

2023—2024 学年上期期末质量调研试题

高二数学

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后,将答题卡交回.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 $(3, -4, 5)$ 关于 x 轴对称的点为 ()

- A. $(-3, 4, -5)$ B. $(3, 4, -5)$ C. $(3, -4, -5)$ D. $(-3, -4, -5)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间直角坐标系中点的对称性可得结果.

【详解】在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 $(3, -4, 5)$ 关于 x 轴对称的点为 $(3, 4, -5)$.

故选: B.

2. 过点 $P(1, 1)$ 且方向向量为 $(-1, 3)$ 的直线方程为 ()

- A. $3x + y + 4 = 0$ B. $3x + y - 4 = 0$
C. $3x - y + 2 = 0$ D. $3x - y - 2 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】首先求出直线的斜率,再利用点斜式求出直线方程;

【详解】解: 因为直线的方向向量为 $(-1, 3)$, 所以直线的斜率 $k = \frac{3}{-1} = -3$, 又函数过点 $P(1, 1)$, 所以直线方程为 $y - 1 = -3(x - 1)$, 即 $3x + y - 4 = 0$;

故选: B

3. 等差数列 $-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}, \dots$ 的第 20 项为 ()

- A. $16\sqrt{5}$ B. $17\sqrt{5}$ C. $18\sqrt{5}$ D. $19\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】写出等差数列通项公式 $a_n = \sqrt{5}(n-2)$ ，即可求解.

【详解】由题意， $a_1 = -\sqrt{5}, d = \sqrt{5}$ ，

所以 $a_n = -\sqrt{5} + \sqrt{5}(n-1) = \sqrt{5}(n-2)$ ，

则 $a_{20} = 18\sqrt{5}$.

故选：C.

4. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底，则下列向量共面的是 ()

- A. $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ B. $\vec{b}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ C. $\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ D. $\vec{a} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{a}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，由此分别判断各选项中的向量是否共面，即得答案.

【详解】由于 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底，故 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，

对于 A， $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，故 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ 不共面，

否则，若 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ 共面，则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面，不符题意，A 错误；

对于 B，假设 $\vec{b}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ 共面，则存在实数 λ, μ ，使得 $\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{c}) + \mu(\vec{a} + \vec{b})$ ，

即 $\vec{b} = (\lambda + \mu)\vec{a} + \lambda\vec{c} + \mu\vec{b}$ ，则
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$
，方程组无解，

假设不成立，故 $\vec{b}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$ 不共面，B 错误；

对于 C， $\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面，由于 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，

故 $\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 不共面，C 错误；

对于 D, $\vec{a}-\vec{b}=(\vec{c}-\vec{b})-(\vec{c}-\vec{a})$, 故 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{a}$ 共面,

故选: D

5. 抛物线 $x=\frac{1}{4}y^2$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则该双曲线的离心率为

()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求得抛物线的焦点, 根据点到直线的距离公式列方程, 求得 $b^2=a^2$, 由此求得双曲线的离心率.

【详解】抛物线 $x=\frac{1}{4}y^2$ 即 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$,

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$, 即 $bx\pm ay=0$,

所以点 $(1,0)$ 到直线 $bx\pm ay=0$ 的距离为 $\frac{|b|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $b^2=a^2$,

则双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

故选: A

6. 我国享誉世界的数学大师华罗庚曾说:“数缺形时少直观, 形少数时难入微; 数形结合百般好, 隔离分家万事休.”告知我们把“数”与“形”, “式”与“图”结合起来是解决数学问题的有效途径.若

$x^2+y^2-2x-2=0$, 则 $\frac{y}{x+1}$ 的取值范围为 ()

A. $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

B. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

D. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

【答案】D

【解析】

【分析】从斜率角度考虑, $\frac{y}{x+1}$ 可看作圆 $(x-1)^2+y^2=3$ 上的点 $P(x,y)$ 与点 $A(-1,0)$ 连线的斜率, 数形结合, 利用点到直线距离公式进行求解.

【详解】 $\frac{y}{x+1}$ 可看作圆 $(x-1)^2+y^2=3$ 上的点 $P(x,y)$ 与点 $A(-1,0)$ 连线的斜率,

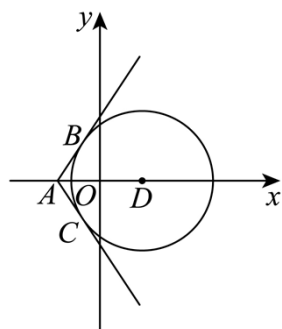
如图，只需求出临界状态：相切时的斜率，

设直线为 $y = k(x+1)$,

则圆心到直线距离 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{3}$, 解得: $k = \pm\sqrt{3}$,

所以 $\frac{y}{x+1}$ 的取值范围为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

故选: D



7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 0$, $a_{2n+1} = a_{2n} + \frac{1}{n}$, $a_{2n+2} = a_{2n+1} - \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 的第 2024 项为 ()

A. $\frac{2023}{2024}$

B. $\frac{2025}{2024}$

C. $\frac{1011}{1012}$

D. $\frac{1012}{1011}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题中条件可得到偶数项得关系 $a_{2n+2} = a_{2n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 再进行累加即得.

【详解】 $a_{2n+2} = a_{2n+1} - \frac{1}{n+1} = a_{2n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

$$\text{所以 } a_{2024} = a_{2022} + \frac{1}{1011} - \frac{1}{1012}$$

$$a_{2022} = a_{2020} + \frac{1}{1010} - \frac{1}{1011}$$

$$a_{2020} = a_{2018} + \frac{1}{1009} - \frac{1}{1010}$$

L

$$a_4 = a_2 + 1 - \frac{1}{2}$$

$$\text{累加得 } a_{2024} = a_2 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \text{L} + \frac{1}{1011} - \frac{1}{1012}\right) = 0 + 1 - \frac{1}{1012} = \frac{1011}{1012}$$

故选：C.

8. 已知 O 为坐标原点, P 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上位于 x 轴上方的点, F 为右焦点. 延长 PO , PF 交椭圆 E 于 Q, R 两点, $QF \perp FR$, $|QF| = 3|FR|$, 则 a 的值为 ()

A. $\sqrt{15}$

B. $\sqrt{10}$

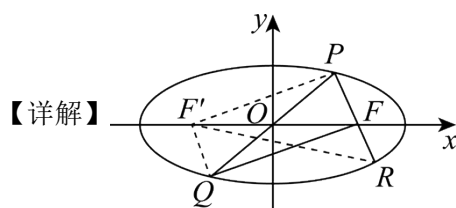
C. 3

D. $2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】结合题意和椭圆的性质, 将边长全部用 a 表示出来, 勾股定理列出方程求解即可.



如图, 设椭圆的左焦点为 F' , 连接 PF' 、 QF' 、 RF' ,

因为 $QF \perp FR$, 结合椭圆的对称性可知, 四边形 $PF'QF$ 为矩形,

设 $|PF'| = |QF| = 3t$, 则 $|PF| = 2a - 3t$, $|FR| = t$, $|F'R| = 2a - t$, $|PR| = 2a - 2t$

在 $Rt\triangle PF'R$ 中, $|PF'|^2 + |PR|^2 = |RF'|^2 \Rightarrow 9t^2 + (2a - 2t)^2 = (2a - t)^2$,

化简整理得 $t = \frac{1}{3}a$, 所以 $|PF'| = a$, $|PF| = a$,

在 $Rt\triangle PF'F$ 中, $|PF'|^2 + |PF|^2 = |FF'|^2 \Rightarrow a^2 + a^2 = (2c)^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2 = 2(a^2 - 5)$,

所以 $a = \sqrt{10}$,

故选：B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知直线 $l: (a^2 + a - 3)x + y + 1 = 0$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的有 ()

A. 直线 l 过定点 $(0, -1)$

B. 若直线 l 与直线 $x - y = 0$ 平行, 则 $a = 1$

C. 当 $a = \sqrt{3}$ 时, 直线 l 的倾斜角为 120°

D. 当 $a = 1$ 时, 直线 l 在两坐标轴上的截距相等

【答案】AC

【解析】

【分析】 由直线的点斜式方程可判定 A；由两直线平行，斜率相等可判定 B；对于 C、D，分别求出直线即可判断.

【详解】 由已知，直线 $l: y+1=-(a^2+a-3)x$,

则直线 l 过定点 $(0, -1)$ ，A 正确；

若直线 l 与直线 $x-y=0$ 平行，则 $a^2+a-3=-1$ ，

得 $a=-2$ ，或 $a=1$ ，B 错误；

当 $a=\sqrt{3}$ 时，直线 $l: y=-\sqrt{3}x-1$ ，则 $k=-\sqrt{3}$ ，

所以倾斜角为 120° ，C 正确；

当 $a=1$ 时，直线 $l: -x+y+1=0$ ，其在 x 、 y 轴上的截距分别为 1、-1，

不相等，D 错误.

故选：AC.

10. 已知方程 $\frac{x^2}{4-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 表示的曲线为 C ，则下列四个结论中正确的是 ()

A. 当 $1 < t < 4$ 时，曲线 C 是椭圆

B. 当 $t > 4$ 或 $t < 1$ 时，曲线 C 是双曲线

C. 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则 $1 < t < \frac{5}{2}$

D. 若曲线 C 是焦点在 y 轴上的双曲线，则 $t > 4$

【答案】 BCD

【解析】

【分析】 利用椭圆以及双曲线的标准方程的特征可逐一判断各选项.

【详解】 A 选项，曲线 C 是椭圆等价于 $\begin{cases} 4-t > 0 \\ t-1 > 0 \\ 4-t \neq t-1 \end{cases}$ ，解得 $1 < t < 4$ 且 $t \neq \frac{5}{2}$ ，故 A 错误；

B 选项，曲线 C 是双曲线等价于 $(4-t)(t-1) < 0$ ，解得 $t > 4$ 或 $t < 1$ ，故 B 正确；

C 选项，若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则 $4-t > t-1 > 0$ ，解得 $1 < t < \frac{5}{2}$ ，故 C 正确；

D 选项，若曲线 C 是焦点在 y 轴上的双曲线，则 $\begin{cases} t-1 > 0 \\ 4-t < 0 \end{cases}$ ，解得 $t > 4$ ，故 D 正确.

故选：BCD.

11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， S_n 是其前 n 项的和，且 $a_1 < 0$ ， $S_8 = S_{2024}$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $d > 0$ B. $S_{2032} = 0$ C. $a_{1016} = 0$ D. $S_n \geq S_{1015}$

【答案】AB

【解析】

【分析】由 $S_8 = S_{2024}$ 可得 $a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{2024} = 0$ ，进而可得 $a_{1016} + a_{1017} = 0$ ，依次判断各选项即可得出结果.

【详解】根据题意 $S_8 = S_{2024}$ 可得 $a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{2024} = 0$ ，

由等差数列性质可知 $a_{1016} + a_{1017} = 0 \Rightarrow S_{2032} = \frac{2032(a_1 + a_{2032})}{2} = \frac{2032(a_{1016} + a_{1017})}{2} = 0$.

因为 $a_1 < 0$ ，所以 $d > 0$ ，

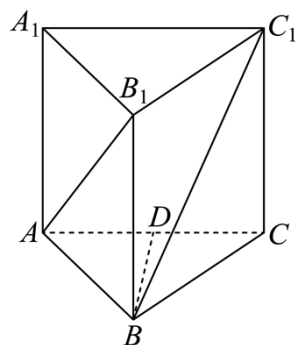
所以 $a_{1016} < 0, a_{1017} > 0$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列， $\{a_n\}$ 的前 n 项和有最小值为 S_{1016} ，所以 $S_n \geq S_{1016}$.

所以 A, B 正确，C, D 不正确；

故选：AB.

12. 如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BC_1 \perp AB_1$ ，点 D 为 AC 中点，点 E 为四边形 BCC_1B_1 内（包含边界）的动点，则以下结论正确的是 ()



A. $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{BC})$

B. 异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. 若 $DE \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 则动点 E 的轨迹的长度等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}AC$

D. 若点 E 到平面 ACC_1A_1 的距离等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}EB$, 则动点 E 的轨迹为抛物线的一部分

【答案】BCD

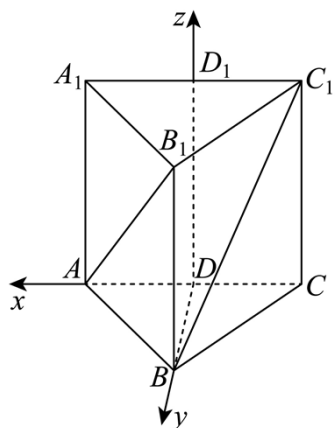
【解析】

【分析】根据空间向量的加减法运算以及通过建立空间直角坐标系求解判断 AB, 由面面平行得出动点 E 的轨迹的长度等于 BB_1 判断 C, 设点 E 在底面 ABC 的射影为 E_1 , 作 E_1F 垂直于 AC , 垂足为 F , 可证得 $EB = E_1C$, 即 E 点轨迹为抛物线, 由此可判断 D.

【详解】对于 A, $\vec{DA} = \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{BB}_1 + \vec{B}_1A) = -\frac{1}{2}(\vec{A}_1A - \vec{B}_1A + \vec{BC})$, 选项 A 错误;

对于 B, 过点 D 作 AA_1 的平行线交 A_1C_1 于点 D_1 ,

以 D 为坐标原点, $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DD}_1$ 分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$,



设正三棱柱底面边长为 a , 侧棱长为 b , 则 $A\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$, $B_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, b\right)$,

$C_1\left(-\frac{a}{2}, 0, b\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$,

所以 $\vec{BC}_1 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, b\right)$, $\vec{AB}_1 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, b\right)$,

因为 $BC_1 \perp AB_1$, 所以 $\vec{BC}_1 \cdot \vec{AB}_1 = 0$, 即 $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + b^2 = 0$, 解得 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

因为 $\vec{AC} = (-a, 0, 0)$, $\vec{BC_1} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, b\right)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{BC_1}, \vec{AC} \rangle = \frac{|\vec{BC_1} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{BC_1}| |\vec{AC}|} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}a \times a} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

所以异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$, 选项 B 正确;

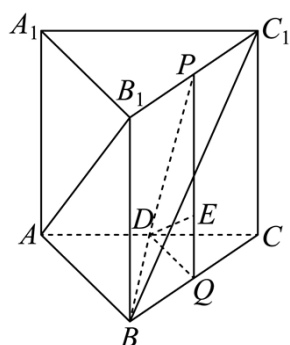
取 BC 的中点 Q , B_1C_1 的中点 P , 连接 PQ , 则 $DQ \parallel AB$, $DQ \not\subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

$AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $DQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 同理 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

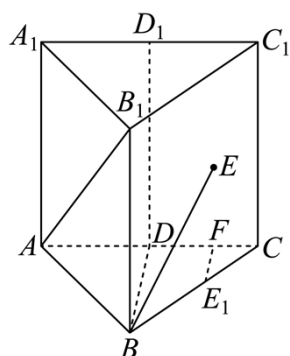
又 $DQ \cap PQ = Q$, $DQ \subset$ 平面 DPQ , $PQ \subset$ 平面 DPQ , 所以平面 $DPQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $DE \parallel$ 平面 ABB_1A_1 且 $DE \subset$ 平面 DPQ ,

所以动点 E 的轨迹的长度等于 $PQ = BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$, 故 C 正确;



对于 D, 设点 E 在底面 ABC 的射影为 E_1 , 作 E_1F 垂直于 AC , 垂足为 F ,



若点 E 到平面 ACC_1A_1 的距离等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}EB$, 即有 $E_1F = \frac{\sqrt{3}}{2}EB$, 又因为在 $\triangle E_1F$ 中,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/177023011022010024>