专题十九 两角和与差的三角函数

【高频考点解读】

1．会用向量的数量积推导出两角差的余弦公式.

2．能利用两角差的余弦公式导出两角差的正弦、正切公式.

3．能利用两角差的余弦公式导出两角和的正弦、余弦、正切公式，导出二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系.

【热点题型】

题型一　化简求值

例1、求下列各式的值：

(1) $\left(\frac{1}{\cos^2 80°}-\frac{3}{\cos^2 10°}\right)\frac{1}{\cos 20°}$；

(2) $\frac{\cos 20°}{\sin 20°}\cdot\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\tan 70°-2\cos 40°$．

【解析】 (1)∵$\frac{1}{\cos^2 80°}-\frac{3}{\cos^2 10°}=\frac{1}{\sin^2 10°}-\frac{3}{\cos^2 10°}$

$=\frac{\cos^2 10°-3\sin^2 10°}{\sin^2 10°\cos^2 10°}$

$=\frac{(\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°)(\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°)}{\sin^2 10°\cos^2 10°}$

$=\frac{4\cos 50°\cdot\cos 70°}{\frac{1}{4}\sin^2 20°}=\frac{16\cdot\sin 40°\cdot\sin 20°}{\sin^2 20°}=32\cos 20°$.

∴原式$=32\cos 20°\cdot\frac{1}{\cos 20°}=32$

(2)$\frac{\cos 20°}{\sin 20°}\cdot\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\tan 70°-2\cos 40°$

$=\frac{\cos 20°\cos 10°}{\sin 20°}+\frac{\sqrt{3}\sin 10°\sin 70°}{\cos 70°}-2\cos 40°$

$=\frac{\cos 20°\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\cos 20°}{\sin 20°}-2\cos 40°$

$=\frac{\cos 20°(\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°)}{\sin 20°}-2\cos 40°$

$=\frac{2\cos 20°(\cos 10°\sin 30°+\sin 10°\cos 30°)}{\sin 20°}-2\cos 40°$

$=\frac{2\cos 20°\sin 40°-2\sin 20°\cos 40°}{\sin 20°}=2$.

【提分秘籍】

在三角函数的化简、求值、证明中，常常对条件和结论进行合理变换、转化，特别是角的变化、名称的变化、切化弦、常数代换、幂的代换、结构变化都是常用的技巧和方法.

【举一反三】

求值：$\dfrac{\cos 15°\ \sin 9°\ +\sin 6°}{\sin 15°\ \sin 9°\ -\cos 6°}$.

【解析】 原式$=\dfrac{\cos 15°\sin 9°+\sin(15°-9°)}{\sin 15°\sin 9°-\cos(15°-9°)}$

$=\dfrac{\cos 15°\sin 9°+\sin 15°\cos 9°-\cos 15°\sin 9°}{\sin 15°\sin 9°-\cos 15°\cos 9°+\sin 15°\sin 9°}$

$=\dfrac{\sin 15°\cos 9°}{-\cos 15°\cos 9°}=-\tan 15°$

$=-\dfrac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}=\sqrt{3}-2.$

【热点题型】

题型二　条件求值问题

例2、已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求$\tan 2\alpha$和$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})$的值.

【解析】 ∵$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，

∴$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$，

且$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}$，即 $\cos\alpha=2\sin\alpha$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

∴$5\sin^2\alpha=1$，而 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

∴$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

∴$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$，

∴$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})=\sin 2\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

【提分秘籍】

(1)在三角函数式的求值过程中，要始终做好“角”的文章；特殊角与特殊值的转化；角的合并；角的分解.

(2)已知三角函数式的值，求其他三角函数式的值，一般思路为：

①先化简所求式子或所给条件；

②观察已知条件与所求式子之间的联系(从三角函数名及角入手)；

③将已知条件代入所求式子，化简求值.

【举一反三】

已知 α， $\beta\in(0,\ \pi)$， $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$， $\tan(\alpha+\beta)=1$.

(1)求$\tan\beta$及$\cos\beta$的值；

(2)求$\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\ \ 2\beta-\frac{\pi}{4}}{\sin\ \ \frac{\pi}{2}-\beta}$的值.

【解析】 (1)$\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\alpha+\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha+\beta\cdot\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2,$$

$\because\beta\in(0,\ \pi)$，$\tan\beta=2>0$，

$\therefore\beta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，$\therefore\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$$\therefore\frac{1+\sqrt{2}\cos 2\beta-\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}-\beta}=\frac{1+\cos 2\beta+\sin 2\beta}{\cos\beta}$$

$$=\frac{2\cos^2\beta+2\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2\cos\beta+2\sin\beta=\frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

【热点题型】

题型三　给值求角

例3、若$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$A$，$B$均为钝角，求$A+B$的值.

【解析】 $\because A$、B均为钝角且 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos B=-\sqrt{1-\sin^2 B}=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$