广东省惠州市2023-2024学年高一下学期期末质量检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．在复平面中，复数$z=\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$对应的点的坐标在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．下列命题中正确的是（　）

A．零向量没有方向

B．共线向量一定是相等向量

C．若λ为实数，则向量$\vec{a}$与$\lambda\vec{a}$方向相同

D．单位向量的模都相等

3．已知数据$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_8$的平均数为10，方差为10，则$3x_1+2,3x_2+2,3x_3+2,\cdots,3x_8+2$的平均数和方差分别为（　）

A．32，90　　B．32，92　　C．30，90　　D．30，92

4．已知向量$\vec{a}=\left(1,\sqrt{2}\right)$，$\vec{b}=\left(2,0\right)$，则向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为（　）

A．$\left(1,2\right)$　　B．$\left(2,0\right)$　　C．$\left(1,0\right)$　　D．$\left(2,1\right)$

5．某校有小学生、初中生和高中生，其人数比是$5:4:3$，为了解该校学生的视力情况，采用按比例分层抽样的方法抽取一个样本量为n的样本，已知样本中高中生的人数比小学生的人数少20，则$n=$（　）

A．100　　B．120　　C．200　　D．240

6．设α，β是两个不重合的平面，m，n是两条直线，则下列命题为真命题的是（　）

A．若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

B．若$m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m//n$

C．若$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，则$\alpha//\beta$

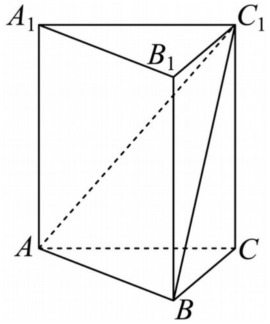
D．若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$

7．掷两颗骰子，观察掷得的点数．设事件A表示“两个点数都是偶数”，事件B表示“两个点数都是奇数”，事件C表示“两个点数之和是偶数”，事件D表示“两个点数的乘积是偶数”．那么下列结论正确的是（　）

A．A与B是对立事件　　B．A与$C\cap D$是互斥事件

C．B与D是相互独立事件　　D．B与$C\cup D$是相互独立事件

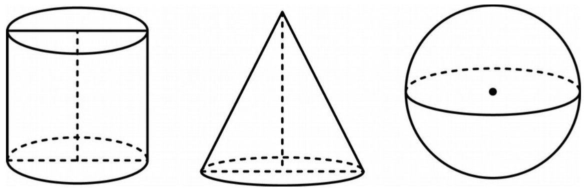
8．已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为8，二面角C_1-AB-C的大小为$\frac{\pi}{4}$，且$AC=BC$，$CC_1=2$，则点A_1到平面ABC_1的距离为（　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{4}$

二、多选题

9．如图，一个圆柱和一个圆锥的底面直径和它们的高都与一个球的直径$2R$相等，下列结论正确的是（　）



A．圆柱的侧面积为$4\pi R^2$　　B．圆锥的侧面积为$\sqrt{5}\pi R^2$

C．圆柱的侧面积与球面面积相等　　D．三个几何体的表面积中，球的表面积最小

10．设z为复数（i为虚数单位），下列命题正确的有（　　）

A．若$(1+\mathrm{i})z=-\mathrm{i}$，则$|z|=1$

B．对任意复数z_1，z_2，有$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

C．对任意复数z_1，z_2，有$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

D．在复平面内，若$M=\{z\,|\,|z-2|\le 2\}$，则集合M所构成区域的面积为6π

11．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a，b，c，下列命题正确的是（　　）

A．若$A=60°$，$a=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$

B．若$A=60°$，$a=1$，则$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$

C．若$a=2\sqrt{3}$，$b=4$，要使满足条件的三角形有且只有两个，则$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

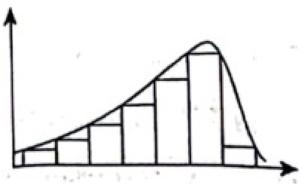
D．若$a+b=c\left(\cos A+\cos B\right)$，且$c=1$，则该三角形内切圆面积的最大值为$\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\pi$

三、填空题

12．甲、乙两人独立的解同一道题，甲、乙解对题的概率分别是$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{5}$，那么恰好只有1人解对题的概率是____.

13．已知频率分布直方图如图所示，记其平均数为a，中位数为b，则a与b的大小关系为

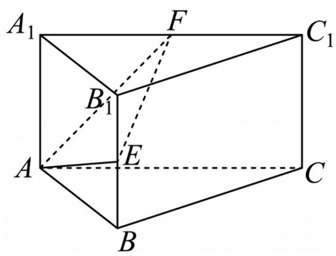
.



14．如图，已知在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，F为A_1C_1的中点，E为棱BB_1上的动点，

$AA_1=2$，$AB=2$，$BC=3\sqrt{2}$，$AC=4$.当E是棱BB_1的中点，则三棱锥$E-ABC$体积为__

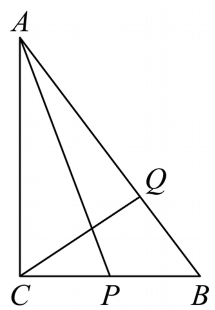
；当三棱锥A_1-AEF的外接球的半径最小时，直线EF与AA_1所成角的余弦值为____.



四、解答题

15．在$\triangle ABC$中，已知$BC=3$，$AC=4$，点P为线段BC中点，$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，设$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，

$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$.



(1)用向量$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{CQ}$；

(2)若$\angle ACB=90°$，求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CQ}$.

16．已知有下面三个条件：

①$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$；②$\frac{a}{c}=\frac{\cos A+1}{\sqrt{3}\sin C}$；③$\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}+1$；

请从这三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答问题：在$\triangle ABC$中，角A,B,C

所对的边分别是a，b，c，且________.

(1)求角A的大小；

(2)若AD是$\triangle ABC$的角平分线，且$b=2$，$c=3$，求线段AD的长.

17．为了研究学生每天总结整理数学错题情况，某课题组在我市中学生中随机抽取了100名学生调查了他们期中考试的数学成绩和平时总结整理数学错题情况，并绘制了下列两个统计图表，图1为学生期中考试数学成绩的频率分布直方图，图2为学生一个星期内总结整理数学错题天数的扇形图.若本次数学成绩在110分及以上视为优秀，将一个星期有4天及以上总结整理数学错题视为“经常总结整理”，少于4天视为“不经常总结整理”.已知数学成绩优秀的学生中，经常总结整理错题的学生占70%.

	数学成绩优秀	数学成绩不优秀	合计
经常总结整理			
不经常总结整理			
合计			

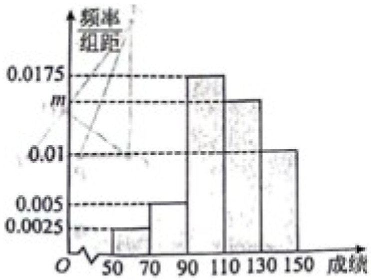


图1

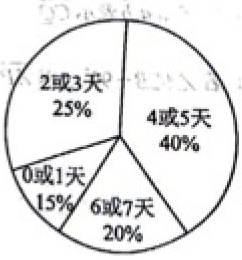


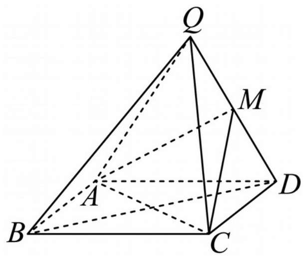
图2

(1)根据图1、图2中的数据，补全表格；

(2)求图1中m的值及学生期中考试数学成绩的第65百分位数；

(3)抽取的100名学生中按“经常总结整理错题”与“不经常总结整理错题”进行分层抽样，随机抽取5名学生，再从这5名学生中随机抽取2人进行座谈；求这2名同学均来自“经常总结整理错题”的概率.

18．如图，在四棱锥$Q-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧面QAD是正三角形，面$QAD\perp$面$ABCD$，M是QD的中点.



(1)求证：QB // 平面AMC；

(2)求直线AC与平面QCD所成角的正弦值；

(3)在棱QC上是否存在点N使平面$BDN\perp$平面AMC成立？如果存在，求出$\dfrac{QN}{NC}$如果不存在，说明理由.

19．将连续正整数1，2，└ ，$n(n\in \mathrm{N}^{*})$从小到大排列构成一个数$123\cdots n$，$F(n)$为这个数的位数(如当$n=12$时，此数为123456789101112，共有15个数字，$F(12)=15$)，现从这个数中随机取一个数字，$p(n)$为恰好取到0的概率.

(1)求$p(100)$.

(2)当$n\le 2021$时，求$F(n)$的表达式.

(3)令$g(n)$为这个数中数字0的个数，$f(n)$为这个数中数字9的个数，$h(n)=f(n)-g(n)$，

$S=\left\{n \mid h(n)=1, n \leq 100, n \in \mathrm{N}^{*}\right\}$，求当$n \in S$时$p(n)$的最大值.

参考答案：

1．C

【分析】利用复数的除法运算化简，即可求解对应的点为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$，进而得解.

【详解】$z=\frac{2-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1-5\mathrm{i}}{2}$,故对应的点为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$，

故对应的点位于第三象限，

故选：C

2．D

【分析】对于A：根据向量以及零向量的定义分析判断；对于BC：举反例说明即可；对于D：根据单位向量的定义分析判断.

【详解】对于选项A：根据向量的定义可知：任意向量均有方向，且规定零向量的方向是任意的，故A错误；

对于选项B：例如$\vec{a}=\vec{0}$，$\vec{b}$是非零向量，可知$\vec{a},\vec{b}$是共线向量但不是相等向量，故B错误；

对于选项C：例如$\vec{a}$是非零向量，且$\lambda<0$，可知向量$\vec{a}$与$\lambda\vec{a}$方向相反，故C错误；

对于选项D：根据定义可知：单位向量的模均为1，所以单位向量的模都相等，故D正确；

故选：D.

3．A

【分析】根据平均数、方差的性质计算可得.

【详解】因为$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_8$的平均数是10，方差是10，

所以$3x_1+2,3x_2+2,3x_3+2,\cdots,3x_8+2$的平均数是$3\times10+2=32$，方差是$3^2\times10=90$.

故选：A.

4．C

【分析】根据投影向量公式可得.

【详解】根据题意得$\cos\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为$|\vec{a}|\cos\vec{a}\cdot\vec{b}\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{(2,0)}{2}=(1,0)$，

故选：C.

5．B

【分析】根据分层抽样求样本中高中生和小学生的人数，列式求解即可.

【详解】由题意可知：样本中高中生的人数为$\dfrac{3}{5+4+3}n=\dfrac{1}{4}n$，小学生的人数为

$\dfrac{5}{5+4+3}n=\dfrac{5}{12}n$，

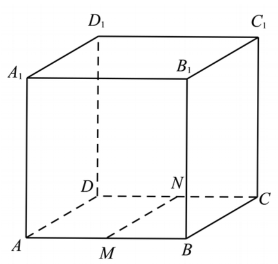
则$\dfrac{1}{4}n+20=\dfrac{5}{12}n$，解得$n=120$.

故选：B.

6．D

【分析】对于ABC：以正方体为载体，举反例说明即可；对于D：根据线面垂直的性质分析判断.

【详解】对于正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，且M,N分别为AB,CD的中点，



对于选项A：例如$AB\subset$平面$ABCD$，$A_1D_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，$AB\perp A_1D_1$，

但平面$ABCD$∥平面$A_1B_1C_1D_1$，故A错误；

对于选项B：例如A_1D_1∥平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，但$AB\perp A_1D_1$，故B错误；

对于选项C：例如$AD,MN\subset$平面$ABCD$，且AD,MN均与平面BB_1C_1C平行，

但平面$ABCD\cap$平面$BB_1C_1C=BC$，故C错误；

对于选项D：若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，由线面垂直的性质可知$m\perp n$，故D正确；

故选：D.

7．D

【分析】选项A和B，根据条件，利用互斥事件的概念，即可判断出选项A和B的正误；选项C和D，利用相互独立的判断方法，计算各自发生的概率及同时发生的概率，即可判断出正误，从而得出结果.

【详解】对于选项A，因为掷两颗骰子，两个点数可以都是偶数，也可以都是奇数，还可以一奇一偶，

即一次试验，事件A和事件B可以都不发生，所以选项A错误；

对于选项B，因为$C\cap D$即两个点数都是偶数，即A与$C\cap D$可以同时发生，所以选项B错误，

对于选项C，因为$P(B)=\frac{3\times 3}{6\times 6}=\frac{1}{4}$，$P(D)=1-\frac{3\times 3}{6\times 6}=\frac{3}{4}$，又$P(BD)=0$，所以

$P(BD)\neq P(B)P(D)$，故选项C错误，

对于选项D，因为$P(C\bigcup D)=1$，$P(B\bigcap(C\bigcup D))=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$，所以

$P(B\bigcap(C\bigcup D))=P(B)P(C\bigcup D)$，所以选项D正确，

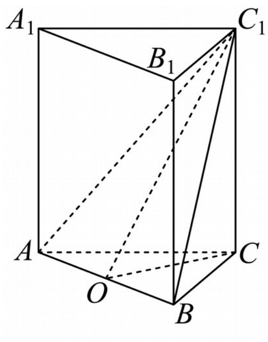
故选：D.

8．A

【分析】根据二面角的定义，找到二面角的平面角，解得OC_1，再根据直三棱柱的体积求

出AB，再利用等体积法求点A_1到平面ABC_1的距离.

【详解】取AB的中点O，连接OC,OC_1，



$\because AC=BC$，$\therefore OC\perp AB,OC_1\perp AB$，则二面角$C_1-AB-C$的平面角为$\angle C_1OC$，

$\because$二面角C_1-AB-C的大小为$\frac{\pi}{4}$，则$\angle C_1OC=\frac{\pi}{4}$，

所以$OC=CC_1=2$，$OC_1=\sqrt{OC^2+CC_1{}^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

又$\because$直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为8，$\therefore V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\vartriangle ABC}\cdot CC_1=2S_{\vartriangle ABC}=8$，

则$S_{\vartriangle ABC}=4$，$\therefore S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}AB\times 2=4\Rightarrow AB=4$，

又$\because$平面$ABC\perp$平面A_1ABB_1，平面$ABC\cap$平面$A_1ABB_1=AB$，

且$OC\perp AB,OC\subset$平面ABC，$\therefore OC\perp$平面A_1ABB_1，

设点A_1到平面ABC_1的距离为h，又$V_{A_1-ABC_1}=V_{C_1-ABA_1}$，

$\therefore\frac{1}{3}S_{\vartriangle ABC_1}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\vartriangle ABA_1}\cdot OC\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\times 2$，解得$h=\sqrt{2}$，

故选：A.

9．ABC

【分析】根据球、圆锥、圆柱的表面积公式一一计算可得；

【详解】解：依题意球的表面积为$4\pi R^2$，

圆柱的侧面积为$2\pi R\times 2R=4\pi R^2$，所以AC选项正确．

圆锥的侧面积为$\pi R\times\sqrt{R^2+(2R)^2}=\sqrt{5}\pi R^2$，所以B选项正确．

圆锥的表面积为$\pi R^2+\sqrt{5}\pi R^2=\left(1+\sqrt{5}\right)\pi R^2<4\pi R^2$，

圆柱的表面积为$4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$，所以D选项不正确．

故选：ABC

10．BC

【分析】借助复数的运算、共轭复数、复数的模及复数的几何意义逐项判断即可得．

【详解】对A：由$(1+\mathrm{i})z=-\mathrm{i}$，故$z=\frac{-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}\times(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1-\mathrm{i}}{2}$，

故$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故A错误；

对B：设$z_1=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R})$、$z_2=c+d\mathrm{i}\ (c,d\in\mathbf{R})$，

则$|z_1z_2|=|(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})|=|ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

$|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

故$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，故B正确；

对 C：设 $z_1=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R})$、 $z_2=c+d\mathrm{i}\ (c,d\in\mathbf{R})$，

有 $z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}$，则 $\overline{z_1\cdot z_2}=ac-bd-(ad+bc)\mathrm{i}$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=ac-bd-(ad+bc)\mathrm{i}$，故 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，故 C 正确；

对 D：设 $z=x+y\mathrm{i}\ (x,y\in\mathbf{R})$，则有 $(x-2)^2+y^2\le 4$，

集合 M 所构成区域为以 $(2,0)$ 为圆心，半径为 2 的圆，

故 $S=\pi\cdot 2^2=4\pi$，故 D 错误.

故选：BC.

11．AD

【分析】对于 AB：利用余弦定理结合基本不等式求 bc 的最大值，进而可得面积的最大值；

对于 C：利用余弦定理分析可得：关于 c 的方程 $c^2-8c\cos A+4=0$ 有 2 个不相等的正根，结

合二次方程列式求解；对于 D：利用余弦定理可得 $C=\frac{\pi}{2}$，再利用基本不等式求内切圆半

径的最大值，即可得结果.

【详解】对于选项 A：由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $4=b^2+c^2-bc$，

可得 $bc+4=b^2+c^2\ge 2bc$，解得 $bc\le 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，等号成立，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，故 A 正确；

对于选项 B：由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $1=b^2+c^2-bc$，

可得 $bc+1=b^2+c^2\ge 2bc$，解得 $bc\le 1$，当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立，