

第4讲 一元二次不等式及其解法



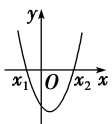
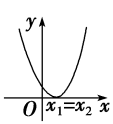
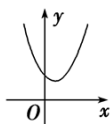
01

走进教材 · 自主回顾

1. 一元一次不等式 $ax > b (a \neq 0)$ 的解集

- (1) 当 $a > 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x > \frac{b}{a}\right\}$.
- (2) 当 $a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{b}{a}\right\}$.

2. 三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的 图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个相异实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x x>x_2$ 或 $x<x_1\}$	$\left\{x\left x\neq-\frac{b}{2a}\right.\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x x_1<x<x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

常用结论

1. 分式不等式的解法

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 (< 0) \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0 (< 0).$$

$$(2) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 (\leq 0) \\ g(x) \neq 0 \end{cases},$$

2. 两个恒成立的充要条件

$$(1) \text{一元二次不等式 } ax^2+bx+c>0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$$

$$(2) \text{一元二次不等式 } ax^2+bx+c<0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$$

02

考点探究 · 题型突破



考点1 一元二次不等式的解法

[名师点睛]

(1) 解一元二次不等式的方法和步骤

- 化 → 把不等式变形为二次项系数大于零的标准形式
- 判 → 计算对应方程的判别式
- 求 → 求出对应的一元二次方程的根, 或根据判别式说明方程有没有实根
- 写 → 利用“大于取两边, 小于取中间”写出不等式的解集

(2)解含参数的一元二次不等式的步骤

①二次项若含有参数应讨论参数是等于0，小于0，还是大于0，然后将不等式转化为一次不等式或二次项系数为正的一元二次不等式；

②判断一元二次不等式所对应的方程实根的个数，即讨论判别式 Δ 与0的关系；

③确定方程无实根或有两个相同实根时，可直接写出解集；确定方程有两个相异实根时，要讨论两实根的大小关系，从而确定解集。

[典例]

1. (2021·湖南·衡阳市田家炳实验中学高一阶段练习) 不等式 $2x^2 - x - 1 < 0$ 解集为 ()

- A. $\{x|1 < x < 2\}$ B. $\{x|-2 < x < 1\}$ C. $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < 1\}$ D. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$

【答案】D

【解析】 $\because 2x^2 - x - 1 < 0, \therefore -\frac{1}{2} < x < 1, \therefore$ 不等式 $2x^2 - x - 1 < 0$ 解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$.

故选：D.

2. (2021·四川省叙永第一中学校高三阶段练习) 解下列关于 x 的不等式：

(1) $\frac{2}{x-1} \leq 3$;

(2) $ax^2 + (2a-1)x - 2 < 0$ ($a < 0$).

【解】(1)由 $\frac{2}{x-1} \leq 3$, 得 $\frac{2}{x-1} - 3 \leq 0$, 即 $\frac{5-3x}{x-1} \leq 0$

则 $(5-3x)(x-1) \leq 0$ 且 $x \neq 1$, 解得: $(-\infty, 1) \cup [\frac{5}{3}, +\infty)$

(2)当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式 $\Leftrightarrow (-\frac{1}{2}x-1)(x+2) < 0$, 解的 $\{x|x \neq -2\}$;

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式 $\Leftrightarrow (ax-1)(x+2) < 0$, 又 $\frac{1}{a} > -2$ 所以解集为 $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$;

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 因为 $\frac{1}{a} < -2$ 所以解集为 $(-\infty, \frac{1}{a}) \cup (-2, +\infty)$.

综上有, $a = -\frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\{x|x \neq -2\}$;

$a < -\frac{1}{2}$ 时, 解集为 $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$;

$-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 解集为 $(-\infty, \frac{1}{a}) \cup (-2, +\infty)$.

[举一反三]

1. (2022·浙江宁波·二模) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-1, 3]$ B. $[1, 3)$ C. $(-1, 5]$ D. $(3, 5]$

【答案】B

【解析】由题意, $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$,

故 $A \cap B = \{x | -1 < x < 3\} \cap \{x | 1 \leq x \leq 5\} = \{x | 1 \leq x < 3\}$,

故选: B

2. (2022·全国·模拟预测) 设集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-4}{x+2} > 0\right\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 10 \geq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$ ()

- A. $\{x | -2 < x < 2\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$
C. $\{x | x \leq 4 \text{ 或 } x \geq 5\}$ D. $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 5\}$

【答案】B

【解析】由不等式 $\frac{x-4}{x+2} > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 4$, 所以 $A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$,

又由不等式 $x^2 - 7x + 10 \geq 0$, 解得 $x \leq 2$ 或 $x \geq 5$, 所以 $B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 5\}$,

可得 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$,

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$.

故选: B.

3. (2021·福建省长汀县第一中学高三阶段练习) 解关于 x 的不等式:

$$(a+1)x^2 - (2a+3)x + 2 < 0 (a \geq -1).$$

【解】当 $a+1=0$ 即 $a=-1$ 时, 原不等式变为 $-x+2 < 0$, 即 $x > 2$.

当 $a > -1$ 时, 原不等式可转化为 $(x-2)\left(x - \frac{1}{a+1}\right) < 0$,

$\therefore$ 方程 $(x-2)\left(x - \frac{1}{a+1}\right) = 0$ 的根为 $\frac{1}{a+1}, 2$.

若 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{a+1} > 2$, 解得 $2 < x < \frac{1}{a+1}$;

若 $a = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{a+1} = 2$, 解得 $x \in \emptyset$;

若 $a > -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{a+1} < 2$, 解得 $\frac{1}{a+1} < x < 2$.

综上,

当 $a > -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | \frac{1}{a+1} < x < 2\}$;

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | 2 < x < \frac{1}{a+1}\}$.

当 $a = -1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > 2\}$.

4. (2021·广东·普宁市大长陇中学高三阶段练习) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - a + 2$.

(1) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - a + 2 > 0$ 的解集是 $\{x | -1 < x < 3\}$, 求实数 a, b 的值;

(2) 若 $b = 2, a > 0$, 解关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - a + 2 > 0$.

【解】(1) 由题意知, -1 和 3 是方程 $ax^2 + bx - a + 2 = 0$ 的两根,

$$\text{所以 } \begin{cases} -1+3 = -\frac{b}{a} \\ (-1) \times 3 = \frac{-a+2}{a} \end{cases}, \text{ 解得 } a = -1, b = 2;$$

(2) 当 $b = 2$ 时, 不等式 $ax^2 + bx - a + 2 > 0$ 为 $ax^2 + 2x - a + 2 > 0$,

即 $(ax - a + 2)(x + 1) > 0$, 所以 $\left(x - \frac{a-2}{a}\right)(x + 1) > 0$,

当 $\frac{a-2}{a} = -1$ 即 $a = 1$ 时, 解集为 $\{x | x \neq -1\}$;

当 $\frac{a-2}{a} < -1$ 即 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{a-2}{a} \text{ 或 } x > -1\right\}$;

当 $\frac{a-2}{a} > -1$ 即 $a > 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x > \frac{a-2}{a} \text{ 或 } x < -1\right\}$.



考点2 一元二次不等式恒成立问题

[名师点睛]

1. 一元二次不等式在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的条件

(1) 不等式 $ax^2+bx+c \geq 0$ 对任意实数 x 恒成立的条件是:

① 当 $a=0$ 时, $b=0, c \geq 0$;

② 当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

(2) 不等式 $ax^2+bx+c \leq 0$ 对任意实数 x 恒成立的条件是:

① 当 $a=0$ 时, $b=0, c \leq 0$;

② 当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

2. 一元二次不等式在给定区间上恒成立的求解方法

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$.

(1) 当 $a < 0$ 时, $f(x) < 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} < \alpha, & \text{或} & -\frac{b}{2a} > \beta, \\ f(\alpha) < 0 & & f(\beta) < 0 \end{cases}$ 或 $\Delta < 0$.

$f(x) > 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\beta) > 0, \\ f(\alpha) > 0. \end{cases}$

(2) 当 $a > 0$ 时,

$f(x) < 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\beta) < 0, \\ f(\alpha) < 0. \end{cases}$

$f(x) > 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} < \alpha, & \text{或} & -\frac{b}{2a} > \beta, \\ f(\alpha) > 0 & & f(\beta) > 0 \end{cases}$ 或 $\Delta < 0$.

3. 转换主元法解给定参数范围问题

解给定参数范围的不等式恒成立问题, 若在分离参数时会遇到讨论的情况, 或者即使能容易分离出参数与变量, 但函数的最值难以求出, 可考虑变换思维角度, 即把变量与参数交换位置, 构造以参数为变量的函数, 再根据原参数的范围列式求解.

[典例]

1. (2022·全国·高三专题练习) 不等式 $(a+1)x^2 - (a+1)x - 1 < 0$ 对一切实数 x 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

A. $1 < a < 5$

B. $-5 < a < -1$

C. $-5 < a \leq -1$

D. $-3 < a \leq -1$

【答案】C

【解析】当 $a+1=0$ ，即 $a=-1$ 时， $(a+1)x^2-(a+1)x-1<0$ 可化为 $-1<0$ ，即不等式 $-1<0$ 恒成立；

当 $a+1 \neq 0$ ，即 $a \neq -1$ 时，因为 $(a+1)x^2-(a+1)x-1<0$ 对一切实数 x 恒成立，

所以 $\begin{cases} a+1 < 0 \\ (a+1)^2 + 4(a+1) < 0 \end{cases}$ ，解得 $-5 < a < -1$ ；

综上所述， $-5 < a \leq -1$ 。

故选：C。

2. (2021·河北·石家庄市藁城区第一中学高三开学考试) 若关于 x 的不等式 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为()

A. $(0, +\infty)$

B. $[-1, +\infty)$

C. $[-1, 1]$

D. $[0, +\infty)$

【答案】B

【解析】解：当 $x=0$ 时，不等式 $1 \geq 0$ 恒成立；

当 $x > 0$ 时，由题意可得 $-2a \leq x + \frac{1}{x}$ 恒成立，

由 $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ ，当且仅当 $x=1$ 时，取得等号。

所以 $-2a \leq 2$ ，解得 $a \geq -1$ 。

综上可得， a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$ 。

故选：B。

3. (2022·全国·高三专题练习) 已知 $a \in [-1, 1]$ ，不等式 $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$ 恒成立，则 x 的取值范围为()

A. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

B. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

D. $(1, 3)$

【答案】C

【解析】解：令 $f(a) = (x-2)a + x^2 - 4x + 4$ ，

则不等式 $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$ 恒成立转化为 $f(a) > 0$ 在 $a \in [-1, 1]$ 上恒成立。

$$\therefore \text{有} \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -(x-2) + x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x-2 + x^2 - 4x + 4 > 0 \end{cases},$$

$$\text{整理得: } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases},$$

解得: $x < 1$ 或 $x > 3$.

$\therefore x$ 的取值范围为 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

故选: C.

[举一反三]

1. (2022·江苏南通·模拟预测) 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 不等式 $x^2 - 2x - 1 - a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2]$

B. $(-\infty, -2)$

C. $(-\infty, 0]$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】A

【解析】由题意, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 不等式 $x^2 - 2x - 1 - a \geq 0$ 恒成立, 故 $\Delta = (-2)^2 + 4(1+a) \leq 0$

解得 $a \leq -2$, 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$

故选: A

2. (2022·全国·高三专题练习) 已知 $a \in \mathbf{R}$, “ $ax^2 + 2ax - 1 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立”的一个充要条件是 ()

A. $-1 < a < 0$

B. $-1 < a \leq 0$

C. $-1 \leq a < 0$

D. $-1 \leq a \leq 0$

【答案】B

【解析】当 $a = 0$ 时, $ax^2 + 2ax - 1 = -1 < 0$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时, 若 $ax^2 + 2ax - 1 < 0$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$$\text{则必须有} \begin{cases} a < 0 \\ (2a)^2 - 4 \times (-1)a < 0 \end{cases}, \text{解之得 } -1 < a < 0,$$

综上, a 的取值范围为 $-1 < a \leq 0$.

故“ $ax^2 + 2ax - 1 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立”的一个充要条件是 $-1 < a \leq 0$,

故选: B

3. (2022·全国·高三专题练习) 若不等式 $(a-2)x^2 + 4(a-2)x + 3 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(2, \frac{11}{4}\right)$

B. $\left[2, \frac{11}{4}\right)$

C. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$

D. $(-\infty, 2] \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$

【答案】B

【解析】∵不等式 $(a-2)x^2 + 4(a-2)x + 3 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

当 $a-2=0$, 即 $a=2$ 时, 不等式为 $3>0$ 恒成立, 故 $a=2$ 符合题意;

当 $a-2 \neq 0$, 即 $a \neq 2$ 时, 不等式 $(a-2)x^2 + 4(a-2)x + 3 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

则 $\begin{cases} a-2 > 0 \\ \Delta = [4(a-2)]^2 - 4(a-2) \times 3 < 0 \end{cases}$, 解得 $2 < a < \frac{11}{4}$,

综合①②可得, 实数 a 的取值范围是 $\left[2, \frac{11}{4}\right)$.

故选: B.

4. (2022·全国·高三专题练习) 不等式 $ax^2 + 5x - 7a > 3 - 2x^2$ 对一切 $a \in (-1, 0)$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -4] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$

C. $(-4, -1)$

D. $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$

【答案】A

【解析】令 $f(a) = a(x^2 - 7) + 5x - 3 + 2x^2$, 对一切 $a \in (-1, 0)$ 均大于 0 恒成立,

所以 $\begin{cases} x^2 - 7 > 0 \\ f(-1) = -(x^2 - 7) + 5x - 3 + 2x^2 \geq 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x^2 - 7 < 0 \\ f(0) = 5x - 3 + 2x^2 \geq 0 \end{cases}$,

或 $\begin{cases} x^2 - 7 = 0 \\ 5x - 3 + 2x^2 \geq 0 \end{cases}$,

解得 $x \leq -4$ 或 $x > \sqrt{7}$, $\frac{1}{2} \leq x < \sqrt{7}$, 或 $x = \sqrt{7}$,

综上, 实数 x 的取值范围是 $x \leq -4$, 或 $x \geq \frac{1}{2}$.

故选: A.

5. (2022·全国·高三专题练习) 若对任意的 $x \in [-1, 0]$, $-2x^2 + 4x + 2 + m \geq 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $[4, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 4]$ D. $(-\infty, 2]$

【答案】A

【解析】解: 因为对任意的 $x \in [-1, 0]$, $-2x^2 + 4x + 2 + m \geq 0$ 恒成立,

所以对任意的 $x \in [-1, 0]$, $m \geq 2x^2 - 4x - 2$ 恒成立,

因为当 $x \in [-1, 0]$, $y = 2(x-1)^2 - 4 \in [-2, 4]$,

所以 $m \geq (2x^2 - 4x - 2)_{\max} = 4$, $x \in [-1, 0]$,

即 m 的取值范围是 $[4, +\infty)$

故选: A

6. (2021·江苏常州·高三阶段练习) 已知函数 $f(x) = x^2 - ax - 1$, 当 $x \in [0, 3]$ 时, $|f(x)| \leq 5$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $[1, 4]$

【解析】Q $|f(x)| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x^2 - ax - 1 \leq 5$,

①当 $x = 0$ 时, $a \in \mathbb{R}$;

②当 $x \neq 0$ 时, $|f(x)| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x^2 - ax - 1 \leq 5 \Leftrightarrow x - \frac{6}{x} \leq a \leq x + \frac{4}{x}$,

$$\therefore \left(x + \frac{4}{x}\right)_{\min} = 2 + \frac{4}{2} = 4, \quad \left(x - \frac{6}{x}\right)_{\max} = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4,$$

综上所述: $1 \leq a \leq 4$.

故答案为: $[1, 4]$.

7. (2022·浙江·高三专题练习) 若关于 x 的不等式 $\frac{10-x^3}{kx+2x^2-x^3} > 1$ 对任意的 $x \in (0, 2)$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围为_____.

【答案】 $[0, 1]$

【解析】由题意知: $kx + 2x^2 - x^3 > 0$, 即 $k > x^2 - 2x$ 对任意的 $x \in (0, 2)$ 恒成立, $\therefore k \geq 0$

当 $x \in (0, 2)$, $\frac{10-x^3}{kx+2x^2-x^3} > 1$ 得: $kx + 2x^2 - x^3 < 10 - x^3$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/167125003126010051>