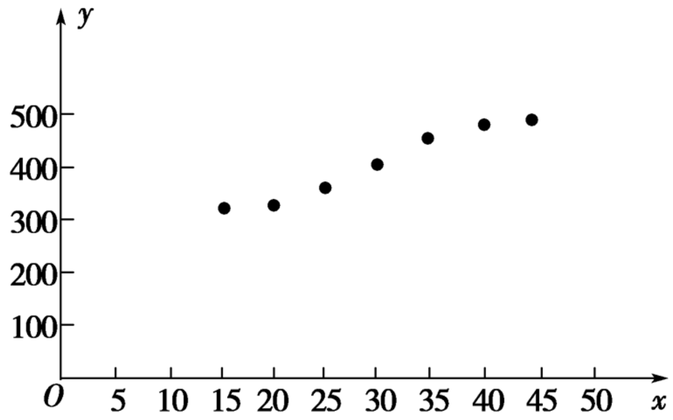
【问题导思】

下表是水稻产量与施化肥量的一组观测数据：

施化肥量	15	20	25	30	35	40	45
水稻产量	320	330	360	410	460	470	480

1.将上述数据制成散点图．

【提示】　散点图如下：



2．施化肥量与水稻产量有关系吗？

【提示】　有关系．

1．相关关系：不像匀速直线运动中时间与路程的关系那样是完全确定的，而是带有不确定性．

2．散点图：将样本中几个数据点$(x_i，y_i)(i=1,2，\cdots，n)$描在平面直角坐标系中得到的图形．

3．正相关与负相关：散点图中的点散布在从左下角到右上角的区域，对于两个变量的这种相关关系，称它为正相关．若散点图中的点分布在从左上角到右下角的区域内，对于两个变量的这种相关关系，称它为负相关．

知识2　回归直线方程

【问题导思】

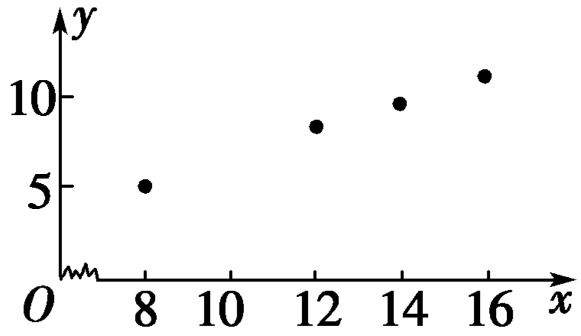
一台机器由于使用时间较长，生产的零件有一些会有缺陷．按不同转速生产出有缺陷的零件的统计数据如下：

转速 x(转/秒)	16	14	12	8
每小时生产有缺	11	9	8	5

陷的零件数 y(件)				

1.在平面直角坐标系中作出散点图.

【提示】



2．从散点图中判断 x 和 y 之间是否具有相关关系？

【提示】　有.

3．若转速为 10 转/秒，能否预测机器每小时生产缺陷的零件件数？

【提示】　可以．根据散点图作出一条直线，求出直线方程后可预测.

1．回归直线：如果散点图中点的分布从整体上看大致在一条直线附近，就称这两个变量之间具有线性相关关系，这条直线叫做回归直线.

2．回归方程：回归直线对应的方程叫回归直线的方程，简称回归方程.

3．最小二乘法

求回归直线时，使得样本数据的点到回归直线的距离的平方和最小的方法叫做最小二乘法.

4．求回归方程

若两个具有线性相关关系的变量的一组数据为：$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_n，y_n)$，则所求的回归方程为

$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 为待定的参数，由最小二乘法得：

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.\end{cases}$$

$\hat{b}$ 是回归直线斜率，$\hat{a}$ 是回归直线在 y 轴上的截距．

课堂互动探究

破疑难　师生互动　提“知能”

合作探究区↓

类型1	线性相关关系的判断

例1 以下是在某地搜集到的不同楼盘新房屋的销售价格 y(单位：万元)和房屋面积 x(单位：m^2)的数据：

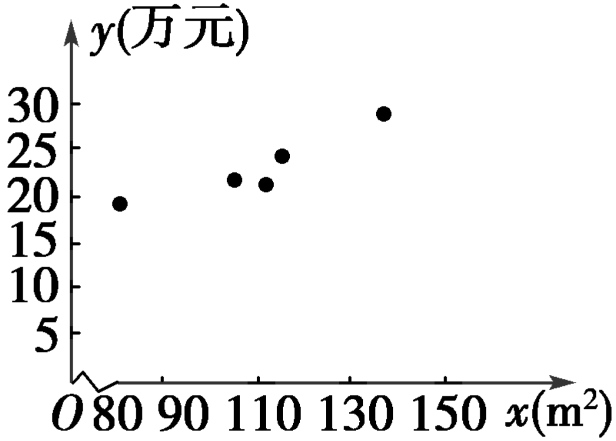
房屋面积 $x(m^2)$	115	110	80	135	105
销售价格 y(万元)					22

(1)画出数据对应的散点图；

(2)判断新房屋的销售价格和房屋面积之间是否具有相关关系？如果有相关关系，是正相关还是负相关？

【思路探究】 涉及两个变量房屋面积与销售价格，以房屋面积为自变量，考察销售价格的变化趋势从而做出判断.

【自主解答】 (1)数据对应的散点图如图所示：



(2)通过以上数据对应的散点图可以判断，新房屋的销售价格和房屋的面积之间具有相关关系，且是正相关.

规律方法

两个随机变量 x 和 y 相关关系的确定方法：

1．散点图法：通过散点图，观察它们的分布是否存在一定规律，直观地判断.

2．表格、关系式法：结合表格或关系式进行判断.

3．经验法：借助积累的经验进行分析判断.

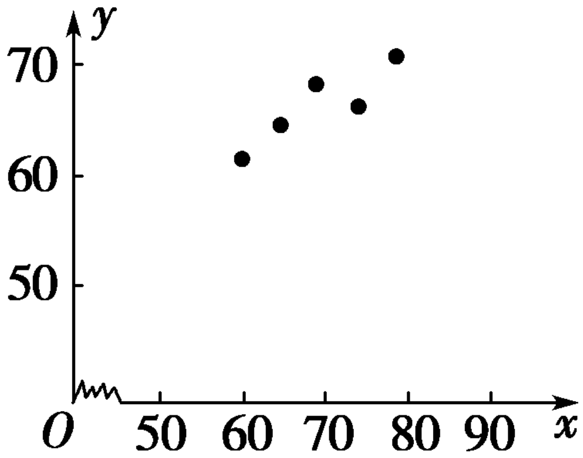
变式训练

5 个学生的数学和物理成绩如下表：

学生 成绩 学科	A	B	C	D	E
数学	80	75	70	65	60
物理	70	66	68	64	62

画出散点图，并判断它们是否具有线性相关关系.

【解】 以 x 轴表示数学成绩，y 轴表示物理成绩，可得相应的散点图如图所示，由散点图可知，两者之间具有线性相关关系，且是正相关.



类型2	求回归直线方程

例2 一个车间为了规定工时定额，需要确定加工零件所花费的时间，为此进行了 10 次试验，收集数据如下：

零件数 x(个)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
加工时间 y(分)	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122

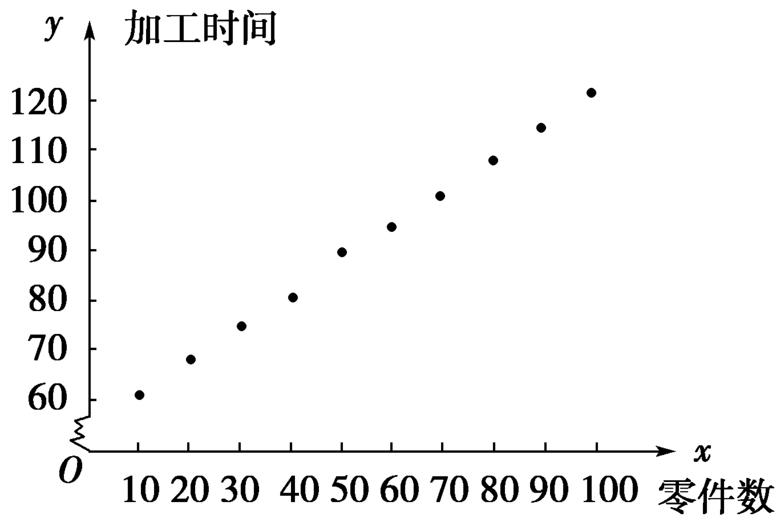
(1)y 与 x 是否具有线性相关关系？

(2)如果 y 与 x 具有线性相关关系，求 y 关于 x 的回归直线方程.

【思路探究】 画散点图→确定相关关系→

求回归直线系数→写回归直线方程

【自主解答】 (1)画散点图如下：



由上图可知 y 与 x 具有线性相关关系.

(2)列表、计算：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y_i	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122
x_iy_i	620	160	250	340	4450	500	740	8 40	1050	12200

$\bar{x}=55$，$\bar{y}=$，

$\sum\limits_{i=1}^{10}=x_i^2=38\,500$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=87\,777$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=55\,950$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\frac{55\,950-10\times55\times}{38\,500-10\times55^2}\approx,$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=-\times55=.$$

即所求的回归直线方程为：$\hat{y}=+$.

规律方法

用公式求回归方程的一般步骤：

1．列表 x_i，y_i，x_iy_i；

2．计算$\bar{x}$,$\bar{y}$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$；

3．代入公式计算 $\hat{b}$ 、 $\hat{a}$ 的值；

4．写出回归方程．

变式训练

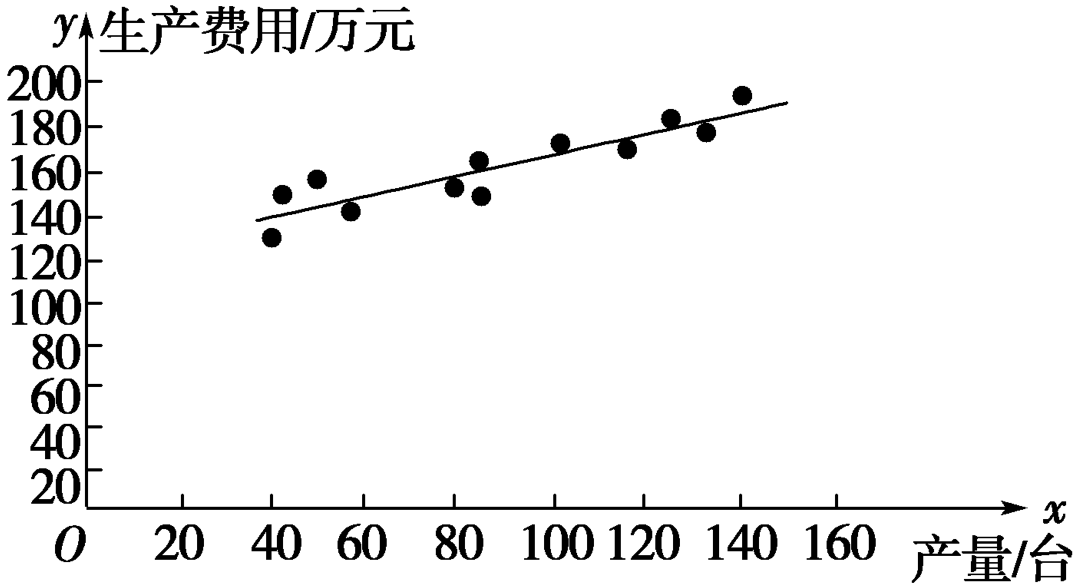
从某一行业随机抽取 12 家企业，它们的生产产量与生产费用的数据如下表：

企业编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
产量 x/台	40	42	50	55	85	78	84	100	116	125	130	140
费用 y/万元	130	150	155	140	150	154	165	170	167	180	175	185

(1)绘制生产产量 x 和生产费用 y 的散点图；

(2)如果两个变量之间是线性相关关系，请用最小二乘法求出其回归直线方程．

【解】 (1)两个变量 x 和 y 之间的关系的散点图如图所示．



(2)根据散点图可知，两个变量 x 和 y 之间的关系是线性相关关系．下面用最小二乘法求回归直线方程．

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合计
x_i	40	42	50	55	85	78	84	100	116	125	130	140	1 045
y_i	130	150	155	140	150	154	165	170	167	180	175	185	1 921
x_iy_i	5200	6300	7750	7700	12750	12012	13860	17000	19372	22500	22750	25900	173094
x_i^2	1600	1764	2500	325	7225	6084	7056	10000	13456	15625	16900	19600	104835
$\bar{x}\approx$，$\bar{y}\approx$，$n\bar{x}\,\bar{y}=167$ ，$n\bar{x}^2\approx 90\quad 8$													

设所求的回归直线方程是 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n\bar{x}^2}$

$=\dfrac{173\ 094-167}{104\ 835-90\ \ 8}$

$=\dfrac{5}{13\ \ 2}\approx$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=-\times\approx$.

所求的回归直线方程是 $\hat{y}=+$.

类型3	利用回归方程对总体进行估计

例3 (12 分)下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x(吨)与相应的生产能耗 y(吨标准煤)的几组对照数据：

x	3	4	5	6
y		3	4	

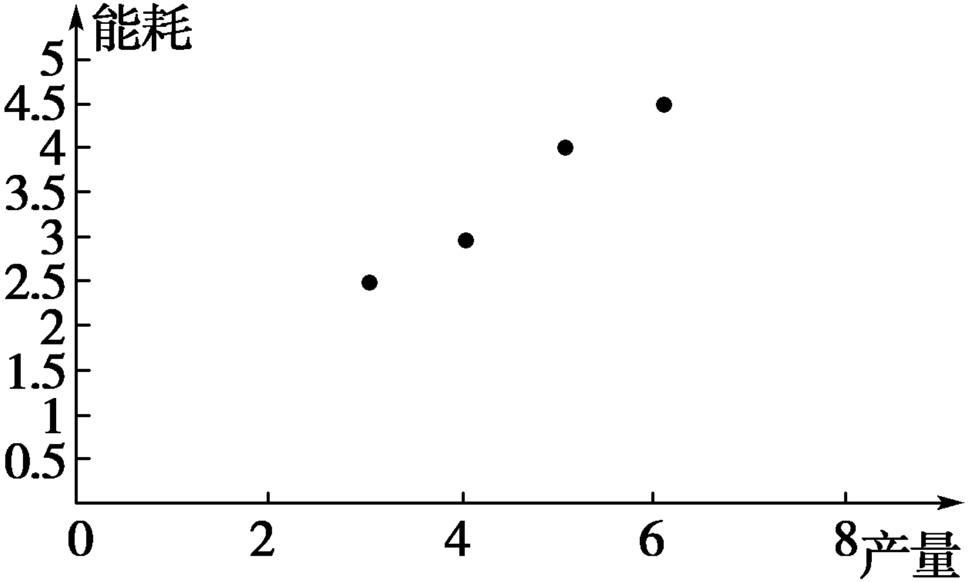
(1)请画出上表数据的散点图；

(2)请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ ；

(3)已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤．试根据(2)求出的线性回归方程，预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤？

【思路探究】　(1)以产量为横坐标，以生产能耗对应的测量值为纵坐标，在平面直角坐标系内画散点图; (2)应用计算公式求得线性相关系数 $\hat{b}$ ，$\hat{a}$ 的值；(3)实际上就是求当 $x=100$ 时，对应的 y 的值.

【自主解答】　(1)散点图，如图所示.



(2)由题意，得 $\sum_{i=1}^{4} x_iy_i=3\times+4\times3+5\times4+6\times=$，

$\bar{x}=\frac{3+4+5+6}{4}=$，

$\bar{y}=$Error!$=$，

$\sum_{i=1}^{4} x_i^2=3^2+4^2+5^2+6^2=86$,

$\therefore \hat{b}=\quad$=Error!=,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=-\times=$,

故线性回归方程为 $\hat{y}=+$.

(3)根据回归方程的预测，现在生产 100 吨产品消耗的标准煤为×100+=(吨)，

故耗能减少了 90－=(吨标准煤).

规律方法

1．回归分析是寻找相关关系中非确定性关系的某种确定性．

2．只有当两个变量之间存在线性相关关系时，才能用回归直线方程对总体进行估计和预测．否则，如果两个变量之间不存在线性相关关系，即使由样本数据求出回归直线方程，用其估计和预测结果也是不可信的．

变式训练

炼钢是一个氧化降碳的过程，钢水含碳量的多少直接影响冶炼时间的长短，必须掌握钢水含碳量和冶炼时间的关系．如果已测得炉料熔化完毕时，钢水含碳量 x 与冶炼时间 y(从炉料熔化完毕到出钢的时间)的几种对应数据如下表所示：

x%)	104	180	190	177	147	134	150	191	204	121