
广义逆矩阵的求法探讨

the seeking of the dharma and research into generalized inverse matrix

专 业: 数学与应用数学

作 者:

指导老师:

学校

二〇一

摘 要

本文介绍了广义逆矩阵的定义，讨论了由 **Moore-Penrose** 方程所定义的各种广义逆的性质，在广义逆矩阵的初等变换法和满秩分解法的基础上，研究了几种特殊的广义逆矩阵的计算方法.

关键词: 广义逆矩阵；满秩分解；消元；初等变换法

Abstract

This article discusses the system of generalized Inverse matrices defined, discussed by the Moore-Penrose equation is defined by the nature of the various Generalized inverse, generalized inverse matrix elementary transformation and full rank decomposition, studied several particular generalized inverse matrix calculatio.

Keywords: Generalized inverse matrix; full rank decomposition; elimination; elementary transformation

目录

摘 要	I
Abstract	II
0 引言	1
1 广义逆矩阵的概念与定理	8
2 广义逆矩阵的计算方法	8
2.1 广义逆矩阵 A^+ 的奇异值分解法	8
2.2 广义逆矩阵 A^+ 的最大值秩分解法	9
2.2 极限法求广义逆矩阵 A^+	9
2.3 广义逆矩阵 A^- 的满秩分解法	11
2.4 初等变换法求广义逆矩阵	15
参考文献	21

0 引言

矩阵逆的概念只对非奇异方阵才有意义. 但是, 在实际问题中, 我们碰到的矩阵并不都是方阵, 即使是方阵, 也不都是非奇异的. 因此, 有必要推广逆矩阵的概念. 为此, 本文给出了广义逆矩阵的定义, 并利用广义逆的性质, 给出其计算方法.

1 广义逆矩阵的概念与定理

定义 1.1 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵, 若 $n \times m$ 的矩阵 G 满足如下四个 *Penrose* 方程的全部或者一部分, 则称 G 为 A 的广义逆矩阵, 简称广义逆.

$$AGA = A \quad (1.1)$$

$$GAG = G \quad (1.2)$$

$$(GA)^H = GA \quad (1.3)$$

$$(AG)^H = AG \quad (1.4)$$

则称 G 是 A 的 *Moore-Penrose* 逆, 记为 A^+ .

如果某个 G 只满足 (1.1) 式, G 为 A 的 $\{1\}$ 广义逆, 记为 $G \in A\{1\}$; 如果另一个 G' 满足 (1.1), (1.2) 式, 则称 G' 为 A 的 $\{1, 2\}$ 广义逆, 记为 $G' \in A\{1, 2\}$; 如果 $G \in A\{1, 2, 3, 4\}$, 则 G 是 *Moore-Penrose* 逆等. 下面介绍常用的 5 种

$$A\{1\}, A\{1, 2\}, A\{1, 3\}, A\{1, 4\}, A\{1, 2, 3, 4\}$$

每一种广义逆矩阵又都包含着一类矩阵, 分述如下:

- (1) $A\{1\}$ 中任意一个确定的广义逆, 称作减号广义逆, 或 g 逆, 记为 A^- ;
- (2) $A\{1, 2\}$ 中任意一个确定的广义逆, 称作自反减号逆, 记为 A_r^- ;
- (3) $A\{1, 3\}$ 中任意一个确定的广义逆, 称作最小范数广义逆, 记为 A_m^- ;
- (4) $A\{1, 4\}$ 中任意一个确定的广义逆, 称作最小二乘广义逆, 记为 A_l^- ;
- (5) $A\{1, 2, 3, 4\}$: 唯一一个, 称作加号逆, 或 *Moore-Penrose*, 记为 A^+ .

定义 1.2 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵 ($m \leq n$, 当 $m > n$ 时, 可以讨论 A^T), 若有一个 $n \times m$

的矩阵（记为 A^- ）存在，使下式成立，则称 A^- 为 A 的减号广义逆或者 g 逆：

$$AA^-A = A \quad (1.5)$$

当 A^- 存在时，显然 A^- 满足上式，可见减号广义逆 A^- 是普通广义逆矩阵 A^+ 的推广；

另外，由 $AA^-A = A$ 得

$$(AA^-A)^T = A^T, \text{ 即 } A^T(A^-)^T = A^T.$$

可见，当 A^- 为 A 的一个减号广义逆时， $(A^-)^T$ 就是 A^T 的一个减号广义逆。

定义 1.3 设 $A \in C_r^{m \times n}$ ， $A^H A$ 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$$

则称 $\delta_i = \sqrt{\lambda_i}$ ($i=1, 2, \dots, r$) 为矩阵 A 的正奇异值，简称奇异值。

定义 1.4 设 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

如果 $m \leq n$ 时存在 $\text{rank} A = m$ ；或者当 $m \geq n$ 时，存在有 $\text{rank} A = n$ ，称这两种长方形阵为最大秩方阵（满秩方阵），前者又称行最大秩矩阵（行满秩矩阵），后者又称为列最大秩矩阵（列满秩矩阵）。

定义 1.5 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，若有 $n \times m$ 矩阵 G 满足 $AG = I_m$ （或 $GA = I_n$ ），则称 G 为 A 的右逆（或左逆），记为 A_R^{-1} （或 A_L^{-1} ）。

定理 1.1 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则 A 的 Moore–Penrose 逆存在且唯一。

证明 先证 A^+ 的存在性。设 A 的奇异值分解

$$A = U \begin{pmatrix} \sum_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H$$

其中 $\sum_r = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ ， δ_i ($i=1, 2, \dots, r$) 是 A 的非零奇异值， U 与 V 是酉矩阵。

令

$$G = V \begin{pmatrix} \sum_{-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H$$

容易验证 G 满足四个 *Penrose* 方程, 因此 A^+ 存在.

下面证 A^+ 的唯一性. 假定 Y 也是满足 4 个 *Penrose* 方程, 则

$$\begin{aligned} G &= GAG = GG^H A^H = GGA^H Y^H A^H = GAGAY \\ &= GAY = GAYAY = A^H G^H A^H Y^H Y = A^H Y^H Y = YAY = Y \end{aligned}$$

因此 $G = Y$, 说明 A^+ 是唯一的, 且

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \sum_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H$$

若 A 是非奇异矩阵, 容易验证 A^{-1} 满足 4 个 *Penrose* 方程, 此时 $A^+ = A^{-1}$. 由此可见 *Moore-Penrose* 逆把逆推广到所有矩阵 (甚至零矩阵).

定理 1.2 设 $A \in C^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, 存在 m 阶的可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q , 使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $n \times m$ 阶矩阵 G 使得 $AGA = A$ 的充分必要条件是

$$G = Q \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} P$$

其中 G_{12}, G_{21}, G_{22} 分别是 $r \times (m-r), (n-r) \times r, (n-r) \times (m-r)$ 阶任意矩阵.

证明 先证必要性, 由条件有 m 阶及 n 阶可逆矩阵 P, Q , 使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

根据 G 应满足的 $AGA = A$, 有

$$P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} G P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} G P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再令

$$Q^{-1} G P^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

分块如题设要求，代入上式

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $G_{11} = E_r$ ，于是有

$$Q^{-1} G P^{-1} = \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

得到

$$G = Q \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} P$$

再证充分性，由于

$$G = Q \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} P, A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

则

$$\begin{aligned} A G A &= P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} P P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = A \end{aligned}$$

引理 1.1 对于任意的矩阵 A ，它的减号逆 A^- 总存在，但不唯一，并且

$$A^- = \begin{cases} A^T (A A^T)^{-1}, & \text{当 } \text{rank} A = m; \\ (A A^T)^{-1} A^T, & \text{当 } \text{rank} A = n; \\ C^T (C C^T)(D^T D)^{-1} D^T, & \text{当 } A = DC \text{ 是 } A \text{ 的满秩分解时;} \end{cases}$$

是 A 的一个减号逆 [1, 2]。

引理 1.2 对于任意的矩阵 A ，它的极小范数 A_m^- 总存在，但不唯一，并且

$$A_m^- = \begin{cases} (AA^T)^{-1}A^T, & \text{当 } \text{rank}A = m; \\ (AA^T)^-AA^T, & \text{在一般情况下;} \end{cases}$$

$$C_m^-D_l^- = \begin{cases} A^T(AA^T)^{-1}, & \text{当 } \text{rank}A = m; \\ A^T(AA^T)^-, & \text{在一般情况下;} \end{cases}$$

是 A 的一个极小范数逆 [1, 2]。

引理 1.3 对于任意矩阵 A , 它的最小二乘逆 A_l^- 总存在, 但不唯一, 并且

$$A_l^- = \begin{cases} (AA^T)^{-1}A^T, & \text{当 } \text{rank}A = m; \\ (AA^T)^-A^T, & \text{在一般情况下;} \end{cases}$$

它是 A 的一个最小二乘逆 [1, 2]。

引理 1.4 对于任意矩阵 A , 它的加号逆 A^+ 总存在, 并且唯一。其中

$$A^+ = A_m^-AA_l^- \text{ 或 } A^+ = C^T(CC^T)(D^TD)^{-1}D^T$$

这里 $A = DC$ 是 A 的满秩分解式 [1, 2, 3]。

定理 1.3 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 A 是行满秩矩阵, 则总有 $A^- = A_m^- = A^T(AA^T)^{-1}$; A 是列满秩矩阵, 则总有 $A^- = A_l^- = (AA^T)^-A^T$; $\text{rank} = r < \min(m, n)$, 则总有 $A^- = A^+ = C_m^-D_l^-$, 其中 $A = DC$ 是 A 的满秩分解式。

定理 1.4 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $\text{rank} = r \leq \min(m, n)$ 则可将 A 做满秩分解 (或 A 的最大秩分解)

$$A = CD$$

其中 C 是 $m \times r$ 阶矩阵, 且 $\text{rank}C = \text{rank}D = r$ 。

将一非列或非行满秩的非零矩阵表示为一列满秩和一行满秩的矩阵的积的分解称为满秩分解。在各种广义逆的直接计算方法中, 几乎都要对矩阵进行满秩分解, 例如 QU 分解等等。但当计算某些广义逆时, QU 分解将带来大量非必要的计算, 因而有必要对满秩分解的方法进行简化, 为此, 我们首先用构造性方法证明下述定理。

定理 1.5 对任意矩阵 $A \in C^{m \times n} (r > 0)$, 总存在着矩阵 $B \in C_r^{m \times r}$ 和矩阵 $C \in C_r^{r \times n}$, 使得 $A = BC$ 成立。

证明 设 $A=[a_1, a_2, \dots, a_n]$, 则必有一个最大线性无关列 $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}$, 故令

$$B=[a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}]$$

于是有非奇异矩阵 G , 使 $GB_1=\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$, 亦即有

$$B_1=G^{-1}\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

成立, 其中 O 为阶数适当的零矩阵, 再另置换矩阵

$$P=\prod_{k=1}^r I_{K_r j_k}$$

便有

$$GAP=\begin{bmatrix} I & M \\ O & O \end{bmatrix}, \quad M \in \mathbf{F}_r^{r \times (n-r)}$$

于是由 (1) 知

$$A=G^{-1}\begin{bmatrix} I & M \\ O & O \end{bmatrix}, \quad P=G^{-1}\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}[I \quad M] \quad P=B_1C_1 \quad (1.7)$$

其中 $C_1=[I \quad M]P$, 且显然有 $B_1 \in C_r^{m \times r}$, $C_1 \in C_r^{r \times n}$.

类似地可证存在着 $H \in C_n^{n \times r}$ 和 $Q=\prod_{k=1}^r I_{K_r j_k}$, 使有

$$QAH=\begin{bmatrix} I & O \\ N & O \end{bmatrix}, \quad N \in C^{(m-r) \times r}$$

成立, 倘令

$$B_2=Q\begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$C_2=[I \quad O]H^{-1} \quad (1.9)$$

同样有 $A=B_2C_2$.

特别, 若 A 为行满秩或者列满秩, 则 B 与 C 中之一为单位阵, 定理依然成立.

定理 1.6 对任何 $m \times n$ 的矩阵 A ，都有

$$AA^+ = (A^H A)(AA^H)^+ = (AA^H)^+(AA^H)$$

$$A^+ A = (A^H A)(A^H A)^+ = (A^H A)^+(A^H A)$$

性质 1.1 (1) $\text{rank}(A) = n$ 的充分必要条件是 $AA^- = E_n$ ，此时 $A^- = (A^H A)^{-1} A^H$ ，称为 A 的一个左逆，记为 A_L^{-1} 。

(2) $\text{rank}(A) = m$ 的充分必要条件是 $AA^- = E_m$ ，此时 $A^- = A^H (AA^H)^{-1}$ 称为 A 的一个右逆，记为 A_R^{-1} 。

证明 (1) 充分性，若 $AA^- = E_n$ 则

$$n = \text{rank}(E_n) \geq \text{rank}(A) \geq \text{rank}(A^- A) = n$$

所以 $\text{rank}(A) = n$

必要性，若 $\text{rank}(A) = n$ ，则存在 m 阶及 n 阶可逆矩阵 P, Q ，使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

由定理 1.2 可得 $A^- = Q \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} P$ ，则有

$$G = Q(E_n \quad G_{12})P$$

G 即 A^- ，于是有 $AA^- = E_n$

由于

$$\text{rank}(AA^H) = \text{rank}(A) = n$$

所以 $A^H A$ 是可逆阵，那么

$$(A^H A)^{-1} A^H A = E_n$$

所以，可取

$$A^- = A_L^{-1} = (A^H A)^{-1} A^H$$

(2) 同理可证性质 (2)， AA^H 可逆，有

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/168006112104006062>