突破 9 切线的性质(一) 单切

类型一 连圆心与切点→求角度

1.(2023 华一寄宿)已知 AB 为⊙O 的直径,C 为⊙O 上一点,过点 C 作⊙O 的切线 PC 交 AB 延长线于点 P ,D 为. $\widehat{AC}$ 上一点,连接 BD,BC,DC.

(1)如图 1,若 $\angle D=26°$,求 $\angle PCB$的度数；

(2)如图 2，若四边形 CDBP 为平行四边形，求 $\angle PCB,\angle ADC$的度数.

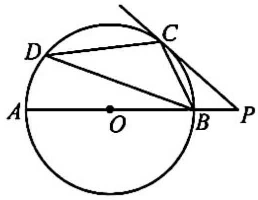


图1

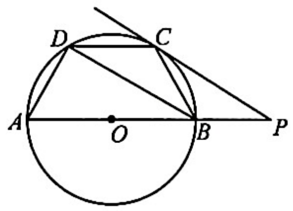
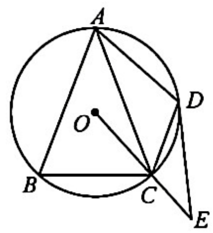


图2

2.(2024 华一光谷)如图, $\triangle ABC$内接于⊙O， $AB=AC,\angle BAC=42°$,,D 是⊙O 上一点,若($CD\|$BA,连接 AD,过点 D 作⊙O 的切线,与 OC 的延长线交于点 E,求 $\angle E$的度数.

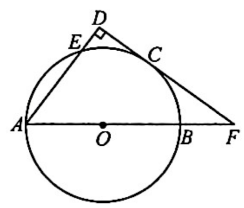


类型二 连圆心与切点→求长度

3.(2023 鄂州)如图,AB 为⊙O 的直径,E 为⊙O 上一点,C 为 $\widehat{EB}$的中点，过点 C 作($CD\perp AE$,交 AE 的延长线于点 D，延长 DC 交 AB 的延长线于点 F.

(1)求证:CD 是⊙O 的切线;

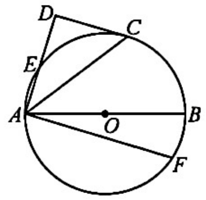
(2)若 $DE=1,DC=2$,求⊙O 的半径长.



4.(2024 六中)如图,AB 为⊙O 的直径,C 为⊙O 上一点, $AD\perp CD$,AD 交⊙O 于点 E, $\widehat{BC}=\widehat{BC}$,F 为⊙O 上一点，$AF\parallel CD$.

(1)求证:CD 是⊙O 的切线;

(2)若 $AC=5,AF=6$,求⊙O 的半径.

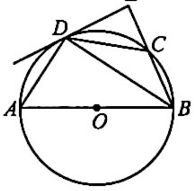


类型三 连圆心与切点→求线段关系

5.(2023 二中广雅)如图,点 C 在以 AB 为直径的⊙O 上,BD 平分 $\angle ABC$交⊙O 于点 D,过点 D 作 BC 的垂线,垂足为 E.

(1)求证:DE 与⊙O 相切;

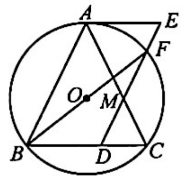
(2)请探究线段 AB，BE，CE 之间的数量关系，并说明理由.



6.(2023 七一中学)如图, $\triangle ABC$为⊙O 的内接三角形， $AB=AC$,,BF 为⊙O 的直径,AE 为⊙O 的切线， $EF \parallel AB$,EF 的延长线交 BC 于点 D.

(1)求证：四边形 ABDE 为平行四边形；

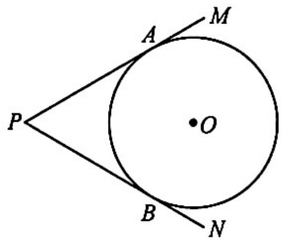
(2)设 DE 与 AC 交于点 M,求证: $AM=EF+DM$.



突破 10 切线的性质(二) 双切

类型一 连圆心与切点

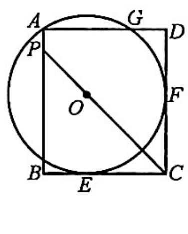
1.(2023 汉阳期末)如图,PM,PN 分别与⊙O 相切于 A,B 两点,C 为⊙O 上异于 A,B 的一点,连接 AC,BC.若 $\angle P=60°$,则 $\angle ACB$的大小是____________.



2.(2024 江汉期末)如图,在矩形 ABCD 中,⊙O 经过点 A,与矩形的两边 BC,CD 相切,切点分别为 E,F,与边 AD 相交于点 G,连接 CO 并延长交边 AB 于点 P.

(1)求证: $\angle BPC=45°$;

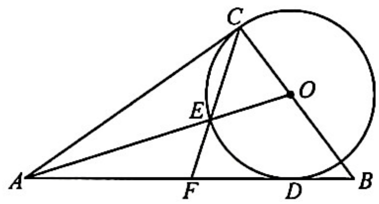
(2)若 $CE=2BE=2$,求 AP 的长.



3.如图 ,在 $\triangle ABC$的边 BC 上取一点 O ,以 O 为圆心 ,OC 为半径画⊙O ,⊙O 与边 AB 相切于点 $D,AC=AD$,连接 OA 交⊙O 于点 E,连接 CE,并延长交线段 AB 于点 F.

(1)求证:AC 是⊙O 的切线;

(2)若 F 是 AB 的中点,试探究. $BD+CE$与 AF 的数量关系，并说明理由.

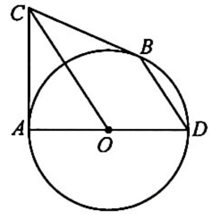


类型二 连双切点

4.(2024 二中广雅)如图,CA,CB 分别与⊙O 相切于点 A,B,AD 是⊙O 的直径,连接 OC,BD.

(1)求证: $OC\parallel BD$;

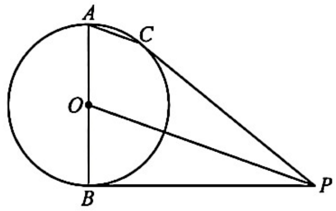
(2)若 $AC=4,AD=6$,,求 BD 的长.



5.(2024 武钢实验)如图，点 C 在以 AB 为直径的⊙O 上，分别过点 B，C 作⊙O 的切线相交于点 P,连接 AC,OP.

(1)求证: $\angle A+\angle OPC=90°$;

(2)若 $\frac{AC}{OP}=\frac{2}{9}$,求 $\frac{PC}{AC}$的值.

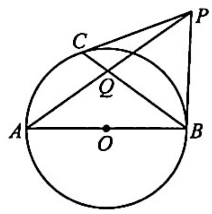


类型三 连圆外一点

6.(2024 光谷未来学校)如图,AB 是⊙O 的直径,PB,PC 分别与⊙O 相切于点 B,C,连接 PA,与 BC 交于点 Q,且 Q 是 PA 的中点.

(1)求 $\frac{CQ}{BQ}$的值；

(2)若 $AB=4\sqrt{3}$,求 PC 的长.



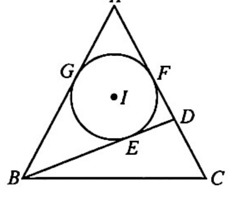
突破 11 切线的性质(三) 多切

类型一 切线长→整体求值

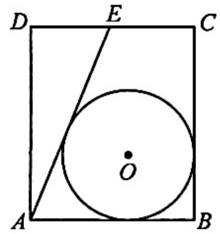
1.(2024 青山期末)如图,在△ABC 中,AB=AC,D 为 AC 边上一点,⊙I 为△ABD 的内切圆,G,E,F 为切点.

(1)求证:BE=CF;

(2)若 BD=10,CD=4,求 BE 的长.

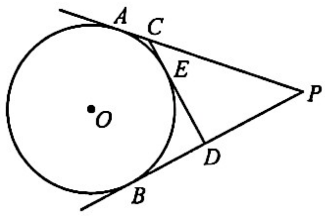


2.(2023 七一中学)如图,在矩形 ABCD 中,AB=10,BC=12,E 是边 CD 的中点,⊙O 与 AB,BC,EA 都相切,则⊙O 的半径是____________.

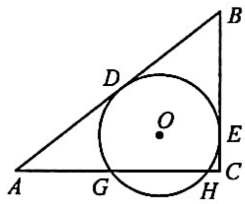


类型二 切线长→勾股

3.(2023 六中上智)如图,PA,PB 切⊙O 于点 A,B,CD 切⊙O 于点 E,交 PA,PB 于 C,D 两点,若 PC=5,PD=3,CD=4,则⊙O 的半径等于____________.



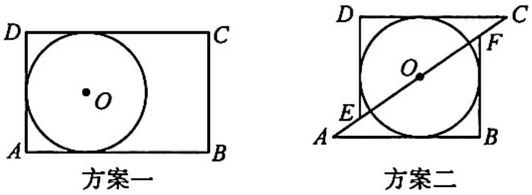
4.(2024 原创题)如图,在△ABC 中,∠C=90°,AC=4,AB=5,⊙O 分别与 AB,BC 相切于点 D,E,交 AC 于点 G,H.若 GH=2,则⊙O 的半径为____________.



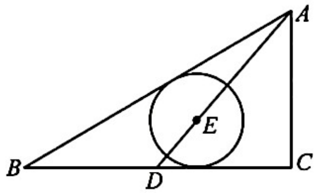
类型三 切线长→面积法

5.(2022 七一中学)木匠黄师傅用长 AB=3m，宽 BC=2m 的矩形木板做一个尽可能大的圆形桌面，他设计了两种方案：方案一：用矩形木板直接锯一个半径最大的圆；方案二：沿对角线 AC 将矩形锯成两个三角形，适当平移三角形并锯一个最大的圆，则方案二比方案一的圆的半径大(　　)

$A.\frac{1}{2}m$　　　$B.\frac{1}{3}m$　　　$C.\frac{1}{4}m$　　　$D.\frac{1}{5}m$

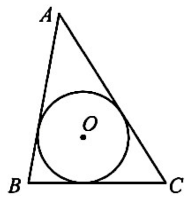


6.(2024 梁溪)如图,在 Rt△ABC 中,∠C=90°,AB=5,AC=3,点 E 在中线 AD 上,以 E 为圆心的⊙E 分别与 AB,BC 相切,则⊙E 的半径为__________.



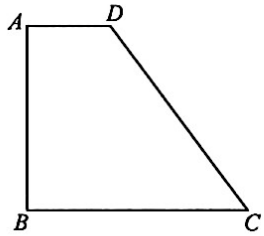
7.(武汉中考)如图,在△ABC 中,AB=7,BC=5,AC=8,则△ABC 的内切圆的半径为(　　)

$A.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　B. $\frac{3}{2}$　　　C. $\sqrt{3}$　　　$D.2\sqrt{3}$



8.(2022 武汉中考)如图,在四边形材料 ABCD 中, $AD\|BC,\angle A=90°,AD=9cm,AB=20cm$,BC=24 cm.现用此材料截出一个面积最大的圆形模板，则此圆的半径是(　　)

$A.\frac{110}{13}cm$　　　B.8cm　　　$C.6\sqrt{2}cm$　　　D.10 cm



突破 12 切线的性质(四) 三角形的内外心

类型一 运用内外心性质求角度

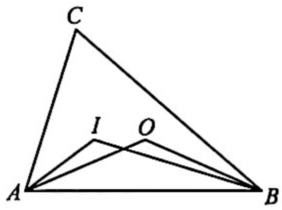
1.(2024 黄陂)已知 O,I 分别是 $\triangle ABC$的外心和内心， $\angle BOC=144°$,则 $\angle BIC$的度数是______________

类型二 运用内外心性质求角度关系

2.(武汉元调)如图，点 I 和 O 分别是 $\triangle ABC$的内心和外心，则 $\angle AIB$和 $\angle AOB$的关系为( )

$A.\angle AIB=\angle AOB$　　　　$B.\angle AIB\neq\angle AOB$

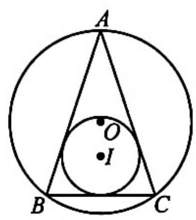
$C.2\angle AIB-\frac{1}{2}\angle AOB=180°$　　　　$D.2\angle AOB-\frac{1}{2}\angle AIB=180°$



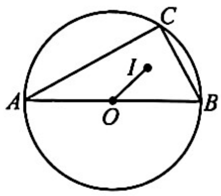
类型三 运用内外心性质求线段长

3.(2023 二调模拟)如图,在⊙O 中, $\widehat{AB}=\widehat{AC},BC=6,AC=3\sqrt{10}$,I 是 $\triangle ABC$的内心，则线段 OI 的长为(　　)

A.1　　$B.\sqrt{10}-3$　　$C.5-\sqrt{10}$　　$D.\frac{1}{3}\sqrt{10}$



4.(2024 硚口期末)如图,AB 是⊙O 的直径,AC,BC 是⊙O 的弦,I 是△ABC 的内心,连接 OI,若 $OI=\sqrt{2},\angle BOI=45°$,,则 BC 的长是(　　)



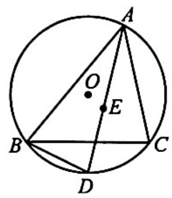
$A.\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$　　$B.\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$C.1+\sqrt{2}$　　$D.1+\sqrt{3}$

类型四　运用内外心性质证明与计算

5.(2024 中考模拟)如图,E 是△ABC 的内心,AE 的延长线与△ABC 的外接圆⊙O 相交于点 D.

(1)求证:DE=BD;

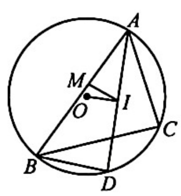
(2)若 DE=10,BC=$8\sqrt{5}$,求⊙O 的半径.



6.(2024 武昌期末)如图,I 是△ABC 的内心,AI 的延长线和△ABC 的外接圆⊙O 相交于点 D,OI⊥AD.

(1)求证:AD=2BD;

(2)若 IM⊥AB 于点 M.求证:BC=2AM.



突破 9 切线的性质(一) 单切

1.解:(1)连接 OC.由圆周角定理,

得∠COP=2∠D=52°.∵OB=OC,

$\therefore \angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-52^\circ)=64^\circ,$

∵CP 为⊙O 的切线,∴OC⊥PC,

$\therefore \angle PCB=90^\circ-64^\circ=26^\circ;$

(2)连接 AC,OC.∵四边形 CDBP 为平行四边形,

∴∠CDB=∠CPB,由(1)得∠CDB=∠CAB=∠CPB,

∴∠CDB=∠CAB=∠CPB=∠PCB.在△ACP 中,∠CAB+∠ACB+∠BCP+∠CPB=180°,

∴∠CAB+∠BCP+∠CPB=90°,

∴∠CAB=∠CPB=∠PCB=30°,∴∠OBC=60°,

∵四边形 ABCD 为⊙O 的内接四边形，

$\therefore \angle ADC=180^\circ-\angle ABC=120^\circ.$

2.解:连接 OD.∵CD∥AB,∴∠ACD=∠BAC=42°.

∵AB=AC,∠BAC=42°,

$\therefore \angle B=\angle ACB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-42^\circ)=69^\circ.$

∵四边形 ABCD 为⊙O 的内接四边形，

∴∠B+∠ADC=180°,

$\therefore \angle ADC=180^\circ-\angle B=180^\circ-69^\circ=111^\circ,$

$\therefore \angle CAD=180^\circ-\angle ACD-\angle ADC=180^\circ-42^\circ-111^\circ=27^\circ,$

∴∠COD=2∠CAD=54°,

∵DE 为切线,∴OD⊥DE,∴∠ODE=90°,

$\therefore \angle E=90^\circ-\angle DOE=90^\circ-54^\circ=36^\circ.$

3.解:(1)连接 OC,AC.∵C 为 EB 的中点,

∴EC=BC,∴∠EAC=∠BAC,

∵OA=OC,∴∠BAC=∠OCA,∴∠EAC=∠OCA,

∴AE∥OC,∴∠ADC=∠OCF,