雅安市 2024 届高三下学期 4 月联考试题

数学（文科）

考生注意：

1.本试卷分第 I 卷（选择题）和第 Ⅱ 卷（非选择题）两部分，共 150 分.考试时间 120 分钟.

2.请将各题答案填写在答题卡上.

3.本试卷主要考试内容：高考全部内容.

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{-2,1,4,8\}$，$B=\{xy \mid x\in A, y\in A\}$，则 B 中元素的最小值为（　　）

A. -16　　B. -8　　C. -2　　D. 32

2. 若向量 $\vec{a}=(-1,5)$，$\vec{b}=(x,x+1)$，$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则 $x=$（　　）

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 若圆 $C: x^2+y^2=1$ 与圆 $D:(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$ 外切，则 $r=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 设 α，β 为两个不同的平面，m,n 为两条不同的直线，且 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则“$m\perp n$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 若复数 $z=(x+y\mathrm{i})(x-4y\mathrm{i})(x,y\in\mathbf{R})$ 的实部为 4，则点 (x,y) 的轨迹是（　　）

A. 短轴长为 4 的椭圆　　B. 实轴长为 4 的双曲线

C. 长轴长为 4 的椭圆　　D. 虚轴长为 4 的双曲线

6. 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 是（　　）

A. 最小正周期为 π 的奇函数　　B. 最小正周期为 2π 的奇函数

C. 最小正周期为 π 的偶函数　　D. 最小正周期为 2π 的偶函数

7. 设 $n+\frac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的整数部分为 a_n，则数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项和为（　　）

A. 465　　B. 466　　C. 467　　D. 468

8. 若函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-ax+2a)(a>0)$ 的值域为 **R**，则 $f(a)$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,-3\right]$　　B. $\left(-\infty,-4\right]$　　C. $\left[-4,+\infty\right)$　　D. $\left[-3,+\infty\right)$

9. 一质点的速度 v（单位：$\mathrm{m/s}$）与时间 t（单位：s）满足函数关系式 $v=2t^3+at^2$，其中 a 为常数.当 $t=1$ 时，该质点的瞬时加速度为 $8\,\mathrm{m/s^2}$，则当 $t=2$ 时，该质点的瞬时加速度为（　　）

A. $28\,\mathrm{m/s^2}$　　B. $26\,\mathrm{m/s^2}$　　C. $32\,\mathrm{m/s^2}$　　D. $24\,\mathrm{m/s^2}$

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|2^x-1\right|-a$，$g\left(x\right)=x^2-4\left|x\right|+2-a$，则（　　）

A. 当 $g\left(x\right)$ 有 2 个零点时，$f\left(x\right)$ 只有 1 个零点

B. 当 $g\left(x\right)$ 有 3 个零点时，$f\left(x\right)$ 有 2 个零点

C. 当 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点时，$g\left(x\right)$ 有 2 个零点

D. 当 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点时，$g\left(x\right)$ 有 4 个零点

11. $\sqrt{\left(x+4\right)^2+\left(\sqrt{-4x}-2\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2-4x}$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　B. 5　　C. $2\sqrt{6}$　　D. 6

12. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 底面 $ABCD,\angle ABD=60^\circ,PB,PC$ 与底面 $ABCD$ 所成的角分别为 α,β，且 $\alpha+\beta=45^\circ$，则 $\frac{PA}{AB}=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{17}-2}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{15}-2}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.把答案填在答题卡的相应位置.

13. 一组样本数据 12,15,12,13,18,10,16,19,15,12 的众数为______，中位数为______.

14. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\ge 1,\\2x-y\le 3,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的取值范围是______.

15. 甲、乙、丙、丁四位同学的座位要进行调整，且四位同学的座位就在他们四人之间随机调整（每人不能坐回自己的原位），则调整座位之后，甲和乙的座位恰好交换的概率为____________

16. 已知定义在 **R** 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)-2f\left(x\right)-2f\left(y\right)+6$，$f\left(1\right)=4$，则

$\sum_{i=1}^{n} f(i)=$______$\left(n\in \mathbf{N}^{*}\right)$.

三、解答题：共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 已知甲社区有 120 人计划去四川旅游，他们每人将从峨眉山与青城山中选择一个去旅游，将这 120 人分为东、西两小组，两组的人数相等，已知东小组中去峨眉山的人数是去青城山人数的两倍，西小组中去峨眉山的人数比去青城山的人数少 10.

（1）完成下面的 2×2 列联表

	去峨眉山旅游	去青城山旅游	合计
东小组			
西小组			
合计			

（2）判断是否有 99%的把握认为游客的选择与所在的小组有关，说明你的理由.

参考公式：$K^{2}=\dfrac{n(ad-bc)^{2}}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

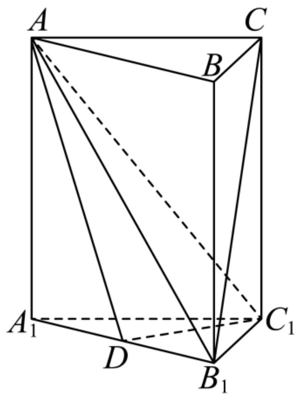
$P\left(K^{2}\geq k_{0}\right)$	0.050	0.010	0.001
k_{0}	3.841	6.635	10.828

18. 已知$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c\sin A=2\sqrt{3}a\sin B$，$a=\sqrt{19}b$.

（1）求 A；

（2）若 D 为 AB 边上一点，且 $CD=4b$，证明：$\triangle BCD$ 外接圆的周长为 $8\sqrt{19}b\pi$.

19. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C_1=B_1C_1=3$，$A_1B_1=4\sqrt{2}$，D 为 A_1B_1 的中点.



（1）证明：$B_1C//$ 平面 AC_1D.

（2）若以 AB_1 为直径的球的表面积为 48π，求三棱锥 B_1-AC_1D 的体积.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=\log_a x+x-2$.

（1）当 $0<a<1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间;

（2）定义 $\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数，当 $a=\mathrm{e}^{-1}$ 时，证明: $f\left(x\right)$ 有两个零点 x_1，x_2，并求 $\left[x_1+x_2\right]$ 的值.

参考数据: $\ln 2\approx 0.693$，$\ln 3\approx 1.099$，$\ln 7\approx 1.946$.

21. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 $D\left(6,\sqrt{3}\right)$ 到左、右焦点的距离之差为 6，

（1）求双曲线 C 的方程，

（2）已知 $A\left(-3,0\right),B\left(3,0\right)$，过点 $\left(5,0\right)$ 的直线 l 与 C 交于 M,N（异于 A,B）两点，直线 MA 与 NB 交于点 P，试问点 P 到直线 $x=-2$ 的距离是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由，

（二）选考题：共 10 分.请考生从第 22，23 两题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一个题目计分.

[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

22. 在极坐标系中，O 为极点，曲线 M 的方程为 $4\tan\theta=\rho\cos\theta$，曲线 N 的方程为 $\rho\sin\theta=m$，其中 m 为常数.

（1）以 O 为坐标原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立直角坐标系，求曲线 M 与 N 的直角坐标方程；

（2）设 $m=1$，曲线 M 与 N 的两个交点为 A，B，点 C 的极坐标为 $(t,0)$，若 $\triangle ABC$ 的重心 G 的极角为 $\frac{\pi}{4}$，求 t 的值.

[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

23. 已知 $a+b=3(a>0,b>0)$.

（1）若 $|b-1|<3-a$，求 b 的取值范围；

（2）求 $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+2}+(a+1)b$ 的最大值.

参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{-2,1,4,8\}$，$B=\{xy|x\in A,y\in A\}$，则 B 中元素的最小值为（　　）

A. -16　　B. -8　　C. -2　　D. 32

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，由集合的概念，代入计算即可得到结果.

【详解】由题意可得，$(xy)_{\min}=-2\times8=-16$，

所以 B 中元素的最小值为 -16.

故选：A

2. 若向量 $\vec{a}=(-1,5)$，$\vec{b}=(x,x+1)$，$\vec{a}//\vec{b}$，则 $x=$（　　）

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面共线向量的坐标表示建立方程，解之即可求解.

【详解】因为 $\vec{a}//\vec{b}$，所以 $-(x+1)-5x=0$，解得 $x=-\frac{1}{6}$.

故选：A

3. 若圆 $C:x^2+y^2=1$ 与圆 $D:(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$ 外切，则 $r=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】根据两圆外切的条件建立方程求解即可.

【详解】由圆$C: x^2+y^2=1$与圆$D:\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=r^2\left(r>0\right)$知，

圆心分别为$C(0,0), D(3,4)$，半径为1，r，

因为两圆外切，

所以$\left|CD\right|=\sqrt{3^2+4^2}=1+r$，解得$r=4$.

故选：C

4. 设α，β为两个不同的平面，m, n为两条不同的直线，且$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则“$m\perp n$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】结合图形，利用充分条件和必要条件的判断方法，即可得出结果.

【详解】如图1，当$m\perp n$时，α与β不一定垂直，如图2，当$\alpha\perp\beta$时，m与n不一定垂直，

所以“$m\perp n$”是“$\alpha\perp\beta$”的既不充分也不必要条件，

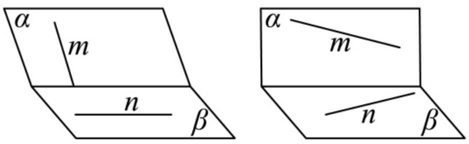


图1　　图2

故选：D.

5. 若复数$z=\left(x+y\mathrm{i}\right)\left(x-4y\mathrm{i}\right)\left(x, y\in\mathbf{R}\right)$的实部为4，则点$\left(x, y\right)$的轨迹是（　　）

A. 短轴长为4的椭圆　　　　B. 实轴长为4的双曲线

C. 长轴长为4的椭圆　　　　D. 虚轴长为4的双曲线

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数乘法运算化简，再由实部为4得出轨迹方程，根据方程判断轨迹即可.

【详解】因为$\left(x+y\mathrm{i}\right)\left(x-4y\mathrm{i}\right)=x^2+4y^2-3xy\mathrm{i}$，

所以$x^2+4y^2=4$，即$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

所以点$\left(x,y\right)$的轨迹是长轴长为4的椭圆.

故选：C

6. 函数$f\left(x\right)=2\sin x-\sin 2x$是（　　）

A. 最小正周期为π的奇函数

B. 最小正周期为2π的奇函数

C. 最小正周期为π的偶函数

D. 最小正周期为2π的偶函数

【答案】B

【解析】

【分析】由函数的奇偶性定义判断函数奇偶性，再运用周期定义式进行检验即得.

【详解】因为$x\in\mathbf{R}$，$f\left(-x\right)=2\sin\left(-x\right)-\sin\left(-2x\right)=-2\sin x+\sin 2x=-f\left(x\right)$，所以该函数为奇函数，

故C，D项错误；

因为$f\left(x+\pi\right)=2\sin(x+\pi)-\sin 2(x+\pi)=-2\sin x-\sin 2x$，显然$f\left(x+\pi\right)=f(x)$在R上不能恒成立，

故A，C项错误；

又$f\left(x+2\pi\right)=2\sin(x+2\pi)-\sin 2(x+2\pi)=2\sin x-\sin 2x=f(x)$，即$2\pi$是$f\left(x\right)=2\sin x-\sin 2x$的周期，故B项正确.

故选：B.

7. 设$n+\dfrac{2}{n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的整数部分为$a_n$，则数列$\left\{a_n\right\}$的前30项和为（　　）

A. 465

B. 466

C. 467

D. 468

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可得$a_1=a_2=3$，当$n>2$时，$a_n=n$，再借助等差数列求和公式计算即可得.

【详解】当$n=1$时，$a_n=1+2=3$；

当$n=2$时，$a_n=2+1=3$；

当$n>2$时，$0<\frac{2}{n}<1$，$a_n=n$，

故数列$\{a_n\}$的前 30 项和为$3+3+3+4+\cdots+30=6+\frac{(3+30)\times 28}{2}=468$.

故选：D.

8. 若函数$f(x)=\log_{0.5}(x^2-ax+2a)(a>0)$的值域为**R**，则$f(a)$的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-3]$　　　　B. $(-\infty,-4]$　　　　C. $[-4,+\infty)$　　　　D. $[-3,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】利用对数函数的定义，结合二次函数性质求出a的范围，再利用对数函数性质求解即得.

【详解】依题意，$x^2-ax+2a$取遍所有正数，则$\Delta=a^2-8a\geq 0$，而$a>0$，解得$a\geq 8$，

所以$f(a)=\log_{0.5}(2a)\leq\log_{0.5}16=-\log_2 16=-4$.

故选：B

9. 一质点的速度v（单位：$\mathrm{m/s}$）与时间t（单位：s）满足函数关系式$v=2t^3+at^2$，其中a为常数.当$t=1$时，该质点的瞬时加速度为$8\,\mathrm{m/s^2}$，则当$t=2$时，该质点的瞬时加速度为（　　）

A. $28\,\mathrm{m/s^2}$　　　　B. $26\,\mathrm{m/s^2}$　　　　C. $32\,\mathrm{m/s^2}$　　　　D. $24\,\mathrm{m/s^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，求导可得$v'=6t^2+2at$，代入计算，即可求得a，从而得到结果.

【详解】$v'=6t^2+2at$，当$t=1$时，$v'=6+2a=8$，解得$a=1$.

当$t=2$时，$v'=24+4=28$，所以该质点的瞬时加速度为$28\,\mathrm{m/s^2}$.

故选：A

10. 已知函数$f(x)=|2^x-1|-a$，$g(x)=x^2-4|x|+2-a$，则（　　）

A. 当$g(x)$有 2 个零点时，$f(x)$只有 1 个零点

B. 当$g(x)$有 3 个零点时，$f(x)$有 2 个零点

C. 当$f(x)$有 2 个零点时，$g(x)$有 2 个零点

D. 当 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点时，$g\left(x\right)$ 有 4 个零点

【答案】D

【解析】

【分析】作出函数 $y=\left|2^x-1\right|$，$y=x^2-4\left|x\right|+2$ 图象，两个函数的零点个数转化为它们的图象与 $y=a$ 的图象的公共点的个数，结合图象可得答案.

【详解】两个函数的零点个数转化为图象与 $y=a$ 的图象的公共点的个数，

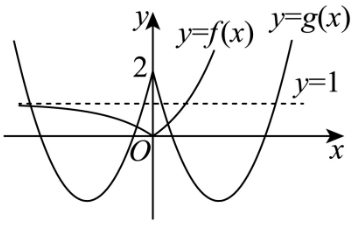
作出 $y=\left|2^x-1\right|$，$y=x^2-4\left|x\right|+2$ 的大致图象，如图所示.

由图可知，当 $g\left(x\right)$ 有 2 个零点时，$f\left(x\right)$ 无零点或只有 1 个零点；

当 $g\left(x\right)$ 有 3 个零点时，$f\left(x\right)$ 只有 1 个零点；

当 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点时，$g\left(x\right)$ 有 4 个零点.

故选：D



11. $\sqrt{\left(x+4\right)^2+\left(\sqrt{-4x}-2\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2-4x}$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　　　B. 5　　　　C. $2\sqrt{6}$　　　　D. 6

【答案】B

【解析】

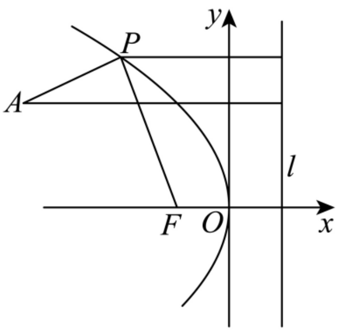
【分析】设 $A(-4,2)$，$F(-1,0)$，$P(x,\sqrt{-4x})$，根据条件，将问题转化成抛物线 $y^2=-4x$ 上半部分一动点到 $A(-4,2)$，$F(-1,0)$ 距离之和的最小值，再利用抛物线的定义即可求出结果.

【详解】设 $A(-4,2)$，$F(-1,0)$，$P(x,\sqrt{-4x})$，易知点 P 的轨迹是抛物线 $y^2=-4x$ 的上半部分，

又 $\sqrt{\left(x+4\right)^2+\left(\sqrt{-4x}-2\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2-4x}=\left|PA\right|+\left|PF\right|$，

因为 $F(-1,0)$ 为抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点，由抛物线的定义知，$\left|PF\right|$ 等于 P 到准线 $x=1$ 的距离，

所以 $\sqrt{\left(x+4\right)^2+\left(\sqrt{-4x}-2\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2-4x}$ 的最小值为 $1-(-4)=5$，



故选：A.

12. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$底面 $ABCD,\angle ABD=60^\circ,PB,PC$ 与底面 $ABCD$ 所成的角分别为 α,β，且 $\alpha+\beta=45^\circ$，则 $\frac{PA}{AB}=$（　　）

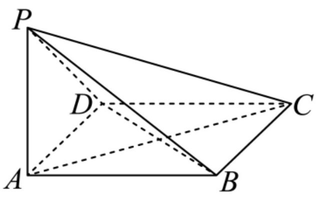
A. $\frac{\sqrt{17}-2}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{15}-2}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $AB=a,PA=b$，利用线面角的定义，结合正切函数的和差公式得到关于 $\frac{b}{a}$ 的方程，解之即可得解.

【详解】如图，设 $AB=a,PA=b$，



因为在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=60^\circ$，所以 $AC=BD=2a$，

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$，

所以 $\angle PBA,\angle PCA$ 分别是 PB,PC 与底面 $ABCD$ 所成的角，即 $\alpha=\angle PBA,\beta=\angle PCA$，

所以 $\tan\alpha=\tan\angle PBA=\frac{b}{a},\tan\beta=\tan\angle PCA=\frac{b}{2a}$.

因为 $\alpha+\beta=45^\circ$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{b}{a}+\frac{b}{2a}}{1-\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{2a}}=1$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$(负根舍去)，