

# 第 08 讲 新高考新结构命题下的 立体几何解答题综合训练 (10 类核心考点精讲精练)



在新课标、新教材和新高考的“三新”背景下，高考改革又一次具有深度的向前推进。这不仅仅是一场考试形式的变革，更是对教育模式和教育理念的全面革新。

当前的高考试题设计，以“三维”减量增质为核心理念，力求在减少题目数量的同时，提升题目的质量和考查的深度。这具体体现在以下三个方面：

## (1) 三考

题目设计着重考查学生的知识主干、学习能力和学科素养，确保试题能够全面、客观地反映学生的实际水平。

## (2) 三重

强调对学生思维深度、创新精神和实际应用能力的考查，鼓励学生不拘泥于传统模式，展现个人的独特见解和创造力。

## (3) 三突出

试题特别突出对学生思维过程、思维方法和创新能力的考查，通过精心设计的题目，引导学生深入思考和探索，培养逻辑思维 and 创新能力。

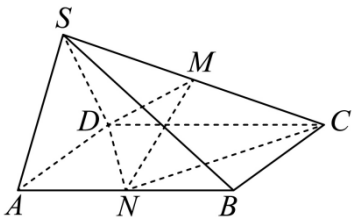
面对新高考新结构试卷的 5 个解答题，每个题目的考查焦点皆充满变数，无法提前预知。立体几何版块作为一个重要的考查领域，其身影可能悄然出现在第 15 题中，作为一道 13 分的题目，难度相对较为适中，易于学生入手。同样不能忽视的是，立体几何版块也可能被置于第 18、19 题这样的压轴大题中，此时的分值将提升至 17 分，挑战学生的解题能力和思维深度，难度自然相应加大。

面对如此多变的命题趋势，教师在教学备考过程中必须与时俱进。不仅要深入掌握不同题目位置可能涉及的知识点及其命题方式，更要能够灵活应对，根据试题的实际情况调整教学策略。本文基于新高考新结构试卷的特点，结合具体的导数解答题实例，旨在为广大师生提供一份详尽的导数解答题综合训练指南，以期在新高考中取得更好的成绩。



### 考点一、空间中平行关系的证明

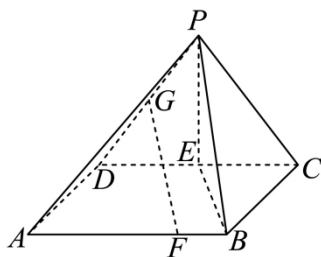
1. (2024·河南新乡·模拟预测) 如图, 在四棱锥  $S-ABCD$  中,  $\triangle SAD$  为正三角形, 底面  $ABCD$  为矩形, 且平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $M, N$  分别为棱  $SC, AB$  的中点.



(1) 证明:  $MN \parallel$  平面  $SAD$ ;

(2)若  $AB > AD$ ，且二面角  $C-MN-D$  的大小为  $120^\circ$ ，求  $\frac{AB}{AD}$  的值.

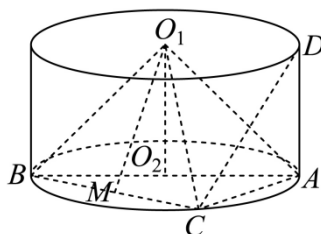
2. (2024·浙江嘉兴·模拟预测)如图,已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是边长为 6 的正方形,侧面  $PCD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PC = PD = 5$ , 点  $E, G$  分别是  $DC, DP$  的中点, 点  $F$  在棱  $AB$  上且  $AF = 3FB$ .



(1)求证:  $FG \parallel$  平面  $BPE$ ;

(2)求直线  $FG$  与平面  $PBC$  所成的角的正弦值.

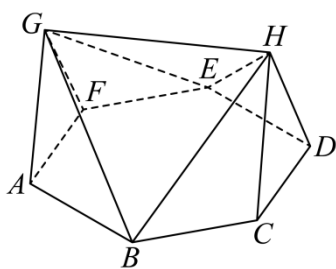
3. (2024·福建泉州·模拟预测)如图,在圆柱  $O_1O_2$  中,  $AD, AB$  分别为圆柱的母线和下底面的直径,  $C$  为底面圆周上一点.



(1)若  $M$  为  $BC$  的中点, 求证:  $O_1M \parallel$  平面  $ACD$ ;

(2)若  $AC = 1, BC = \sqrt{3}$ , 圆柱  $O_1O_2$  的体积为  $\pi$ , 求二面角  $B-O_1C-A$  的正弦值.

4. (2024·陕西西安·模拟预测)如图,在九面体  $ABCDEFGH$  中, 平面  $AGF \perp$  平面  $ABCDEF$ , 平面  $AFG \parallel$  平面  $HCD$ ,  $AG = GF = CH = HD = \sqrt{21}$ ,  $AB = 6$ , 底面  $ABCDEF$  为正六边形.

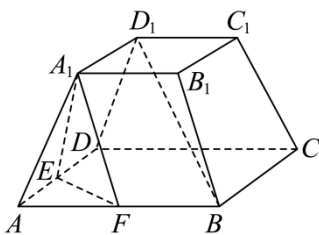


(1)证明:  $GH \parallel$  平面  $ABCDEF$ .

(2)证明:  $GH \perp$  平面  $AFG$ .

(3)求  $GE$  与平面  $ABG$  所成角的正弦值.

5. (2024·贵州贵阳·二模)由正棱锥截得的棱台称为正棱台.如图,正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $AD, AB$  的中点,  $AB = 2A_1B_1 = 4$ , 侧面  $BB_1C_1C$  与底面  $ABCD$  所成角为  $45^\circ$ .

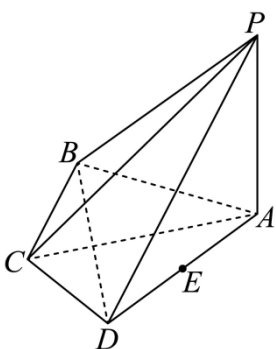


(1) 求证:  $BD_1 \parallel$  平面  $A_1EF$ ;

(2) 线段  $AB$  上是否存在点  $M$ , 使得直线  $D_1M$  与平面  $A_1EF$  所成的角的正弦值为  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ , 若存在, 求出线段  $AM$  的长; 若不存在, 请说明理由.

## 考点二、空间中垂直关系的证明

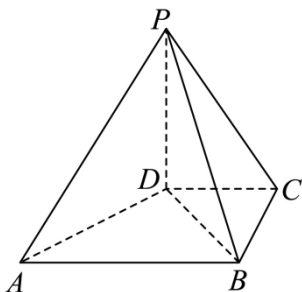
1. (2024·陕西商洛·三模) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PAC \perp$  平面  $PBD$ ,  $AB = AD = AP = 2$ .



(1) 证明:  $BD \perp PC$ ;

(2) 若  $E$  为  $AD$  的中点,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 求  $E$  到平面  $PBD$  的距离.

2. (2024·江苏宿迁·一模) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  为梯形, 其中  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ ,  $AB = 2BC = 2CD = 4$ , 平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ .

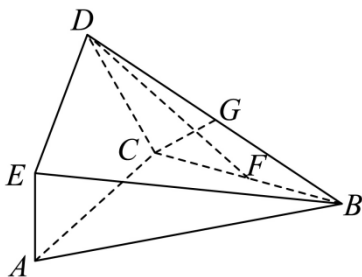


(1) 证明:  $AD \perp PD$ ;

(2) 若  $AB \perp PD$ , 且  $PC$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值为 2, 求平面  $PBC$  与平面  $PAD$  所成二面角的正弦值.

3. (2024·全国·模拟预测) 如图, 将  $\triangle ABC$  绕边  $BC$  旋转得到  $\triangle DBC$ , 其中  $AC = BC = 2$ ,  $AC \perp BC$ ,  $AE \perp$  平

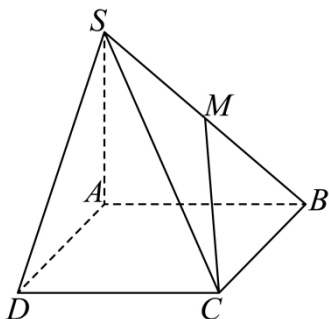
面  $ABC$ ,  $AE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 连结  $DE, F, G$  分别是  $BC, BD$  的中点,  $DF \parallel$  平面  $ABE$ .



(1) 求证:  $CD \perp DE$ ;

(2) 求  $CG$  与平面  $ABE$  所成角的正弦值.

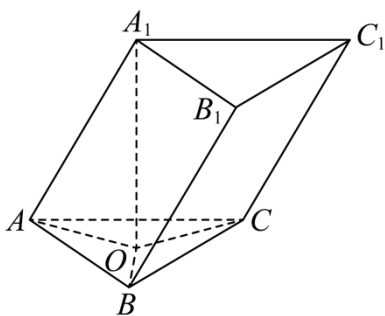
4. (2024·安徽·一模) 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $SA = AD = 2$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $SC = 4$ ,  $M$  是  $SB$  的中点,  $MC \perp BD$ .



(1) 证明:  $SA \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若点  $P$  是棱  $SC$  上的动点, 直线  $AP$  与平面  $AMC$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{30}}{10}$ , 求  $\frac{SP}{SC}$  的值.

5. (2024·江苏徐州·模拟预测) 如图, 在斜三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\triangle ABC$  为边长为 3 的正三角形, 侧面  $BB_1C_1C$  为正方形,  $A_1$  在底面  $ABC$  内的射影为点  $O$ .



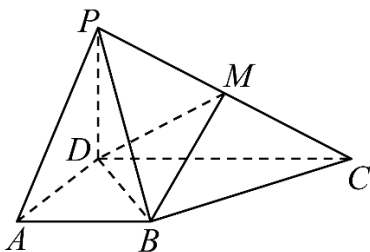
(1) 求证:  $OB = OC$ ;

(2) 若  $OA = OB = OC$ , 求直线  $AA_1$  和平面  $BB_1C_1C$  的距离.

### 考点三、空间向量法求空间角与空间距离

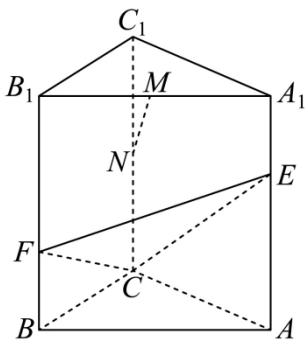
1. (2024·天津北辰·三模) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \perp DC$ ,  $AB \parallel DC$ ,

$AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2$ ,  $PD = 2$ ,  $M$  为棱  $PC$  的中点.



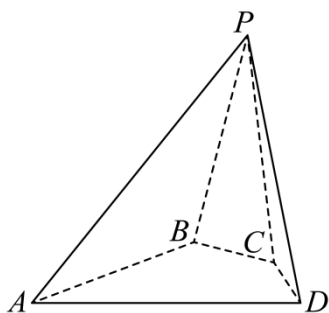
- (1) 证明:  $BM \parallel$  平面  $PAD$ ;
- (2) 求平面  $PDM$  和平面  $DMB$  夹角的余弦值;
- (3) 求  $A$  点到直线  $PC$  的距离.

2. (2024·河北·模拟预测) 如图所示, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $M, N$  分别为棱  $A_1B_1, CC_1$  的中点,  $E, F$  分别是棱  $AA_1, BB_1$  上的点,  $A_1E = BF = \frac{1}{3}AA_1$ .



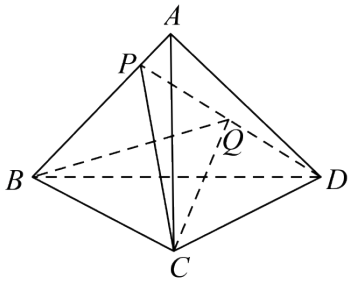
- (1) 求证: 直线  $MN \parallel$  平面  $CEF$ ;
- (2) 若三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  为正三棱柱, 求平面  $CEF$  和平面  $ACC_1A_1$  的夹角的大小.

3. (2024·江西新余·模拟预测) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AD = 4$ ,  $CD = 2$ ,  $PB = 3$ ,  $PA = 2\sqrt{6}$ , 平面  $PDC \perp$  平面  $ABCD$ .



- (1) 求证: 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ .
- (2) 求二面角  $P-BC-D$  的余弦值.
- (3)  $G$  为平面  $PBC$  内一点, 若  $DG \perp$  平面  $PBC$ , 求  $BG$  的长.

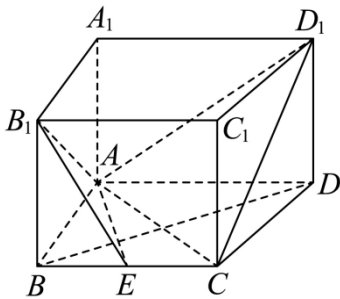
4. (2024·贵州·模拟预测) 在三棱锥  $ABCD$  中,  $AC \perp$  平面  $BCD$ ,  $P$  是  $AB$  上一点, 且  $3AB = 4BP$ , 连接  $CP$  与  $DP$ ,  $Q$  为  $DP$  中点.



(1) 过  $Q$  点的平面平行于平面  $ACD$  且与  $BC$  交于点  $M$ , 求  $\frac{BM}{CM}$ ;

(2) 若平面  $PCD \perp$  平面  $ABC$ , 且  $AC = 2BC = 2CD = 4$ , 求点  $P$  到平面  $BCQ$  的距离.

5. (2024·辽宁沈阳·三模) 已知四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AA_1 = AB = BC$ ,  $AB + AD = 6$ , 在底面四边形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \perp AD$ , 点  $E$  是  $BC$  的中点.

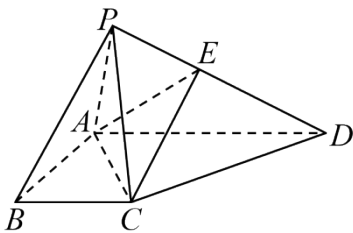


(1) 若平面  $ACD_1 \perp$  平面  $CDD_1$ , 求三棱锥  $D_1 - ACD$  的体积;

(2) 设  $AB = t$  且  $t > 1$ , 若直线  $BD$  与平面  $AB_1E$  所成角等于  $60^\circ$ , 求  $t$  的值.

### 考点四、几何法求空间角与空间距离

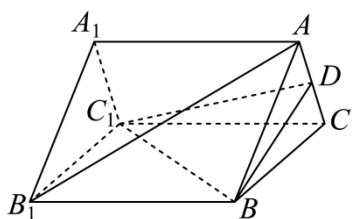
1. (2024·辽宁丹东·一模) 如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp AB$ ,  $PA = PB = PC = AD = 2$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 1$ , 点  $E$  在棱  $PD$  上.



(1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若平面  $ACE$  分两部分几何体  $PABCE$  与  $ACDE$  的体积之比  $3:2$ , 求二面角  $E - AC - D$  的正弦值.

2. (2024·重庆渝中·模拟预测) 如图, 已知在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 2$ ,  $BB_1 = \sqrt{2}$ ,  $D$  为边  $AC$  的中点.

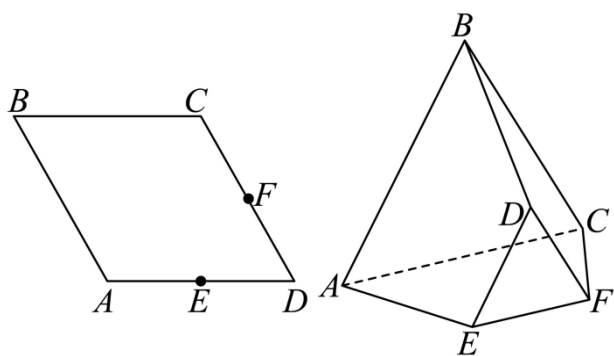


(1)证明:  $AB_1 \perp BC_1$ ;

(2)求三棱锥  $D-BCC_1$  的体积;

(3)求二面角  $D-BC_1-C$  的大小.

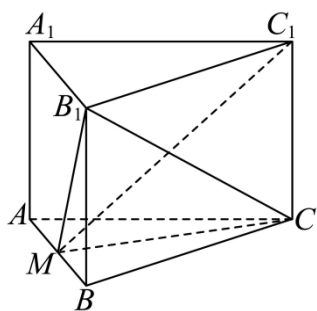
3. (2024·江西南昌·三模) 如图 1, 四边形  $ABCD$  为菱形,  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ,  $E, F$  分别为  $AD, DC$  的中点, 如图 2. 将  $\triangle ABC$  沿  $AC$  向上折叠, 使得平面  $ABC \perp$  平面  $ACFE$ , 将  $\triangle DEF$  沿  $EF$  向上折叠, 使得平面  $DEF \perp$  平面  $ACFE$ , 连接  $BD$ .



(1)求证:  $A, B, D, E$  四点共面;

(2)求平面  $AEDB$  与平面  $FDBC$  所成角的余弦值.

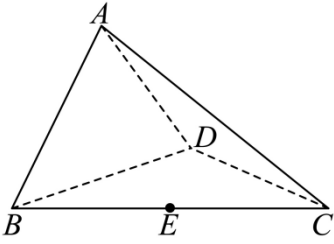
4. (2024·安徽芜湖模拟预测) 如图, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 正方形  $ABB_1A_1$  的棱长为 2,  $B_1C_1 = A_1C_1 = \sqrt{17}$ , 点  $M$  为  $AB$  中点,  $C_1M = 2\sqrt{5}$ .



(1)求证: 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  为直三棱柱;

(2)求直线  $C_1M$  与平面  $B_1MC$  所成角的余弦值.

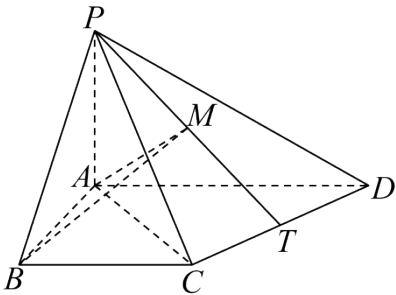
5. (2024·广东汕头·三模) 如图, 四面体  $ABCD$  中,  $E$  是  $BC$  的中点,  $CA = CB = CD = BD = 2$ ,  $AB = AD = \sqrt{2}$



- (1)求异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角余弦值的大小;  
 (2)求点  $E$  到平面  $ACD$  的距离.

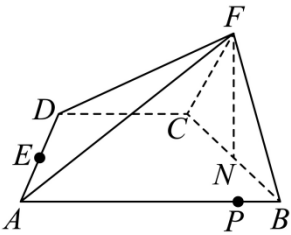
### 考点五、动点问题

1. (24-25 高二上·浙江嘉兴·阶段练习) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PB$  与底面  $ABCD$  所成角为  $45^\circ$ , 四边形  $ABCD$  是梯形,  $AD \perp AB, BC \parallel AD, AD = 2, PA = BC = 1$ .



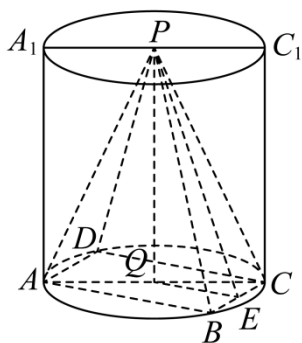
- (1)证明: 平面  $PAC \perp$  平面  $PCD$ ;  
 (2)若点  $T$  是  $CD$  的中点, 点  $M$  是  $PT$  的中点, 求点  $P$  到平面  $ABM$  的距离.  
 (3)点  $T$  是线段  $CD$  上的动点,  $PT$  上是否存在一点  $M$ , 使  $PT \perp$  平面  $ABM$ , 若存在, 求出  $M$  点坐标, 若不存在, 请说明理由.

2. (2024·全国·模拟预测) 如图, 已知四边形  $ABCD$  是直角梯形,  $AB \parallel DC, \angle BAD = \angle BCF = 60^\circ$ ,  $NF \perp$  平面  $ABCD, N$  是  $BC$  的中点,  $E$  是  $AD$  的中点,  $\triangle BCF$  的面积为  $3\sqrt{3}$ , 四棱锥  $F-ABCD$  的体积为  $8\sqrt{3}$ .



- (1)求证:  $AD \perp$  平面  $DFN$ ;  
 (2)若  $P$  是线段  $AB$  上一动点, 当二面角  $C-EF-P$  的大小为  $90^\circ$  时, 求  $\frac{PB}{AB}$  的值.

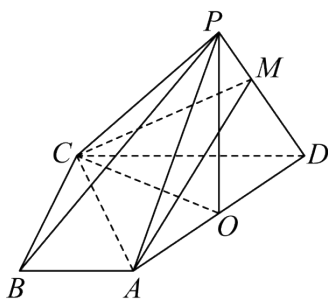
3. (23-24 高二上·广西·阶段练习) 如图, 已知直圆柱的上、下底面圆心分别为  $P, Q$ ,  $AA_1C_1C$  是圆柱的轴截面, 正方形  $ABCD$  内接于下底面圆  $Q$ , 点  $E$  是  $BC$  中点,  $AB = 6\sqrt{2}, AA_1 = 6$ .



(1) 求证：平面  $PQE \perp$  平面  $PBC$ ；

(2) 若点  $M$  为线段  $PQ$  上的动点，求直线  $BM$  与平面  $PBC$  所成角的余弦值的最小值.

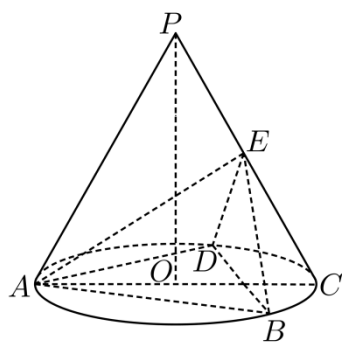
4. (2024·江西新余·二模) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是直角梯形， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，且  $PA = PD = AD$ ， $PC = PB$ .



(1) 若  $O$  为  $AD$  的中点，证明：平面  $POC \perp$  平面  $ABCD$ ；

(2) 若  $\angle CDA = 60^\circ$ ， $AB = \frac{1}{2}CD = 1$ ，线段  $PD$  上的点  $M$  满足  $\vec{DM} = \lambda \vec{DP}$ ，且平面  $PCB$  与平面  $ACM$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{7}$ ，求实数  $\lambda$  的值.

5. (2023·山东潍坊·三模) 如图， $P$  为圆锥的顶点， $O$  是圆锥底面的圆心， $AC$  为底面直径， $\triangle ABD$  为底面圆  $O$  的内接正三角形，且边长为  $\sqrt{3}$ ，点  $E$  在母线  $PC$  上，且  $AE = \sqrt{3}$ ， $CE = 1$ .



(1) 求证： $PO \parallel$  平面  $BDE$ ；

(2) 求证：平面  $BED \perp$  平面  $ABD$

(3) 若点  $M$  为线段  $PO$  上的动点. 当直线  $DM$  与平面  $ABE$  所成角的正弦值最大时，求此时点  $M$  到平面  $ABE$  的距离.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/175232003224012041>