河北省沧州市沧县中学2023-2024学年高三下学期模拟预测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $P=\left\{x\,\middle|\,|x+1|<2\right\}$，$Q=\left\{x\,\middle|\,x^2-(a+1)x+a<0\right\}$．若 $P\cup Q=P$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-3,1)$　　B．$[-3,1]$　　C．$(1,3]$　　D．$(-\infty,1)$

2．设 z_1，z_2 是复数，则下列命题中是假命题的是（　）

A．若 $z=z_1\cdot z_2$，则 $|z|=|z_1|\cdot|z_2|$　　B．若 $z=z_1\cdot z_2$，则 $\overline{z}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

C．若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1^2=z_2^2$　　D．若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$

3．已知 l，m 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，给出下列命题：

①若 $l\perp m$，$l//\alpha$，则 $m\perp\alpha$；

②若 $l\perp m$，$m\perp\alpha$，则 $l//\alpha$；

③若 $l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$l//m$，则 $\alpha//\beta$；

④若 $l\perp\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$．其中正确命题的序号是（　）

A．①③　　B．②③　　C．②④　　D．③④

4．从甲、乙、丙、丁4人中任选两人安排在“五·一”劳动节假期的前四天中值班，要求每人值班两天，则不同的安排方法有（　）

A．24种　　B．36种　　C．48种　　D．72种

5．已知函数 $f(x)$ 的定义域为R，$\forall a$，$b\in \mathrm{R}$，均满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)-ab$．若 $f(-1)=3$，则 $f(3)=$（　）

A．0　　B．-9　　C．-12　　D．-15

6．函数 $f(x)=(1+2\sin x)(1-2\cos x)$ 的最小值为（　）

A．-2　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$-\frac{5}{4}$　　D．-1

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x}, x\geq 0\\ x+2, x<0\end{cases}$，若 $a<b$，且 $f(a)=f(b)$，则 $b-a$ 的取值范围是（　）

A．$(\ln 2,1]$　　B．$(\ln 2,1)$　　C．$\left(\frac{1}{2}\ln 2,1\right]$　　D．$[1,2)$

8．已知 $f(x)=3-x^{2}-2\cos x$，设 $a=2^{-0.5}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}2$，则 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 的大小关系为（　）

A．$f(c)>f(a)>f(b)$　　B．$f(b)>f(a)>f(c)$

C．$f(b)>f(c)>f(a)$　　D．$f(c)>f(b)>f(a)$

二、多选题

9．给定一组数：$0,x_2,x_3,\cdots,x_9,30$，且 $x_2,x_3,\cdots,x_9$ 的平均数和方差分别为 10 和 1，则下列说法正确的是（　）

A．$2x_2+1$，$2x_3+1$，…，$2x_9+1$ 的平均数为 21

B．$2x_2+1$，$2x_3+1$，…，$2x_9+1$ 的方差为 5

C．0，x_2，x_3，…，x_9，30 的平均数为 11

D．0，x_2，x_3，…，x_9，30 的方差为 49.8

10．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，e 是自然对数的底数，则下列说法正确的是（　）

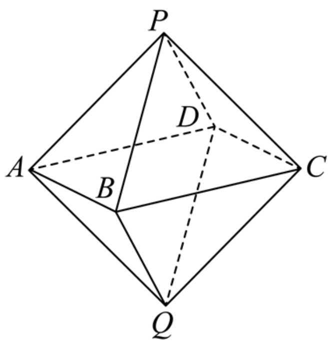
A．当 $m\in N^{*}$ 时，S_m，S_{2m}，S_{3m} 是等差数列

B．数列 $\{e^{a_n}\}$ 是等比数列

C．数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列

D．当 p，q 均为正整数且 $p\neq q$ 时，$\frac{S_{p+q}}{p+q}=\frac{S_p-S_q}{p-q}$

11．古希腊哲学家发现并证明了只存在 5 种正多面体，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体，其中正八面体是由 8 个等边三角形构成．正八面体在计算机科学中用于三维模型和场景的构建，以及人工智能领域中用于图象识别和处理，另外在晶体和材料科学中也被广泛应用．现有一个棱长为 2 的正八面体 $PABCDQ$，如图所示，下列说法中正确的是（　）



A．若点P,A,B,C,D,Q在同一个球的球面上，则该球的体积为$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

B．若该正八面体的12条棱中点在同一个球的球面上，则该球的表面积为4π

C．该正八面体内任意一点到8个侧面的距离之和为定值

D．已知正方体$GHMN-G_1H_1M_1N_1$的中心与该正八面体的中心重合，当该正方体绕中心任意转动时，若该正方体始终未超出该正八面体，则该正方体棱长的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

12．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，动直线l与抛物线C交于A，B两点，分别过A，B向直线$l_0:x=-1$引垂线，垂足分别为A_1，B_1，点M在l_0上，且$MA\perp MB$，设O为坐标原点，则下列说法中正确的是（　　）

A．M为线段A_1B_1的中点　　B．$|MF|$是$|AF|$与$|BF|$的等比中项

C．A，O，B_1三点共线　　D．MA与抛物线C有两个公共点

三、填空题

13．已知$(2-x)(x+1)^n$的展开式中所有项的系数和为1024，则含x^4项的系数为_____．（用数字作答）

14．已知单位向量$\vec{a}$，向量$\vec{b}$与$\vec{a}$不共线，且$\langle \vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\frac{5\pi}{6}$，则$|\vec{b}|$的最大值为_____．

15．已知直线$l:y=kx$是曲线$f(x)=e^{x+1}$和$g(x)=\ln x+a$的公切线，则实数a=_____．

16．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$的直线$l$与椭圆$C$交于$P$，$Q$两点．若$|F_1F_2|=|PF_1|$，且$2\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{F_2Q}$，则$C$的离心率为_____．

四、解答题

17．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a^2=c\left(c+b\right)$．

(1)求证：$B+3C=\pi$；

(2)若$\angle ABC$的角平分线交AC于点D，且$a=12$，$b=7$，求BD的长．

18．设正项数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，已知$\sqrt{S_n+1}=\dfrac{a_n+1}{2}$．

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

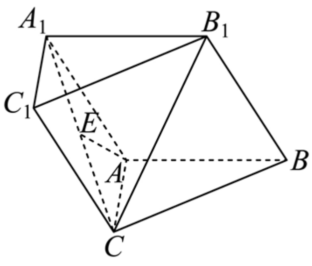
(2)设$b_n=\dfrac{a_n^2}{S_n-n}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n．

19．甲、乙两人一起玩纸牌游戏，游戏开始时，甲、乙两人手中都各有大、小王两张牌，游戏规则是：甲、乙两人分别给对方随机发一张牌（两人均不知自己所发为何牌），记为一次换牌操作，操作$k(k\in \mathrm{N}^*)$次后，谁手中的大王牌数多则为赢家．若大王牌数相同则为和牌，和牌的概率为P_k．设每次甲发牌与乙发牌之间相互独立，操作k次后，甲手中的大王牌数为ξ_k．

(1)求ξ_1的数学期望；

(2)求P_6．

20．如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，已知侧面ABB_1A_1为菱形，底面ABC为正三角形，E为线段A_1C的中点，$B_1C\perp AB$．



(1)求证：$B_1C\perp AE$；

(2)若平面$ABC\perp$平面ABB_1A_1，求平面ACC_1A_1与平面BCC_1B_1所成角的余弦值．

21．已知圆$F_1:(x+\sqrt{7})^2+y^2=1$，圆$F_2:(x-\sqrt{7})^2+y^2=25$．若动圆$S$与圆$F_1$、圆$F_2$都内切，记动圆$S$的圆心的轨迹为$C$．

(1)求轨迹 C 的方程；

(2)已知 $A(2,0)$，过点 $B(2,1)$ 的直线 l 与 C 交于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 分别交直线 $x=4$ 于 M，N，设线段 MN 的中点为 G，判断点 G 是否在轨迹 C 上，并说明理由．

22．已知函数 $f(x)=\ln x-\ln(x-1)-\dfrac{1}{x}$．

(1)求 $f(x)$ 的值域；

(2)求证：当 $n\in \mathrm{N}^{*}$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{1}{n+i}<\ln 2$．

参考答案：

1．B

【分析】解绝对值不等式求出集合P，由$P\cup Q=P$，得$Q\subseteq P$，由此能求出实数a的取值范围.

【详解】由$\left|x+1\right|<2$，解得$-3<x<1$，所以集合$P=\left\{x\left|-3<x<1\right.\right\}$，

由$x^2-(a+1)x+a<0$，可得$\left(x-1\right)\left(x-a\right)<0$，所以$Q=\left\{x\left|\left(x-1\right)\left(x-a\right)<0\right.\right\}$，

因为$P\cup Q=P$，所以$Q\subseteq P$，

当$a>1$时，不符合题意，

所以$Q=\left\{x\left|a<x<1\right.\right\}$，因为$Q\subseteq P$，所以$-3\le a\le 1$，

即实数a的取值范围是$\left[-3,1\right]$.

故选：B.

2．C

【分析】对于A，利用复数模的定义即可判断；对于B，利用共轭复数的定义即可判断；对于C，利用复数共轭复数相乘的性质即可判断；对于D，举反例即可判断.

【详解】设$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，其中$a,b,c,d\in\mathbf{R}$.

对于A，$\left|z\right|=\left|z_1z_2\right|=\left|(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\right|=\sqrt{\left(ac-bd\right)^2+\left(bc+ad\right)^2}=$

$\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(bc)^2+(ad)^2}$，

$\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{\left(ac\right)^2+\left(bd\right)^2+\left(bc\right)^2+\left(ad\right)^2}$，

所以$\left|z\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|$，故A正确；

对于B，$z=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$，$\overline{z}=(ac-bd)-(bc+ad)\mathrm{i}$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\left(a-b\mathrm{i}\right)\left(c-d\mathrm{i}\right)=\left(ac-bd\right)-\left(bc+ad\right)\mathrm{i}$，

所以$\overline{z}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，故B正确；

对于C，$\left|z_1\right|=\left|a+b\mathrm{i}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\left|z_2\right|=\left|c+d\mathrm{i}\right|=\sqrt{c^2+d^2}$，

由$|z_1|=|z_2|$，得$a^2+b^2=c^2+d^2$.

因为$z_1^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，$z_2^2=c^2-d^2+2cd\mathrm{i}$，

所以$z_1^2=z_2^2$不一定成立，如$z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，

此时$|z_1|=|z_2|$，而$z_1^2=1$，$z_2^2=-1$，即$z_1^2\neq z_2^2$，故C错误；

对于D，由$|z_1|=|z_2|$，得$a^2+b^2=c^2+d^2$，$z_1\cdot\overline{z_1}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$，

$z_2\cdot\overline{z_2}=(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=c^2+d^2$，所以$z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$，故D正确．

故选:C．

3．D

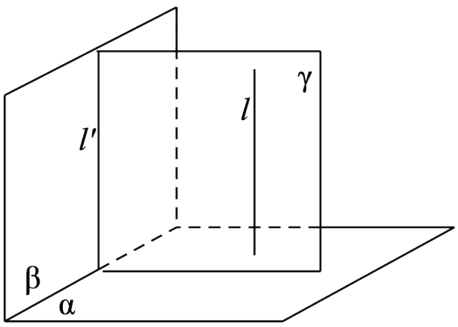
【分析】根据空间中线面、面面的位置关系一一判断即可.

【详解】对于①，若$l\perp m$，$l//\alpha$，$m\perp\alpha$或$m//\alpha$或$m\subset\alpha$或m与α相交而不垂直，故①错误；

对于②，若$l\perp m$，$m\perp\alpha$，则$l//\alpha$或$l\subset\alpha$，故②错误；

对于③，由$l\perp\alpha$，$l//m$，可得$m\perp\alpha$，又$m\perp\beta$，α，β是两个不同的平面，所以$\alpha//\beta$，故③正确；

对于④，



过l作平面γ与β相交，设$\beta\cap\gamma=l'$，因为$l//\beta$，$\beta\cap\gamma=l'$，$l\subset\gamma$，所以$l//l'$，

又$l\perp\alpha$，所以$l'\perp\alpha$，又$l'\subset\beta$，所以$\alpha\perp\beta$，故④正确.

故选：D．

4．B

【分析】可先对需值班的4天两两分组，再从4人中选两人出来排序即可求解;也可先选出需值班的两人，先由其中一人选定值班的两天，另一人值剩下的两天即可求解.

【详解】法一：先将值班的四天分为两组，每组两天，有$\dfrac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{A}_2^2}=3$种方法，

再安排两人到每组中，每组安排同一人，有$\mathrm{A}_4^2=12$种方法，

故不同的安排方法有$3\times12=36$种.

故选：B.

法二：从4人中选出2人值班有$C_4^2=6$种方法，

选出的两人其中一人从4天中选两天值班，

剩下两天由另一人值班即可，有$C_4^2=6$种方法，

故不同的安排方法共有$6\times6=36$种.

故选：B.

5．D

【分析】先赋值$a=b=0$求出$f(0)$，接着赋值$a=1$，$b=-1$求出$f(1)$，再赋值$a=b=1$求出$f(2)$，最后赋值$a=1$，$b=2$即可求解.

【详解】令$a=b=0$，得$f(0)=2f(0)$，所以$f(0)=0$；

令$a=1$，$b=-1$，得$f(0)=f(1)+f(-1)+1=0$，

又$f(-1)=3$，所以$f(1)=-4$；令$a=b=1$，得$f(2)=f(1)+f(1)-1=-9$；

令$a=1$，$b=2$，得$f(3)=f(1)+f(2)-2=-15$.

故选：D.

6．B

【分析】先换元，即令$\sin x-\cos x=t$，即可把原函数转化成二次函数，即可求出函数最小值.

【详解】$f(x)=(1+2\sin x)(1-2\cos x)=1+2(\sin x-\cos x)-4\sin x\cos x$，

令$\sin x-\cos x=t$，即$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$，

由$(\sin x-\cos x)^2=t^2$，得$2\sin x\cos x=1-t^2$，

从而原函数化为$y=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，

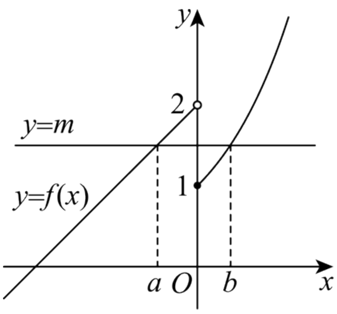
当$t=-\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=f(x)_{\min}=-\frac{3}{2}$.

故选:B.

7．A

【分析】设 $f(a)=f(b)=m$，数形结合可得 $1\le m<2$，可得 $b-a=\ln m-m+2$，进而令 $g(x)=\ln x-x+2$，$1\le x<2$，利用导数可求 $b-a$ 的取值范围.

【详解】设 $f(a)=f(b)=m$，如图所示：



由 $f(x)$ 的图象知，$1\le m<2$，则 $e^b=m=a+2$，从而 $a=m-2$，$b=\ln m$，

所以 $b-a=\ln m-m+2$.

令 $g(x)=\ln x-x+2$，$1\le x<2$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $1\le x<2$ 时，$g'(x)\le 0$，当且仅当 $x=1$ 时，$g'(x)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,2)$ 上为减函数，所以 $g(2)<g(x)\le g(1)$，

得 $\ln 2<g(x)\le 1$，即 $b-a$ 的取值范围是 $(\ln 2,1]$.

故选：A.

8．C

【分析】根据函数的奇偶性，以及构造函数利用导数求解单调性即可.

【详解】当 $x\in\mathbf{R}$ 时，由 $f(x)$ 得 $f(-x)=3-(-x)^2-2\cos(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

又 $f'(x)=2(\sin x-x)$，

当 $x\ge 0$ 时，令 $g(x)=2(\sin x-x)$，则 $g'(x)=2(\cos x-1)\le 0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)\le g(0)=0$，

即 $f'(x)\le 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

$a=2^{-0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{|c|}=\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}>\sqrt{2}=\frac{1}{a}$，

所以$|c|<a,\frac{1}{|c|}-\frac{1}{b}=\log_2 3-\sqrt{3}=2\log_2\sqrt{3}-\sqrt{3}$，

令$h(x)=2\log_2 x-x$，$x\in\left[\sqrt{3},2\right]$，则$h'(x)=\frac{2-x\ln 2}{x\ln 2}$，

因为$\sqrt{3}<2<\frac{2}{\ln 2}$，所以$h(x)$在$\left[\sqrt{3},2\right]$上单调递增，所以$h(\sqrt{3})<h(2)$，

即$2\log_2\sqrt{3}-\sqrt{3}<2\log_2 2-2=0$，所以$\frac{1}{|c|}<\frac{1}{b}$，得$|c|>b$.

故$b<|c|<a$，从而$f(b)>f(|c|)>f(a)$，即$f(b)>f(c)>f(a)$.

故选：C.

9．ACD

【分析】根据平均数的计算公式，可判定A正确；根据方差的计算公式，可求得B错误；根据平均数的计算公式，求得$\overline{x}=11$，可判定C正确；将0和30作为一组，中间8个数作为另一组，结合$s^2=\frac{m}{m+n}\left[(\overline{x_1}-\overline{x})^2+s_1^2\right]+\frac{n}{m+n}\left[(\overline{x_2}-\overline{x})^2+s_2^2\right]$，可判定D正确.

【详解】对于A中，由题意得$\frac{x_2+x_3+\cdots+x_9}{8}=10$，

所以$\frac{(2x_2+1)+(2x_3+1)+\cdots+(2x_9+1)}{8}=\frac{2(x_2+x_3+\cdots+x_9)+8}{8}=20+1=21$，所以A正确；

对于B中，由题意得$\frac{(x_2-10)^2+(x_3-10)^2+\cdots+(x_9-10)^2}{8}=1$，

所以$\frac{(2x_2+1-21)^2+(2x_3+1-21)^2+\cdots+(2x_9+1-21)^2}{8}$

$=\frac{2^2[(x_2-10)^2+(x_3-10)^2+\cdots+(x_9-10)^2]}{8}=4\times 1=4$，所以B错误；

对于C中，$\overline{x}=\frac{0+x_2+x_3+\cdots x_9+30}{10}=\frac{30+10\times 8}{10}=11$，所以C正确；

对于D中，将0和30作为一组，其平均数和方差分别为$\overline{x_1}=\frac{0+30}{2}=15$，

$s_1^2=\frac{(0-15)^2+(30-15)^2}{2}=225$，将中间8个数作为另一组，

其平均数和方差分别为$\overline{x_2}=10$，$s_2^2=1$，

由C知$\overline{x}=11$，$s^2=\frac{m}{m+n}\left[(\overline{x_1}-\overline{x})^2+s_1^2\right]+\frac{n}{m+n}\left[(\overline{x_2}-\overline{x})^2+s_2^2\right]$

$=\frac{1}{5}\times\left[(15-11)^2+225\right]+\frac{4}{5}\times\left[(10-11)^2+1\right]=49.8$，所以D正确.

故选：ACD.

10．BCD

【分析】利用等差数列和等比数列的定义可判定 A,B,C 选项，利用等差数列的求和可判定 D 选项.

【详解】对于 A，令 $m=1$，则 $S_2-S_1=a_2$，$S_3-S_2=a_3$，

当 $d\neq 0$ 时，$a_2\neq a_3$，即 $S_2-S_1\neq S_3-S_2$，

所以 S_1，S_2，S_3 不是等差数列，故 A 错误；

对于 B，设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\frac{\mathrm{e}^{a_{n+1}}}{\mathrm{e}^{a_n}}=\mathrm{e}^{a_{n+1}-a_n}=\mathrm{e}^d$ （定值），

所以 $\{\mathrm{e}^{a_n}\}$ 是公比为 e^d 的等比数列，故 B 正确；

对于 C，$\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{n}=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，故 C 正确；

对于 D，$\frac{S_{p+q}}{p+q}=\frac{(p+q)a_1+\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}d}{p+q}=\frac{d}{2}(p+q)+a_1-\frac{d}{2}$，

$$\frac{S_p-S_q}{p-q}=\frac{\left[pa_1+\frac{p(p-1)}{2}d\right]-\left[qa_1+\frac{q(q-1)}{2}d\right]}{p-q}$$

$$=\frac{(p-q)a_1+\frac{d}{2}\left[(p^2-q^2)-(p-q)\right]}{p-q}=a_1+\frac{d}{2}(p+q-1)=\frac{d}{2}(p+q)+a_1-\frac{d}{2},$$

所以 $\frac{S_{p+q}}{p+q}=\frac{S_p-S_q}{p-q}$，故 D 正确.

故选：BCD.

11．ABC

【分析】将正八面体放入正方体中，则点 P,A,B,C,D,Q 在该正方体内切球的球面上，即可判断 A；正八面体 12 条棱的中点在同一球的球面上，则该球与 12 条棱相切于棱的中点，得出球的直径，即可判断 B；由等面积法即可判断 C；正方体 $GHMN-G_1H_1M_1N_1$ 棱长最大时，其外接球即为正八面体的内切球，求得正八面体的内切球半径进而得出正方体棱长，即可判断 D.

【详解】由题可知，依次连接正方体 6 个面的中心，可得题设正八面体 $PABCDQ$，

如图所示，由正八面体的棱长为 2 得，正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$，