2024年普通高等学校招生全国统一模拟考试

数 学

本试卷满分150分，考试时间120分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数z满足$\frac{z}{3-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，则$z$的共轭复数$\bar{z}$在复平面上对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设集合$M=\{x|x=2k+1,k\in \mathrm{Z}\}$，$N=\{x|x=3k-1,k\in \mathrm{Z}\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{x|x=2k+1,k\in \mathrm{Z}\}$　　B. $\{x|x=3k-1,k\in \mathrm{Z}\}$

C. $\{x|x=6k+1,k\in \mathrm{Z}\}$　　D. $\{x|x=6k-1,k\in \mathrm{Z}\}$

3. 已知不共线的平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(\vec{a}+\lambda\vec{b})//(\lambda\vec{a}+2\vec{b})$，则正数$\lambda=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

4. 传输信号会受到各种随机干扰，为了在强干扰背景下提取微弱信号，可用同步累积法. 设s是需提取的确定信号的值，每隔一段时间重复发送一次信号，共发送m次，每次接收端收到的信号$X_i=s+\varepsilon_i(i=1,2,3,\cdots,m)$，其中干扰信号$\varepsilon_i$为服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，令累积信号$Y=\sum_{i=1}^{m}X_i$，则$Y$服从正态分布$N(ms,m\sigma^2)$，定义信噪比为信号的均值与标准差之比的平方，例如$X_1$的信噪比为$\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2$，则累积信号$Y$的信噪比是接收一次信号的（　　）倍

A. $\sqrt{m}$　　B. m　　C. $m^{\frac{3}{2}}$　　D. m^2

5. 已知函数$f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则“$\theta=\frac{\pi}{8}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$”是“$f\left(x+\theta\right)$为奇函数且$f\left(x-\theta\right)$为偶函数”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 在平面直角坐标系xOy中，直线$y=2x+t$与圆C：$x^2+y^2-2x+4y=0$相交于点A，B，若$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，则$t=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$或$-\frac{11}{2}$　　B. －1或－6　　C. $-\frac{3}{2}$或$-\frac{13}{2}$　　D. －2或－7

7. 已知甲、乙、丙、丁、戊5人身高从低到高，互不相同，将他们排成相对身高为“高低高低高”或“低高低高低”的队形，则甲、丁不相邻的不同排法种数为（　　）

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

8. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$上存在关于原点中心对称的两点$A$，$B$，以及双曲线上的另一点$C$，使得$\triangle ABC$为正三角形，则该双曲线离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$　　C. $\left(2,+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

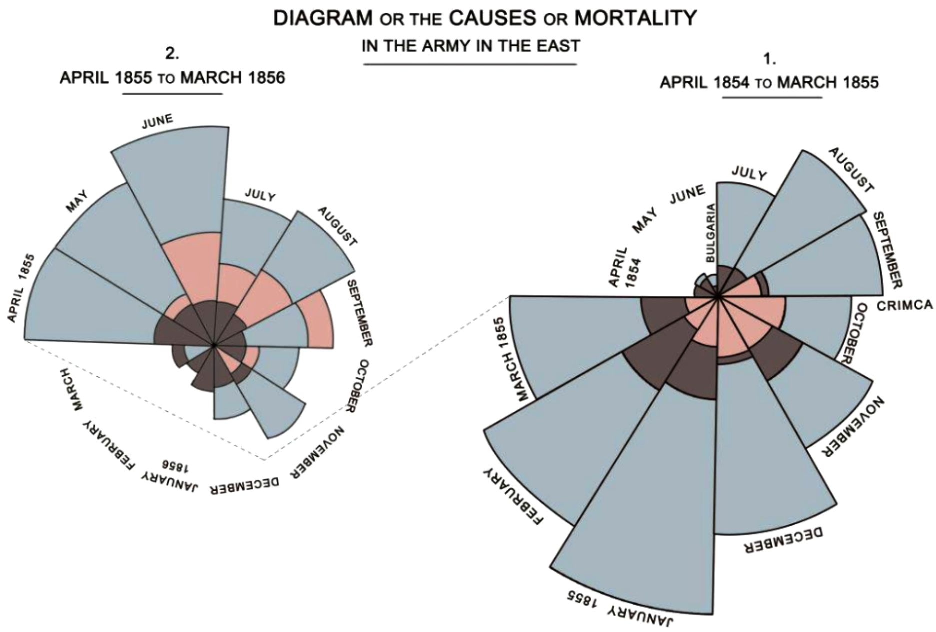
二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知函数$f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$在区间$\left(-2,+\infty\right)$上单调递增　　B. $f\left(x\right)$的最小值为$-\frac{1}{e^2}$

C. 方程$f\left(x\right)=2$的解有2个　　D. 导函数$f'\left(x\right)$的极值点为-3

10. 南丁格尔是一位英国护士、统计学家及社会改革者，被誉为现代护理学的奠基人．1854年，在克里米亚战争期间，她在接到英国政府的请求后，带领由38名志愿女护士组成的团队前往克里米亚救治伤员，并收集士兵死亡原因数据绘制了如下“玫瑰图”．图中圆圈被划分为12个扇形，按顺时针方向代表一年中的各个月份．每个扇形的面积与该月的死亡人数成比例．扇形中的白色部分代表因疾病或其他原因导致的死亡，灰色部分代表因战争受伤导致的死亡．右侧图像为1854年4月至1855年3月的数据，左侧图像为1855年4月至1856年3月的数据．下列选项正确的为（　　）



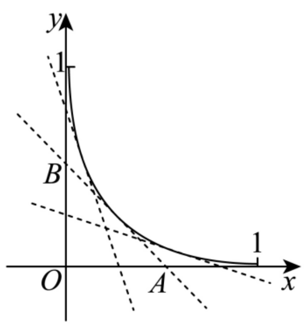
A. 由于疾病或其他原因而死的士兵远少于战场上因伤死亡的士兵

B. 1854 年 4 月至 1855 年 3 月，冬季（12 月至来年 2 月）死亡人数相较其他季节显著增加

C. 1855 年 12 月之后，因疾病或其他原因导致的死亡人数总体上相较之前显著下降

D. 此玫瑰图可以佐证，通过改善军队和医院的卫生状况，可以大幅度降低不必要的死亡

11. 如图，平面直角坐标系上的一条动直线 l 和 x，y 轴的非负半轴交于 A，B 两点，若 $|OA|+|OB|=1$ 恒成立，则 l 始终和曲线 C：$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 相切，关于曲线 C 的说法正确的有（　　）



A. 曲线 C 关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 都对称

B. 曲线 C 上的点到 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 和到直线 $y=-x$ 的距离相等

C. 曲线 C 上任意一点到原点距离的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4},1\right]$

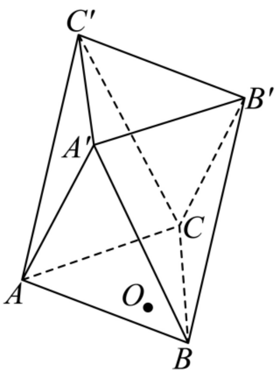
D. 曲线 C 和坐标轴围成的曲边三角形面积小于 $1-\frac{\pi}{4}$

三、填空题：本小题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 若 $\left(2x-\dfrac{a}{x}\right)^{6}$ 展开式中的常数项为 -160，则实数 $a=$______．

13. 已知公差为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $S_2=-2\left(b_3+b_4\right)^{2}$，$S_6=6\left(b_1+b_2\right)\left(b_5+b_6\right)$，则 $S_n=-\dfrac{3d}{2}n+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^{2}-2dn$ 的最小项是第______项．

14. 已知正三角形 ABC 的边长为 2，中心为 O，将 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}\right)$，然后沿垂直于平面 ABC 的方向向上平移至 $\triangle A'B'C'$，使得两三角形所在平面的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，连接 AA'，AC'，BA'，BB'，CB'，CC'，得到八面体 $ABCA'B'C'$，则该八面体体积的取值范围为______．



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边为 a，b，c，已知 $\dfrac{1}{\tan A}$，$\dfrac{1}{\cos B}$，$\dfrac{1}{\tan C}$ 是等差数列．

（1）若 a，b，c 是等比数列，求 $\tan B$；

（2）若 $B=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\cos\left(A-C\right)$．

16. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左焦点为 F，椭圆上的点到点 F 距离的最大值和最小值分别为 $\sqrt{2}+1$ 和 $\sqrt{2}-1$．

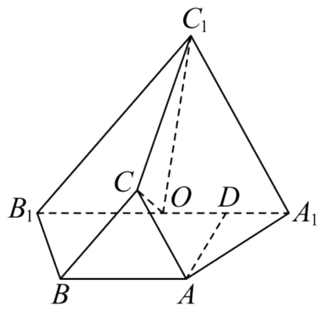
（1）求该椭圆的方程；

（2）对椭圆上不在上下顶点的任意一点 P，其关于 y 轴的对称点记为 P'，求 $\left|PF\right|+\left|P'F\right|$；

（3）过点 $Q\left(2,0\right)$ 作直线交椭圆于不同的两点 A，B，求 $\triangle FAB$ 面积的最大值．

17. 如图，已知三棱台 ABC－$A_1B_1C_1$，$AB=BC=CA=AA_1=BB_1=2$，$A_1B_1=4$，点 O 为线段 A_1B_1

的中点，点 D 为线段 OA_1 的中点.



（1）证明：直线 AD // 平面 OCC_1；

（2）若平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1，求直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 所成线面角的大小.

18. 第二次世界大战期间，了解德军坦克的生产能力对盟军具有非常重要的战略意义.已知德军的每辆坦克上都有一个按生产顺序从 1 开始的连续编号.假设德军某月生产的坦克总数为 N，随机缴获该月生产的 n 辆（$n<N$）坦克的编号为 X_1，X_2，…，X_n，记 $M=\max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$，即缴获坦克中的最大编号.现考虑用概率统计的方法利用缴获的坦克编号信息估计总数 N.

甲同学根据样本均值估计总体均值的思想，用 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ 估计总体的均值，因此

$N\overline{X}\approx\sum\limits_{i=1}^{N}i=\dfrac{N\left(N+1\right)}{2}$，得 $\overline{X}\approx\dfrac{N+1}{2}$，故可用 $Y=2\overline{X}-1$ 作为 N 的估计.

乙同学对此提出异议，认为这种方法可能出现 $Y<M$ 的无意义结果.例如，当 $N=5$，$n=3$ 时，若 $X_1=1$，$X_2=2$，$X_3=4$，则 $M=4$，此时 $Y=2\cdot\dfrac{1+2+4}{3}-1=\dfrac{11}{3}<M$.

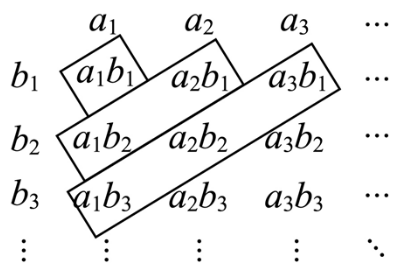
（1）当 $N=5$，$n=3$ 时，求条件概率 $P\left(Y<M\middle|M=5\right)$；

（2）为了避免甲同学方法的缺点，乙同学提出直接用 M 作为 N 的估计值.当 $N=8$，$n=4$ 时，求随机变量 M 的分布列和均值 $E\left(M\right)$；

（3）丙同学认为估计值的均值应稳定于实际值，但直观上可以发现 $E\left(M\right)$ 与 N 存在明确的大小关系，因此乙同学的方法也存在缺陷.请判断 $E\left(M\right)$ 与 N 的大小关系，并给出证明.

19. 卷积运算在图象处理、人工智能、通信系统等领域有广泛的应用．一般地，对无穷数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$，定义无穷数列 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}\left(n\in\mathrm{N}_+\right)$，记作 $\left\{a_n\right\}*\left\{b_n\right\}=\left\{c_n\right\}$，称为 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$

的卷积．卷积运算有如图所示的直观含义，即$\{c_n\}$中的项依次为所列数阵从左上角开始各条对角线上元素的和，易知有交换律$\{a_n\}*\{b_n\}=\{b_n\}*\{a_n\}$．



（1）若$a_n=n$，$b_n=2^n$，$\{a_n\}*\{b_n\}=\{c_n\}$，求c_1，c_2，c_3，c_4；

（2）对$i\in\mathbf{N}_+$，定义$T_i\{a_n\}$如下：①当$i=1$时，$T_i\{a_n\}=\{a_n\}$；②当$i\geq 2$时，$T_i\{a_n\}$为满足通项$d_n=\begin{cases}0,n<i\\ a_{n+1-i},n\geq i\end{cases}$的数列$\{d_n\}$，即将$\{a_n\}$的每一项向后平移$i-1$项，前$i-1$项都取为0．试找到数列$\{t_n^{(i)}\}$，使得$\{t_n^{(i)}\}\cdot\{a_n\}=T_i\{a_n\}$；

（3）若$a_n=n$，$\{a_n\}*\{b_n\}=\{c_n\}$，证明：当$n\geq 3$时，$b_n=c_n-2c_{n-1}+c_{n-2}$．

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数z满足$\dfrac{z}{3-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，则$z$的共轭复数$\bar{z}$在复平面上对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的运算性质求出z，再利用共轭复数的性质求出$\bar{z}$，最后利用复数和对应点的关系求解即可.

【详解】由题意得$\dfrac{z}{3-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，故$z=(1+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=3+3\mathrm{i}-\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=2\mathrm{i}+4$，

故$\bar{z}=-2\mathrm{i}+4$，显然$\bar{z}$在复平面上对应的点是$(4,-2)$，在第四象限，故 D 正确.

故选：D

2. 设集合$M=\{x|x=2k+1,k\in\mathrm{Z}\}$，$N=\{x|x=3k-1,k\in\mathrm{Z}\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{x|x=2k+1,k\in Z\}$　　　　B. $\{x|x=3k-1,k\in Z\}$

C. $\{x|x=6k+1,k\in Z\}$　　　　D. $\{x|x=6k-1,k\in Z\}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用最小公倍数排除 A，B，利用奇数和偶数排除 C，求解即可.

【详解】易知集合 $M=\{x|x=2k+1,k\in Z\}$， $N=\{x|x=3k-1,k\in Z\}$，

则 $M\cap N$ 中 k 前面的系数应为 $2,3$ 的最小公倍数，故排除 A，B，

对于 C，当 $k=1$ 时，集合 $\{x|x=6k+1,k\in Z\}$ 为 $\{x|x=7\}$，

而令 $3k-1=7$，可得 k 不为整数，故 $N=\{x|x=3k-1,k\in Z\}$ 不含有 7，

可得 $M\cap N$ 中不含有 7，故 C 错误，

故选：D

3. 已知不共线的平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})//(\lambda\vec{a}+2\vec{b})$，则正数 $\lambda=$（　　）

A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】思路一：根据向量共线的判定条件即可解出 λ .思路二：由共线向量基本定理即可得解.

【详解】方法一：由已知有 $1\cdot 2=\lambda\cdot\lambda$，$\lambda>0$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.

方法二：设 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})=\mu(\lambda\vec{a}+2\vec{b}),\mu\in R$，由题意 $\begin{cases}1=\mu\lambda\\ \lambda=2\mu>0\end{cases}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.

故选：B.

4. 传输信号会受到各种随机干扰，为了在强干扰背景下提取微弱信号，可用同步累积法. 设 s 是需提取的确定信号的值，每隔一段时间重复发送一次信号，共发送 m 次，每次接收端收到的信号 $X_i=s+\varepsilon_i\left(i=1,2,3,\cdots,m\right)$，其中干扰信号 ε_i 为服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 的随机变量，令累积信号 $Y=\sum\limits_{m}^{i=1}X_i$，则 Y 服从正态分布 $N\left(ms,m\sigma^2\right)$，定义信噪比为信号的均值与标准差之比的平方，例如 X_1 的信噪比为 $\left(\dfrac{s}{\sigma}\right)^2$，则累积信号 Y 的信噪比是接收一次信号的（　　）倍

A. $\sqrt{m}$　　B. m　　C. $m^{\frac{3}{2}}$　　D. m^2

【答案】B

【解析】

【分析】利用正态分布性质，根据信噪比的定义列式计算即可求解.

【详解】由 Y 服从正态分布 $N\left(ms, m\sigma^2\right)$，则 Y 的信噪比为 $\left(\frac{ms}{\sqrt{m}\sigma}\right)^2 = m\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2$，

又接收一次信号 X_1 的信噪比为 $\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2$，所以 $\frac{m\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2}{\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2} = m$，

所以累积信号 Y 的信噪比是接收一次信号的 m 倍.

故选：B

5. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则“$\theta=\frac{\pi}{8}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$”是“$f\left(x+\theta\right)$ 为奇函数且 $f\left(x-\theta\right)$ 为偶函数”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数奇偶性、诱导公式以及充分不必要条件的定义即可判断.

【详解】一方面，当，$\theta=\frac{\pi}{8}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 时，$f\left(x+\theta\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=-\sin 2x$ 是奇函数，

$f\left(x-\theta\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)=\cos 2x$ 是偶函数，故充分性成立，

另一方面，当 $\theta=\frac{5\pi}{8}$ 时，有 $f\left(x+\theta\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin 2x$ 是奇函数，

$f\left(x-\theta\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)=-\cos 2x$ 是偶函数，

但此时关于 k 的方程 $\frac{\pi}{8}+k\pi=\frac{5\pi}{8}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 没有解，故必要性不成立，

综上所述，在已知 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的情况下，

“$\theta=\dfrac{\pi}{8}+k\pi\left(k\in \mathbf{Z}\right)$”是“$f\left(x+\theta\right)$为奇函数且$f\left(x-\theta\right)$为偶函数”的充分而不必要条件.

故选：A.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=2x+t$ 与圆 C： $x^2+y^2-2x+4y=0$ 相交于点 A，B，若 $\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $t=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{11}{2}$　　B. －1 或－6　　C. $-\dfrac{3}{2}$或$-\dfrac{13}{2}$　　D. －2 或－7

【答案】C

【解析】

【分析】先将圆的一般方程化为标准方程，根据 $\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，得到圆心 C 到直线 l 的距离， 再利用点到直线的距离公式求得 t 的值即可.

【详解】由题意可知，圆 C： $x^2+y^2-2x+4y=0$，标准化后可得圆 C：$\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=5$

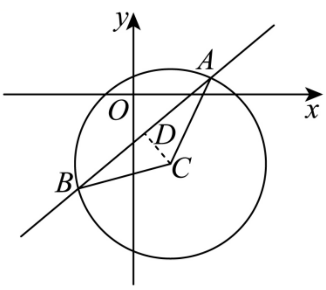
因为，$\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，过点 C 作 AB 的垂线 CD， $AB\perp CD$.如图所示，

$AC=BC=\sqrt{5}$，在 Rt$\triangle ACD$ 中，$CD=\cos\dfrac{\pi}{3}\times\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

所以，圆心 C 到直线 l 的距离:$d=\dfrac{\left|4+t\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

因此，$\left|4+t\right|=\dfrac{5}{2}$，解得，$t_1=-\dfrac{3}{2},t_2=-\dfrac{13}{2}$

故选：C .



7. 已知甲、乙、丙、丁、戊 5 人身高从低到高，互不相同，将他们排成相对身高为“高低高低高”或“低高低高低”的队形，则甲、丁不相邻的不同排法种数为（　　）

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】将排法分为两种情况讨论，再利用分类加法计数原理相加即可.

【详解】依据题意，分两种情况讨论，

情况一：高低高低高依次对应 1-5 号位置，规定甲在2号位，则乙在 1 号位或 4 号位，而甲，丁不相邻，

当乙在 1 号位时，此时为乙甲戊丙丁，共 1 种，

当乙在 4 号位时，此时有丙甲戊乙丁，戊甲丙乙丁，共 2 种，

易得倒序排列和正序排列种数相同，故本情况共 6 种，

情况二：低高低高低依次对应 1-5 号位置，假设戊在 2 号位，

若丁在 1 号位，此时有丁戊甲丙乙，丁戊乙丙甲，共 2 种，

若丁在 4 号位，此时有甲戊丙丁乙，甲戊乙丁丙，共 2 种，

易得倒序排列和正序排列种数相同，故本情况共 8 种，

故符合题意的情况有$8+6=14$种，故 B 正确.

故选：B.

8. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$上存在关于原点中心对称的两点 A，B，以及双曲线上的另一点 C，使得$\triangle ABC$为正三角形，则该双曲线离心率的取值范围是（　　）

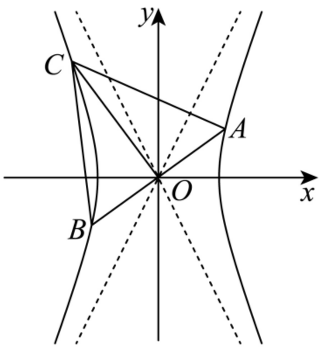
A. $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$　　C. $\left(2,+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】设点$A\left(x,y\right)$，则可取$C\left(\sqrt{3}y,-\sqrt{3}x\right)$，代入双曲线方程整理可得$\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$，结合渐近线列式求解即可.

【详解】由题意可知：双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，



设点$A\left(x,y\right)$，则可取$C\left(\sqrt{3}y,-\sqrt{3}x\right)$，

则$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{3y^2}{a^2}-\dfrac{3x^2}{b^2}=1\end{cases}$，整理得$\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}<\dfrac{b^2}{a^2}$，

解得$b^2>a^2$，即$c^2-a^2>a^2$，可得$\dfrac{c^2}{a^2}>2$，则$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}>\sqrt{2}$，

所以该双曲线离心率的取值范围是$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：1.巧妙设点：设点$A\left(x,y\right)$，根据垂直和长度关系可取$C\left(\sqrt{3}y,-\sqrt{3}x\right)$；

2.根据渐近线的几何意义可得：$\dfrac{y^2}{x^2}<\dfrac{b^2}{a^2}$.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知函数$f\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^x$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$在区间$\left(-2,+\infty\right)$上单调递增　　B. $f\left(x\right)$的最小值为$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

C. 方程$f\left(x\right)=2$的解有2个　　D. 导函数$f'\left(x\right)$的极值点为-3

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用导数判断单调性，求解最值判断A，B，将方程解的问题转化为函数零点问题判断C，对$f'\left(x\right)$构造函数再次求导，判断极值点即可.

【详解】易知$f\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^x$，可得$f'\left(x\right)=\left(x+2\right)\mathrm{e}^x$，

令 $f'(x)<0$，$x\in(-\infty,-2)$，令 $f'(x)>0$，$x\in(-2,+\infty)$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-2)=-\dfrac{1}{e^2}$，故 A，B 正确，

若讨论方程 $f(x)=2$ 的解，即讨论 $g(x)=(x+1)e^x-2$ 的零点，

易知 $g(-2)=-\dfrac{1}{e^2}-2$，$g(1)>0$，故 $g(1)\cdot g(-2)<0$，

故由零点存在性定理得到存在 $x_0\in(-2,1)$ 作为 $g(x)$ 的一个零点，

而当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-2$，显然 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内无零点，

故 $g(x)=(x+1)e^x-2$ 只有一个零点，即 $f(x)=2$ 只有一个解，故 C 错误，

令 $h(x)=f'(x)=(x+2)e^x$，故 $h'(x)=(x+3)e^x$，

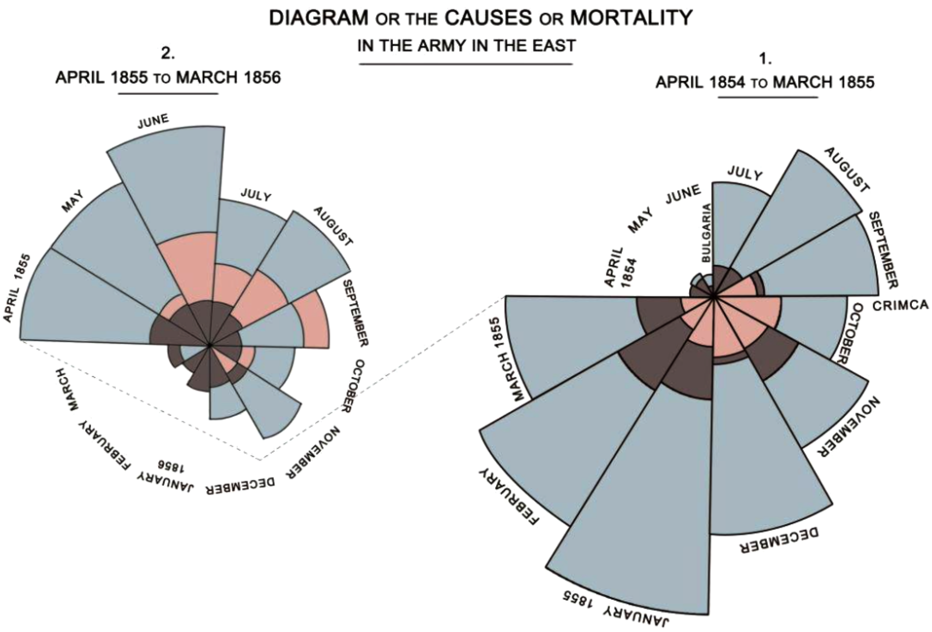
令 $h'(x)=0$，解得 $x=-3$，而 $h'(0)>0$，$h'(-4)<0$，

故 $x=-3$ 是 $h^{'}(x)$ 的变号零点，即 $x=-3$ 是 $h(x)$ 的极值点，

故得导函数 $f'(x)$ 的极值点为 -3，故 D 正确.

故选：ABD

10. 南丁格尔是一位英国护士、统计学家及社会改革者，被誉为现代护理学的奠基人．1854 年，在克里米亚战争期间，她在接到英国政府的请求后，带领由 38 名志愿女护士组成的团队前往克里米亚救治伤员，并收集士兵死亡原因数据绘制了如下“玫瑰图”．图中圆圈被划分为 12 个扇形，按顺时针方向代表一年中的各个月份．每个扇形的面积与该月的死亡人数成比例．扇形中的白色部分代表因疾病或其他原因导致的死亡，灰色部分代表因战争受伤导致的死亡．右侧图像为 1854 年 4 月至 1855 年 3 月的数据，左侧图像为 1855 年 4 月至 1856 年 3 月的数据．下列选项正确的为（　　）



A. 由于疾病或其他原因而死的士兵远少于战场上因伤死亡的士兵

B. 1854 年 4 月至 1855 年 3 月，冬季（12 月至来年 2 月）死亡人数相较其他季节显著增加

C. 1855 年 12 月之后，因疾病或其他原因导致的死亡人数总体上相较之前显著下降

D. 此玫瑰图可以佐证，通过改善军队和医院的卫生状况，可以大幅度降低不必要的死亡

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据每个扇形的面积与该月的死亡人数成比例，分析相应的面积大小或面积变化，就能判断出选项 A、B、C 的正确与否，随着 38 名志愿女护士的加入，分析未来一年“玫瑰图”每个扇形白色部分面积在逐步的变少，可以判断出因疾病或其他原因导致的死亡的士兵越来越少，是由于志愿女护士的加入，改善了军队和医院的卫生状况，从而降低了不必要的死亡，所以 D 选项是正确的.

【详解】对于 A 选项，1854 年 4 月至 1855 年 3 月, 因为每个扇形白色部分面积远大于灰色部分的面积，根据每个扇形的面积与该月的死亡人数成比例，可以得出由于疾病或其他原因而死的士兵远大于战场上因伤死亡的士兵；错误；

对于 B 选项，从右侧图像可以看出，冬季（12 月至来年 2 月）相应的扇形面积，大于其他季节时扇形的面积，表明在冬季死亡人数相较其他季节显著增加，正确；

对于 C 选项，从左侧图像可以看出，1855 年 12 月之后，每个扇形白色部分的面积较大幅度的在减少，表明因疾病或其他原因导致的死亡人数总体上相较之前显著下降，正确；

对于 D 选项，随着 38 名志愿女护士的加入，分析未来一年“玫瑰图”每个扇形白色部分面积、在逐步的变少，可以判断出因疾病或其他原因导致的死亡的士兵越来越少，