

湖南省湘南 2023-2024 学年高考数学四模试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学，物理，化学，生物四科竞赛，其中甲不能参加生物竞赛，则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ，则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$

3. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)，再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，则所得函数图象的一个对称中心为 ()

- A. $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ B. $\left(-\frac{3\pi}{8}, -1\right)$ C. $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{8}, -1\right)$

4. 阿基米德 (公元前 287 年—公元前 212 年)，伟大的古希腊哲学家、数学家和物理学家，他死后的墓碑上刻着一个“圆柱容球”的立体几何图形，为纪念他发现“圆柱内切球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$ ，且球的表面积也是圆柱表面积的 $\frac{2}{3}$ ”这一完美的结论. 已知某圆柱的轴截面为正方形，其表面积为 24π ，则该圆柱的内切球体积为 ()

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. 16π C. $\frac{16}{3}\pi$ D. $\frac{32}{3}\pi$

5. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边，若 $\triangle ABC$ 的面为 S ，且 $4\sqrt{3}S = (a+b)^2 - c^2$ ，则

$\sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

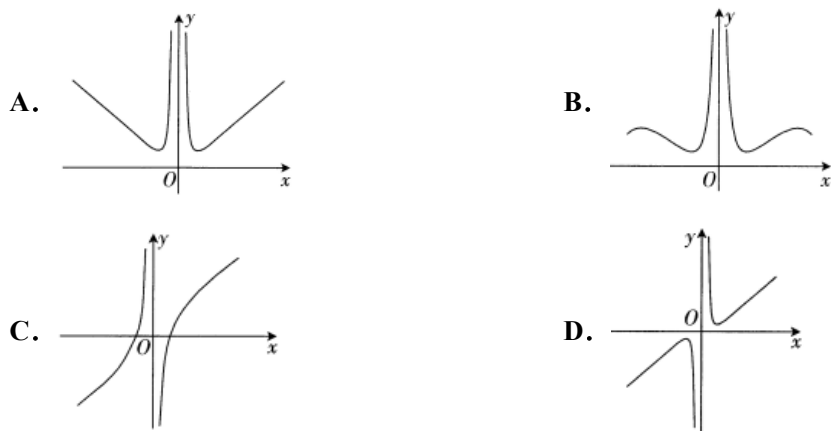
6. 已知 M 是函数 $f(x) = \ln x$ 图象上的一点，过 M 作圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2} - 3$ B. -1 C. 0 D. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3$

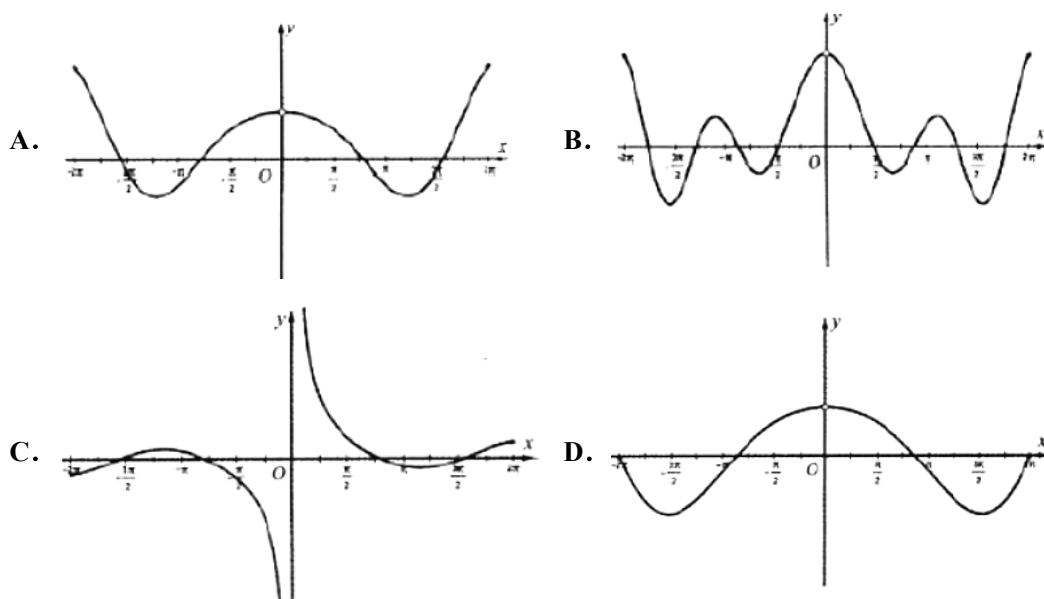
7. 由曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y^2 = x$ 所围成的平面图形的面积为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

8. 函数 $f(x) = |x| - \frac{\ln|x|}{x^2}$ 的图象大致为 ()



9. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2 \cos x}{20}$ 在 $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$ 上的图象大致为 ()



10. 函数 $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ 的单调递增区间是 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$

11. 中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”。“礼”，主要指德育；“乐”，主要指美育；“射”和“御”，就是体育和劳动；“书”，指各种历史文化知识；“数”，指数学.某校国学社团开展“六艺”课程讲座活动，每艺安排一节，连排六节，一天课程讲座排课有如下要求：“数”必须排在第三节，且“射”和“御”两门课程相邻排课，则“六艺”课程讲座不同的排课顺序共有 ()

A. 12 种

B. 24 种

C. 36 种

D. 48 种

12. 把函数 $f(x) = A \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($A \neq 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数

$g(x-m)$ ($m > 0$) 是偶函数, 则实数 m 的最小值是 ()

A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

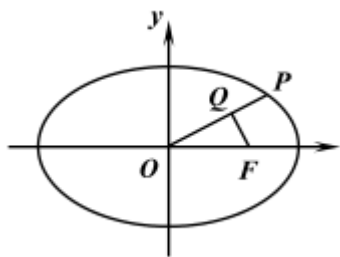
13. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F , 过点 F 且倾斜角为 45° 的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FA}$, 则 C 的离心率为_____.

14. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位, 且 $(x-2)i - y = -1 + i$, 则 $x + y =$ _____.

15. (5 分) 国家禁毒办于 2019 年 11 月 5 日至 12 月 15 日在全国青少年毒品预防教育数字化网络平台上开展 2019 年全国青少年禁毒知识答题活动, 活动期间进入答题专区, 点击“开始答题”按钮后, 系统自动生成 20 道题. 已知某校高二年级有甲、乙、丙、丁、戊五位同学在这次活动中答对的题数分别是 17, 20, 16, 18, 19, 则这五位同学答对题数的方差是_____.

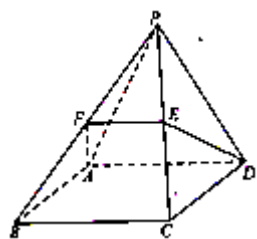
16. 如图, 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 e , F 是 Γ 的右焦点, 点 P 是 Γ 上第一象限内任意一点,

$\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP}$ ($\lambda > 0$), $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, 若 $\lambda < e$, 则 e 的取值范围是_____.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 2$, $\triangle PAD$ 为正三角形, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别为 PC, PB 的中点.



(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 PAD ;

(2) 求几何体 $ABCDEF$ 的体积.

18. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 n 、 a_n 、 S_n 成等差数列, $b_n = 2\log_2(1+a_n)-1$.

(1) 证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 中去掉数列 $\{a_n\}$ 的项后余下的项按原顺序组成数列 $\{c_n\}$, 求 $c_1+c_2+\cdots+c_{100}$ 的值.

19. (12分) 设函数 $f(x)=|x+a|+|x-a^2-a|(a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\leq 5$ 的解集;

(2) 若存在 $a\in[-1,0]$, 使得不等式 $f(x)\geq b$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

20. (12分) 已知 O 为坐标原点, 单位圆与角 x 终边的交点为 P , 过 P 作平行于 y 轴的直线 l , 设 l 与 $\frac{\pi}{3}$ 终边所在直线的交点为 Q , $f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的值域.

21. (12分) 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{\ln x}{a}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数, 求实数 a 的最大值;

(2) 若 $0<a<1$, 求证: $f(x)\geq\frac{2+\ln a}{a}$.

22. (10分) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$, 点 $P(x_0, y_0)$ 为半圆 $x^2+y^2=3(y\geq 0)$ 上一动点, 若过 P 作椭圆 C 的两切线分别交 x 轴于 M 、 N 两点.

(1) 求证: $PM\perp PN$;

(2) 当 $x_0\in\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 时, 求 $|MN|$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时，共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案；②当甲学生不参加任何比赛时，共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方案。综上所述，所有参赛方案有 $72+24=96$ 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题。

2、A

【解析】

进行交集的运算即可。

【详解】

$$Q A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{x | -2 \leq x \leq 2\},$$

$$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}.$$

故选：A。

【点睛】

本题主要考查了列举法、描述法的定义，考查了交集的定义及运算，考查了计算能力，属于基础题。

3、D

【解析】

先化简函数解析式,再根据函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律,可得所求函数的解析式为 $y = 2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$,

再由正弦函数的对称性得解.

【详解】

$$Q y = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x - (1 + \cos 2x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

$\therefore$ 将函数图象上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍,所得函数的解析式为

$$y = 2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度,所得函数的解析式为

$$y = 2 \sin\left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{6}\right] - 1$$

$$= 2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{2}k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z},$$

$k = 0$ 可得函数图象的一个对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{8}, -1\right)$, 故选 D.

【点睛】

三角函数的图象与性质是高考考查的热点之一, 经常考查定义域、值域、周期性、对称性、奇偶性、单调性、最值等, 其中公式运用及其变形能力、运算能力、方程思想等可以在这些问题中进行体现, 在复习时要注意基础知识的理解与落实. 三角函数的性质由函数的解析式确定, 在解答三角函数性质的综合试题时要抓住函数解析式这个关键, 在函数解析式较为复杂时要注意使用三角恒等变换公式把函数解析式化为一个角的一个三角函数形式, 然后利用正弦(余弦)函数的性质求解.

4、D

【解析】

设圆柱的底面半径为 r , 则其母线长为 $l = 2r$, 由圆柱的表面积求出 r , 代入圆柱的体积公式求出其体积, 结合题中的结论即可求出该圆柱的内切球体积.

【详解】

设圆柱的底面半径为 r , 则其母线长为 $l = 2r$,

因为圆柱的表面积公式为 $S_{\text{圆柱表}} = 2\pi r^2 + 2\pi r l$,

所以 $2\pi r^2 + 2\pi r \times 2r = 24\pi$, 解得 $r = 2$,

因为圆柱的体积公式为 $V_{\text{圆柱}} = Sh = \pi r^2 \cdot 2r$,

所以 $V_{\text{圆柱}} = \pi \times 2 \times 2^3 = 16\pi$,

由题知, 圆柱内切球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$,

所以所求圆柱内切球的体积为

$$V = \frac{2}{3}V_{\text{圆柱}} = \frac{2}{3} \times 16\pi = \frac{32\pi}{3}.$$

故选: D

【点睛】

本题考查圆柱的轴截面及表面积和体积公式; 考查运算求解能力; 熟练掌握圆柱的表面积和体积公式是求解本题的关键; 属于中档题.

5、D

【解析】

根据三角形的面积公式以及余弦定理进行化简求出 C 的值，然后利用两角和差的正弦公式进行求解即可.

【详解】

解：由 $4\sqrt{3}S = (a+b)^2 - c^2$,

$$\text{得 } 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} ab \sin C = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab,$$

$$\because a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C,$$

$$\therefore 2\sqrt{3}ab \sin C = 2ab \cos C + 2ab,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \sin C - \cos C = 1$$

$$\text{即 } 2 \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$\text{则 } \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < C < \pi,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} < C - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

故选 D.

【点睛】

本题主要考查解三角形的应用，结合三角形的面积公式以及余弦定理求出 C 的值以及利用两角和差的正弦公式进行计算是解决本题的关键.

6、C

【解析】

先画出函数图像和圆，可知 $|MA| = |MB|$ ，若设 $\angle AMB = 2\theta$ ，则 $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = \frac{1}{\tan \theta}$ ，所以

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MA}|^2 \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 3$ ，而要求 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值，只要 $\sin \theta$ 取得最大值，若设圆

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的圆心为 C ，则 $\sin \theta = \frac{1}{|MC|}$ ，所以只要 $|MC|$ 取得最小值，若设 $M(x, \ln x)$ ，则

$|MC|^2 = x^2 + (\ln x - 1)^2$ ，然后构造函数 $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$ ，利用导数求其最小值即可.

【详解】

记圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的圆心为 C ，设 $\angle AMC = \theta$ ，则 $|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = \frac{1}{\tan \theta}$ ， $\sin \theta = \frac{1}{|MC|}$ ，设

$M(x, \ln x)$ ， $|MC|^2 = x^2 + (\ln x - 1)^2$ ，记 $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$ ，则

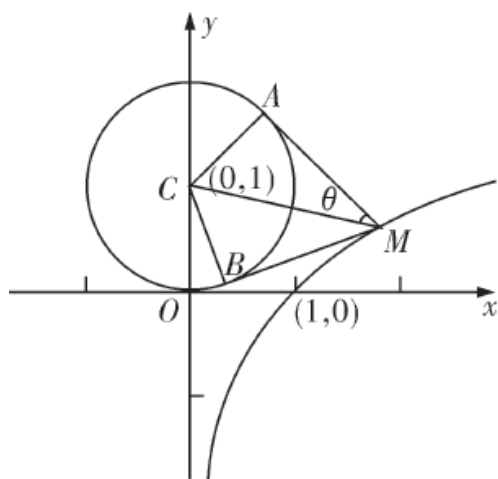
$$g'(x) = 2x + 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(x^2 + \ln x - 1)，\text{令 } h(x) = x^2 + \ln x - 1，$$

因为 $h(x) = x^2 + \ln x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且 $h(1) = 0$ ，所以当 $0 < x < 1$ 时， $h(x) < h(1) = 0$ ， $g'(x) < 0$ ；当 $x > 1$

时， $h(x) > h(1) = 0$ ， $g'(x) > 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 2$ ，即

$$|MC| \geq \sqrt{2}，0 < \sin \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}，\text{所以 } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = |\vec{MA}|^2 \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 3 \geq 0 \quad (\text{当 } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时等号成立}).$$

故选：C



【点睛】

此题考查的是两个向量的数量积的最小值，利用了导数求解，考查了转化思想和运算能力，属于难题。

7、B

【解析】

首先求得两曲线的交点坐标，据此可确定积分区间，然后利用定积分的几何意义求解面积值即可。

【详解】

$$\text{联立方程：} \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \text{ 可得：} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases},$$

结合定积分的几何意义可知曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y^2 = x$ 所围成的平面图形的面积为：

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

本题选择 B 选项.

【点睛】

本题主要考查定积分的概念与计算，属于中等题.

8、A

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性和单调性，排除错误选项，从而得出正确选项.

【详解】

因为 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 C 和 D.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{x^3 + 2\ln x - 1}{x^3},$$

令 $f'(x) < 0$ ，得 $0 < x < 1$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减；令 $f'(x) > 0$ ，得 $x > 1$ ，即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增. 所以 $f(x)$

在 $x = 1$ 处取得极小值，排除 B.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查函数图像的识别，考查利用导数研究函数的单调区间和极值，属于中档题.

9、A

【解析】

首先判断函数的奇偶性，再根据特殊值即可利用排除法解得；

【详解】

$$\text{解：依题意, } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} + \frac{(-x)^2 \cos(-x)}{20} = \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2 \cos x}{20} = f(x), \text{ 故函数 } f(x) \text{ 为偶函数, 图象关于 } y \text{ 轴}$$

对称，排除 C；

$$\text{而 } f(\pi) = -\frac{\pi^2}{20} < 0, \text{ 排除 B; } f(2\pi) = \frac{\pi^2}{5} > 0, \text{ 排除 D.}$$

故选：A.

【点睛】

本题考查函数图像的识别，函数的奇偶性的应用，属于基础题.

10、D

【解析】

利用辅助角公式,化简函数的解析式,再根据正弦函数的单调性,并采用整体法,可得结果.

【详解】

因为 $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即函数的增区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$, 所以当 $k = 0$ 时, 增区间的一个子集为 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

故选 D.

【点睛】

本题考查了辅助角公式,考查正弦型函数的单调递增区间,重点在于把握正弦函数的单调性,同时对于整体法的应用,使问题化繁为简,难度较易.

11、C

【解析】

根据“数”排在第三节,则“射”和“御”两门课程相邻有 3 类排法,再考虑两者的顺序,有 $A_2^2 = 2$ 种,剩余的 3 门全排列,即可求解.

【详解】

由题意,“数”排在第三节,则“射”和“御”两门课程相邻时,可排在第 1 节和第 2 节或第 4 节和第 5 节或第 5 节和第 6 节,有 3 种,再考虑两者的顺序,有 $A_2^2 = 2$ 种,

剩余的 3 门全排列,安排在剩下的 3 个位置,有 $A_3^3 = 6$ 种,

所以“六艺”课程讲座不同的排课顺序共有 $3 \times 2 \times 6 = 36$ 种不同的排法.

故选: C.

【点睛】

本题主要考查了排列、组合的应用,其中解答中认真审题,根据题设条件,先排列有限制条件的元素是解答的关键,着重考查了分析问题和解决问题的能力,属于基础题.

12、A

【解析】

先求出 $g(x)$ 的解析式,再求出 $g(x-m)(m>0)$ 的解析式,根据三角函数图象的对称性可求实数 m 满足的等式,从而可求其最小值.

【详解】

$f(x) = A \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) (A \neq 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,

所得图象对应的函数解析式为 $g(x) = A \sin\left(2x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = A \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right),$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/177006104032006101>