

福建省厦门双十中学 2023-2024 学年高二上学期第二次月

考数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 的倾斜角为 ()

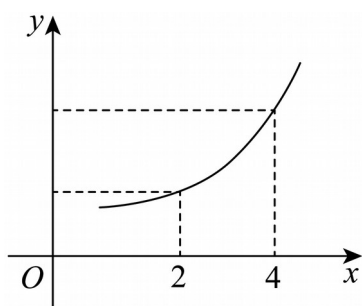
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 3 倍, 则 E 的离心率为

()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 则下列大小关系正确的是 ()



A. $2f'(4) < f(4) - f(2) < 2f'(2)$

B. $2f'(2) < f(4) - f(2) < 2f'(4)$

C. $2f'(4) < 2f'(2) < f(4) - f(2)$

D. $f(4) - f(2) < 2f'(4) < 2f'(2)$

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_6}{S_3} = 4$, 则 $\frac{S_9}{S_6} =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{11}{6}$

5. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=1$, $a_2a_6-6a_4-16=0$, 则 $\frac{S_6}{a_4-1} =$

()

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

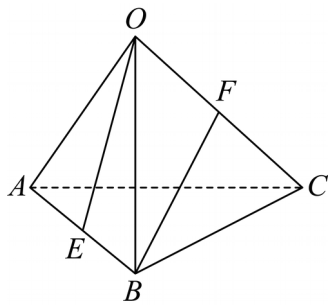
6. 直线 l 的方向向量为 $\vec{m}=(1,0,-1)$, 且 l 过点 $A(1,1,1)$, 则点 $P(-2,4,2)$ 到 l 的距离为

()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{11}$ D. $\sqrt{6}$

7. 如图, 在正四面体 $OABC$ 中, E, F 分别为 AB, OC 的中点, 则异面直线 OE 与

BF 所成角的余弦值为 ()



- A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 已知 $\odot M: x^2+y^2-2x-2y-2=0$, 直线 $l: 2x+y+2=0$, P 为 l 上的动点, 过点

P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 AB 弦长最小时, 则直线 AB 的方程为

()

- A. $2x-y-1=0$ B. $2x+y-1=0$ C. $2x+y+1=0$ D. $2x-y+1=0$

二、多选题

9. 若圆 $C: (x-1)^2+(y+2)^2=4$ 上恰有四个点到直线 $l: 2x+y+m=0$ 的距离等于 1, 则

m 的值可能是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$, $a_5=8$, 则 ()

- A. $\{a_n a_{n+1}\}$ 的公比为 4 B. $\{\log_2 a_n\}$ 的前 20 项和为 170
C. $\{a_n\}$ 的前 10 项积为 2^{35} D. $\{a_n + a_{n+1}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3}{2}(2^{n-1}-1)$

11. 抛物线有如下光学性质: 由其焦点射出的光线经抛物线反射后, 沿平行于抛物线

对称轴的方向射出. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点

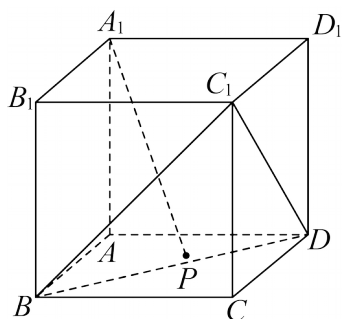
$M(3,1)$ 射入, 经过抛物线上的点 $P(x_1, y_1)$ 反射后, 再经抛物线上另一点 $Q(x_2, y_2)$ 反射

后, 沿直线 l_2 射出, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $k_{PQ} = -\frac{3}{4}$ B. $x_1 x_2 = 1$
C. $|PQ| = \frac{25}{4}$ D. l_1 与 l_2 之间的距离为 4

12. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$, 其

中 $\lambda \in [0,1], \mu \in [0,1]$, 则 ()



- A. 存在点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 BCC_1B_1 B. 存在点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 BDC_1
C. 当 $A_1P = \sqrt{5}$ 时, $\sqrt{3}\lambda + \mu$ 的最大值为 1 D. 当 $A_1P = \sqrt{5}$ 时, $\sqrt{3}\lambda + \mu$ 的最小值为

三、填空题

13. 已知 $\vec{a} = (2, 4, x)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$, 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面, 则 x 的值为_____.

14. 已知平面内的动点 P 到两定点 $A(2, 0), B(4, 0)$ 的距离分别为 $|PA|$ 和 $|PB|$, 且 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$,

则点 P 到直线 $3x - 4y + 6 = 0$ 的距离的最大值为_____.

15. “康托尔尘埃”具有典型的分形特征, 其生成过程如下: 在单位正方形中, 首先

将正方形等分成 9 个边长为 $\frac{1}{3}$ 的小正方形, 保留靠角的 4 个小正方形, 记 4 个小正方形

面积之和为 S_1 ; 然后将保留的 4 个小正方形分别继续 9 等分, 继续分别保留靠角的 4

个小正方形, 记 16 个小正方形面积之和为 S_2 ; 以此类推. 若操作过程不断进行 n 次,

则 $\sum_{k=1}^n S_k = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 斜率为 1 的直线与双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 交于两点 A, B , 点 C 是曲

线 E 上的一点, 满足 $AC \perp BC$, $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 的重心分别为 P, Q , $\triangle ABC$ 的外心为

R , 记直线 OP, OQ, OR 的斜率为 k_1, k_2, k_3 , 若 $k_1 k_2 k_3 = -8$, 则双曲线 E 的离心

率为_____.

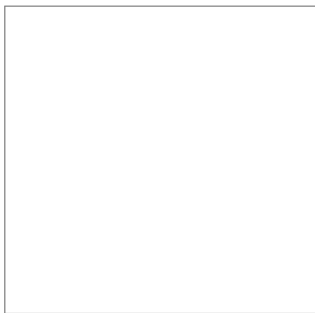
四、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 3^{n-1}$, 令 $c_n = a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = 2$, M , N 分别为 A_1B_1 , AC 的中点.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的余弦值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $na_{n+1} - (n+1)a_n = 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. 习总书记说: “绿水青山就是金山银山”. 某地响应号召, 投入资金进行生态环境建设, 并以此发展旅游产业, 根据规划, 2021 年投入 1000 万元, 以后每年投入将比上

一年减少 $\frac{1}{5}$, 当地 2021 年度旅游业收入约为 500 万元, 由于该项建设对旅游业的促进

作用, 预计今后的旅游业收入每年会比上一年增加 $\frac{1}{4}$.

(1) 设 n 年内 (2021 年为第一年) 总投入为 S_n 万元, 旅游业总收入为 T_n 万元, 写出 S_n ,

T_n 的表达式;

(2)至少到哪一年, 旅游业的总收入才能超过总投入.

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$, $\lg 5 \approx 0.6990$)

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 动圆 P 与圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - \frac{45}{4} = 0$ 内切, 且与圆 $C_2:$

$x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ 外切, 记动圆 P 的圆心的轨迹为 E .

(1)求轨迹 E 的方程;

(2)过圆心 C_2 的直线交轨迹 E 于 A, B 两个不同的点, 过圆心 C_1 的直线交轨迹 E 于

D, G 两个不同的点, 且 $AB \perp DG$, 求四边形 $ADBG$ 面积的最小值.

22. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, M 为椭圆上任

意一点, $|MF|$ 的最大值为 $2 + \sqrt{3}$. 当 $|OM| = |OF|$ 时, $\triangle MOF$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2) A, B 为椭圆的左、右顶点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 当 M 与 A, B 不重合时, 射线

MP 交椭圆 C 于点 N , 直线 AM, BN 交于点 T , 求 $\angle ATB$ 的最大值.

参考答案:

1. A

【分析】根据题意，求得直线的斜率，得出 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，结合倾斜角的定义，即可求解.

【详解】由直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ ，可得直线的斜率为 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

设直线的倾斜角为 α ，可得 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

因为 $\alpha \in [0, \pi)$ ，所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

故选：A.

2. B

【分析】根据题意可得 $2a = 6b$ ，再根据离心率公式即可得解.

【详解】由题意， $2a = 6b$ ，所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ ，

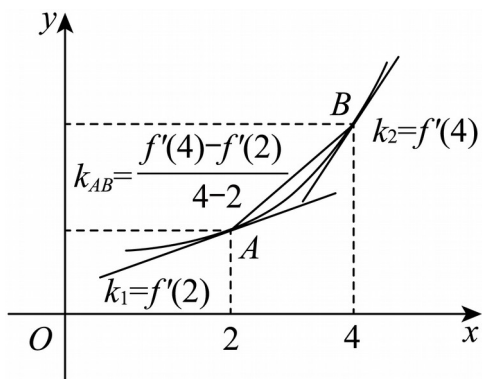
则离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选：B.

3. B

【分析】由函数图象及导函数几何意义得到 $f'(2) < \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} < f'(4)$ ，得到答案.

【详解】由图象可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $k_1 < k_{AB} < k_2$ ，



故 $f'(2) < \frac{f(4)-f(2)}{4-2} < f'(4)$, 即 $2f'(2) < f(4)-f(2) < 2f'(4)$.

故选: B.

4. C

【分析】由已知条件利用等差数列前 n 项和公式推导出 $d = 2a_1$, 由此能求出 $\frac{S_9}{S_6}$ 的值

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_6}{S_3} = 4$,

$$\therefore \frac{6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d}{3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d} = 4, \text{ 整理得 } d = 2a_1,$$

$$\therefore \frac{S_9}{S_6} = \frac{9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d}{6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d} = \frac{9a_1 + 36d}{6a_1 + 15d} = \frac{9}{4}.$$

故选: C.

5. A

【分析】先由等比中项求出 a_4 , 再根据等比数列通项公式以及前 n 项和公式计算即可.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，所以 $a_2a_6=a_4^2$ ，

则 $a_2a_6-6a_4-16=0$ 可化为 $a_4^2-6a_4-16=0$ ，解得 $a_4=8$ ，或 $a_4=-2$ (舍)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

则 $a_4=a_1q^3=q^3=8\Rightarrow q=2$ ，

所以 $S_6=\frac{1(1-2^6)}{1-2}=2^6-1=63$ ，

则 $\frac{S_6}{a_4-1}=\frac{63}{7}=9$ ．

故选：A．

6. C

【分析】求出 $\overrightarrow{AP}$ 的坐标，可得其模长，计算出 $\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|}\right|$ ，根据空间距离的向量求法，即可

得答案．

【详解】直线 l 的方向向量为 $\vec{m}=(1,0,-1)$ ，且 l 过点 $A(1,1,1)$ ，

又点 $P(-2,4,2)$ ，则 $\overrightarrow{AP}=(-3,3,1)$ ，则 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{19}$ ，

又 $\therefore \left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|}\right|=\frac{|-3\times 1+0\times 3+(-1)\times 1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 则点 $P(-2,4,2)$ ，到 l 的距离为 $\sqrt{(\sqrt{19})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$ ，

故选：C．

7. D

【分析】根据向量基本定理表示向量结合向量的数量积公式计算夹角余弦值．

【详解】设正四面体 $OABC$ 棱长为1，

设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ ，则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ ， $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=60^\circ$ ，

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle BOC = \frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BOC = \frac{1}{2}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \angle AOC = \frac{1}{2}.$$

$\because E, F$ 分别为 AB, OC 的中点， $\triangle OAB, \triangle OBC$ 是等边三角形，

$$\therefore \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}, \quad |\overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{BF}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \langle \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{BF} \rangle = \frac{\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{OE}| |\overrightarrow{BF}|} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b} \right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{\frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 异面直线 OE 与 BF 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

故选：D.

8. C

【分析】由题设得 $M(1,1)$ ，半径 $r=2$ ，在等腰 $\triangle ABM$ 中分析 $|AB|$ 最小时 $\angle AMB$ 最小，进

而得到 $\angle APB$ 最大，此时 $MP \perp l$ 且 $AB \parallel l$ ，即 $|MP|$ 最小，此时再应用余弦定理、倍角正

弦公式求 $|AB|$ ，设直线 $AB: 2x+y+C=0$ ，点线距离公式和圆中弦长的几何求法确定直线

AB 的方程.

【详解】由题设， $\odot M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，则 $M(1,1)$ ，半径 $r=2$ ，如下图所示，

等腰 $\triangle ABM$ 中 $|MA|=|MB|=2$ ，要使 $|AB|$ 最小，只需 $\angle AMB$ 最小，即有 $\angle APB$ 最大，

当且仅当 $MP \perp l$ ，即 $|MP|$ 最小时， $\angle APB$ 最大，此时 $|MP| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 2$ ，且 $AB \parallel l$ ，

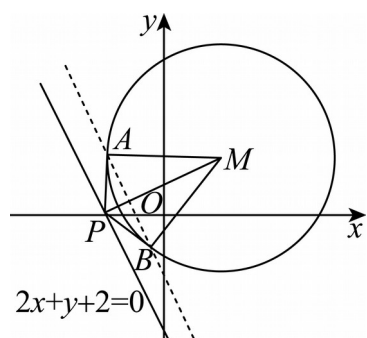
所以 $|PA| = |PB| = \sqrt{5-4} = 1$ ，而 $\sin \angle APM = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\angle APB = 2\angle APM$ ，

所以 $|AB| = \sqrt{|PA|^2 + |PB|^2 - 2|PA||PB|\cos \angle APB} = \sqrt{2 - 2 \times (1 - 2 \times \frac{4}{5})} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ，

所以 $M(1,1)$ 到直线 AB 的距离 $d = \sqrt{r^2 - (\frac{|AB|}{2})^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ，

令直线 $AB: 2x + y + C = 0$ ，则 $\frac{|3+C|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow C = -7$ 或 $C = 1$ ，

由图知： $C = 1$ ，即直线 $AB: 2x + y + 1 = 0$ 。



故选：C

9. ABC

【分析】根据题意可知：圆心 $C(1,-2)$ 到直线 l 的距离等于 $d < r - 1 = 1$ ，结合点到直线的距离公式运算求解。

【详解】由题意可知：圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 的圆心 $C(1,-2)$ ，半径 $r = 2$ ，

若圆 C 上恰有四个点到直线 l 的距离等于 1，

则圆心 $C(1,-2)$ 到直线 l 的距离等于 $d < r - 1 = 1$ ，则 $\frac{|m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} < 1$ ，

解得 $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$,

显然 $0, 1, 2 \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}), 3 \notin (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

故选: ABC.

10. ABC

【分析】利用等比数列的性质、等差数列、等比数列的求和公式计算即可.

【详解】由题意可知 $q^3 = \frac{a_5}{a_2} = 8$, 所以 $q = 2, a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{1}{2}$,

所以 $a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$, $\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}} = q^2 = 4$, A 对;

由上可知: $\log_2 a_n = n - 2$, 所以 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_{20} = -1 + 0 + \cdots + 18 = 170$,

B 对;

而 $a_1 a_2 \cdots a_{10} = 2^{-1+0+\cdots+8} = 2^{35}$, C 对;

记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

$\{a_n + a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 $= S_n + S_{n+1} - a_1 = \frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2} + \frac{\frac{1}{2}(1-2^{n+1})}{1-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(2^n - 1)$,

D 错,

故选: ABC.

11. BC

【分析】由抛物线的光学性质可知, 直线 PQ 过焦点 $F(1,0)$, 设直线 $PQ: x = my + 1$, 代入

$y^2 = 4x$, 由韦达定理得 $y_1 y_2 = -4$, 进而求得 $x_1 x_2 = 1$, 可判断 B; 先求点 P 的坐标, 再结合

$y_1 y_2 = -4$ 可得点 Q 的坐标, 然后利用斜率公式即可判断 A; 根据抛物线的定义可知

$|PQ| = x_1 + x_2 + p$ ，可判断 C；由于 l_1 与 l_2 平行，所以 l_1 与 l_2 之间的距离 $d = |y_1 - y_2|$ ，可判断 D.

【详解】由抛物线的光学性质可知，直线 PQ 过焦点 $F(1,0)$ ，设直线 $PQ: x = my + 1$ ，

代入 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，则 $y_1 y_2 = -4$ ，所以 $(y_1 y_2)^2 = 16x_1 x_2 = 16$ ，

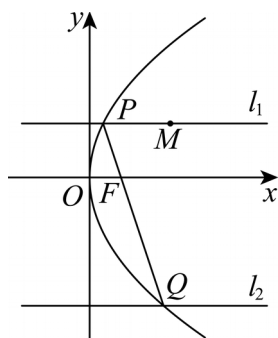
所以 $x_1 x_2 = 1$ ，故 B 正确；

点 P 与 M 均在直线 l_1 上，则点 P 的坐标为 $(\frac{1}{4}, 1)$ ，由 $y_1 y_2 = -4$ 得 $y_2 = -4$ ，

点 Q 的坐标为 $(4, -4)$ ，则 $k_{PQ} = \frac{-4-1}{4-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$ ，故 A 错误；

由抛物线的定义可知， $|PQ| = x_1 + x_2 + p = \frac{1}{4} + 4 + 2 = \frac{25}{4}$ ，故 C 正确；

$\because l_1$ 与 l_2 平行， $\therefore l_1$ 与 l_2 之间的距离 $d = |y_1 - y_2| = 5$ ，故 D 错误.



故选：BC.

12. BC

【分析】利用线面垂直的判定定理判断选项 A;利用线面垂直的判定定理证明选项 B; 根据

$A_1 P = \sqrt{5}$ 时，得 $AP = \sqrt{A_1 P^2 - AA_1^2} = 1$ ，进而确定 P 在平面 $ABCD$ 内的轨迹是以 A 为圆心，

圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ ，半径为1的圆弧，设 $\angle PAB = \alpha, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，即可得 $\lambda = \frac{\cos \alpha}{2}$ ， $\mu = \frac{\sin \alpha}{2}$ ，利

用三角函数讨论最值即可求解.

【详解】对于A：由题意得 P 在正方形 $ABCD$ 的内部（包括边界），

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

若 $A_1P \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，则 P 在直线 A_1B_1 上，不符合题意，A错误.

对于B：如图，当 $\lambda = \mu = 1, P$ 与 C 重合时，连接 AC, B_1C .

$\therefore ABCD$ 是正方形，

$\therefore BD \perp AC, Q AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore BD \perp AA_1$ ，

$AA_1 \cap AC = A, AA_1, AC \subset$ 平面 ACA_1 ，

$\therefore BD \perp$ 平面 $ACA_1, \therefore A_1P \subset$ 平面 $ACC_1A_1, \therefore BD \perp A_1P$.

$Q BCC_1B_1$ 是正方形，

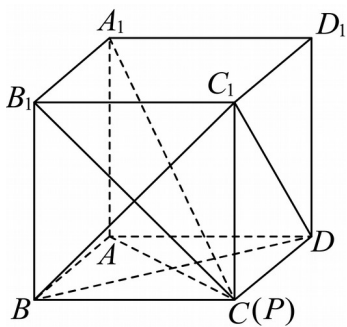
$\therefore BC_1 \perp B_1C, Q A_1B_1 \perp$ 平面 $BCC_1B_1, BC_1 \subset$ 平面 $BCC_1B_1, \therefore BC_1 \perp A_1B_1$ ，

$A_1B_1 \cap B_1C = B_1, A_1B_1, B_1C \subset$ 平面 A_1B_1C ，

$\therefore BC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C, Q A_1P \subset$ 平面 $A_1B_1C, \therefore BC_1 \perp A_1P$.

$Q BD \cap BC_1 = B, BD, BC_1 \subset$ 平面 BDC_1 ，

$\therefore A_1P \perp$ 平面 BDC_1 , B正确.



对于 CD: 如图, 当 $A_1P = \sqrt{5}$ 时, 得 $AP = \sqrt{A_1P^2 - AA_1^2} = 1$,

则 P 在平面 $ABCD$ 内的轨迹是以 A 为圆心, 圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, 半径为 1 的圆弧,

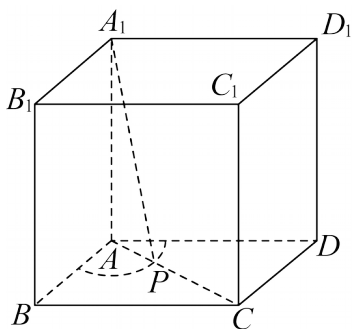
设 $\angle PAB = \alpha, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$,

则有 $|\vec{AP}| \cos \alpha = \lambda |\vec{AB}|$, 得 $\lambda = \frac{\cos \alpha}{2}$, $|\vec{AP}| \sin \alpha = \mu |\vec{AD}|$ 得 $\mu = \frac{\sin \alpha}{2}$,

$$\therefore \sqrt{3}\lambda + \mu = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right),$$

由 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 得 $\alpha + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$,

则 $\sqrt{3}\lambda + \mu = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, C 正确, D 错误.



故选:BC.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/176032131043010055>