

湖北省高中名校联盟 2024-2025 学年高三上学期 8 月第一次

联合测评数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

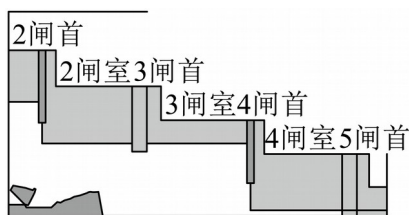
1. 已知复数 z 满足 $1+iz=z-2i$, 则 $|z|=(\quad)$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

2. 已知集合 $A=\{x|0<x^2+x\leq 6\}$, $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, 则 $A\cap B$ 包含的元素个数为
()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. 长江被称为黄金水道, 而三峡大坝则是长江上防洪发电的国之重器. 三峡大坝坝前正常蓄水位为海拔 175 米, 而坝下通航最低水位为海拔 62 米. 为了改善船舶的通航条件, 常常会通过修建阶梯船闸来实现, 船只只需要像爬楼梯一样, 以实现上升或者下降. 假设每个闸室之间的水位差均可控制在 15 至 25 米之间, 则要保证全年通航, 那么三峡大坝船闸至少需要修建闸室的个数为 ()



- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)=\frac{1}{5}$, 则 $\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)=(\quad)$

- A. $-\frac{12}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{12}{25}$

5. 已知一组数据 34, 36, 39, 41, 44, 45, x , 50 的第 65 百分位数是 45, 那么实数 x 的

取值范围是 ()

A. $[45, +\infty)$

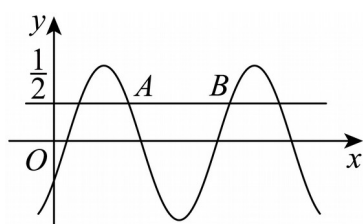
B. $(45, +\infty)$

C. $(45, 50)$

D. $[45, 50]$

6. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如下, $y = \frac{1}{2}$ 与其交于 A, B 两点. 若 $|AB| = \frac{\pi}{3}$,

则 $\omega =$ ()



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

7. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, AC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 α , AC_1 与 AB_1 所成的角为

β , 则下列关系一定成立的是 ()

A. $\alpha > \beta$

B. $\alpha + \beta = 90^\circ$

C. $\alpha + \beta > 90^\circ$

D. $\alpha + \beta < 90^\circ$

8. 设抛物线 $C: x^2 = 2y$ 的焦点为 F , 过抛物线 C 上的点 P 作 C 的切线交 x 轴于点 M , 若

$\angle FPM = 30^\circ$, 则 $|FP| =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. 2

C. $\sqrt{2}$

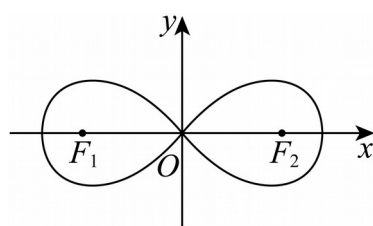
D. $\sqrt{3}$

二、多选题

9. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的各项均为整数, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是非常数数列, 且 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中存在大小相等的项, 则下列说法一定正确的是 ()

- A. 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 如果所有相等的项不止一项, 则这些项构成等差数列
- B. 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 如果所有相等的项不止一项, 则这些项构成等比数列
- C. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 则所有相等的项不止一项
- D. 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\{b_n\}$ 为递减数列, 则所有相等的项可能只有一项

10. 如图, 造型为 “ ∞ ” 的曲线 C 称为双纽线, 其对称中心在坐标原点 O , 且 C 上的点满足到点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离之积为定值 a , 则 ()

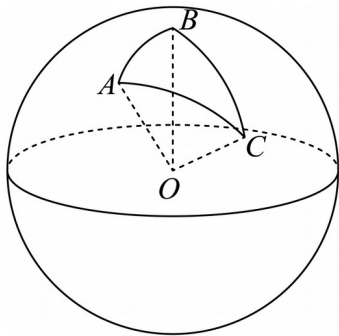


- A. 点 $(\sqrt{2}, 0)$ 在曲线 C 上
- B. 曲线 C 的方程为 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
- C. 曲线 C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 $\frac{1}{2}$
- D. 若点 (x_0, y_0) 在 C 上, 则 $y_0 > |x_0|$

11. 类比平面上的三角形是由三条线段首尾顺次相接构成的封闭图形, 我们把球面上三条大圆的劣弧 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$ 首尾顺次相接构成的封闭图形称为球面三角形. 如图所示, 分别连

接球心 O 与不在同一大圆上三点 A, B, C ，定义球面 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 分别为

二面角 $B-OA-C, A-OB-C, B-OC-A$ 的平面角。则下列说法正确的是 ()



A. 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 球的半径为 2, 则 $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{3}$

B. 存在球面三角形 ABC , 使得 $\angle A + \angle B + \angle C = \frac{3\pi}{2}$

C. 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 球的半径为 2, $OC \perp OA, OC \perp OB$, 那么球面三角形 ABC 的面积为

$$\frac{8\pi}{3}$$

D. 若 $\angle B, \angle C$ 是锐角且 $\angle B > \angle C$, 则 $\widehat{AC} > \widehat{AB}$

三、填空题

12. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 30° , 且 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$

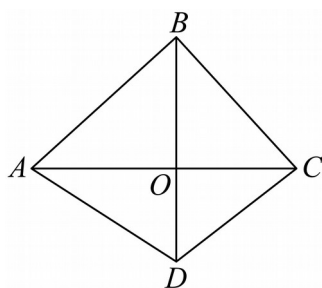
13. $(2-x^2)(x-1)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

14. 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \frac{1}{a} \log_a(x+1)$ 其中 $a > 1$, 当两函数图象对应曲线存在 2 条

公切线时则 a 的取值范围是_____.

四、解答题

15. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $AD=4$ $\cos \angle BAD = \frac{1}{8}$ $\angle BCD = 90^\circ$



(1)若 AC 与 BD 交于点 O , 且 $BD \perp AC$, 求 BO 的长;

(2)求四边形 $ABCD$ 周长的最大值.

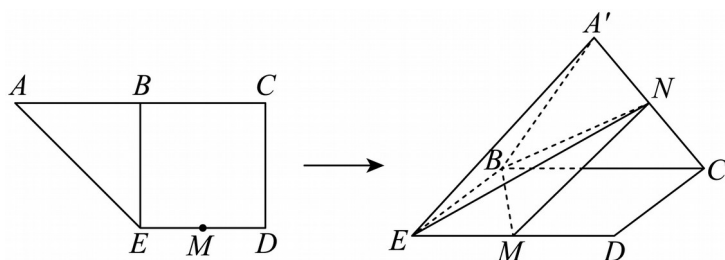
16. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 经过点 $A(1, \frac{3}{2})$, 右焦点为 $F(1,0)$

(1)求椭圆 Γ 的方程;

(2)若直线 l 与 Γ 交于 B, C 两点, 且直线 AB 与 AC 的斜率互为相反数, 求 BC 的中点 M 与 F 的最小距离.

17. 如图, 直角梯形 $ACDE$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $ED = CD = \frac{1}{2}AC = 2$, B 、 M 分别为 AC 、 ED 边

的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 边折起到 $\triangle A'BE$ 的位置, N 为边 $A'C$ 的中点.



(1)证明： $MN \parallel$ 平面 $A'BE$;

(2)当三棱锥 $A'-BEN$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 且二面角 $A'-BE-C$ 为锐二面角时, 求平面 NBM 与

平面 $BEDC$ 夹角的正切值.

18. 为抽查车辆文明驾驶情况, 在某路口设有高清摄像头, 对经过的车辆进行抓拍. 抓拍

系统设定: 经过该路口的每一辆车被抓拍的概率均为 $\frac{1}{3}$, 但为保证抽查量, 设定前 2 辆车

经过该路口都没有被抓拍时, 第 3 辆车必被抓拍. 假设汽车依次通过该路口.

(1)从某一时刻开始, 记第 n 辆车经过该路口时被抓拍的概率为 P_n , 求 P_1, P_2, P_3

(2)当任意连续有 2 辆车经过该路口时, Y_{00} 表示 2 辆车均未被抓拍的概率, Y_{01} 表示第 1

辆车未被抓拍, 且第 2 辆车被抓拍的概率, Y_{10} 表示第 1 辆车被抓拍, 且第 2 辆车未被抓拍

的概率, Y_{11} 表示 2 辆车均被抓拍的概率.

①试用 Y_{10} 和 Y_{00} 表示 Y_{01}

②求 $Y_{00}, Y_{01}, Y_{10}, Y_{11}$ 的值.

19. 牛顿法(Newton's method)是牛顿在 17 世纪提出的一种用导数求方程近似解的方法, 其

过程如下: 如图, 设 r 是 $f(x)=0$ 的根, 选取 x_0 作为 r 的初始近似值, 过点 $(x_0, f(x_0))$ 作

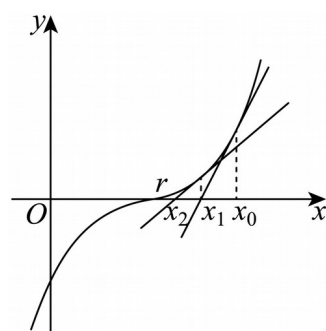
曲线 $y=f(x)$ 的切线 L , L 的方程为 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则 L 与 x 轴

的交点的横坐标记为 x_1 ，称 x_1 为 r 的一阶近似值．再过点 $(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线，

并求出切线与 x 轴的交点横坐标记为 x_2 ，称 x_2 为 r 的二阶近似值．重复以上过程，得 r 的

近似值序列： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，根据已有精确度 ε ，当 $|x_n - r| < \varepsilon$ 时，给出近似解．对于函数

$f(x) = x + \ln x$ ，已知 $f(r) = 0$ ．



(1)若给定 $x_0 = 1$ ，求 r 的二阶近似值 x_2 ；

(2)设 $x_{n+1} = g(x_n)$, $h(x) = -(x+1)g(x) - \ln x + e^x - e^{-x}$

①试探求函数 $h(x)$ 的最小值 m 与 r 的关系；

②证明： $m < \sqrt{e} - \frac{3}{4}$ ．

参考答案:

1. C

【分析】根据复数的除法运算化简复数，即可根据模长公式求解.

【详解】由 $1+iz = z-2i$ 可得 $z = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+3i}{2}$ ，所以

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

故选：C

2. B

【分析】由一元二次不等式化简集合 A ，即可由交集的定义求解.

【详解】由 $\begin{cases} 0 < x^2 + x, \\ x^2 + x \leq 6 \end{cases}$ ，解得 $0 < x \leq 2$ 或 $-3 \leq x < -1$ ，

所以 $A = \{x | 0 < x \leq 2 \text{ 或 } -3 \leq x < -1\}$ ，

故 $A \cap B = \{-3, -2, 1, 2\}$ ，

故选：B

3. B

【分析】由已知，水位差为 $175 - 62 = 113$ 米，每个闸室之间的水位差均可控制在 15 至 25

米之间，由 $113 \div 25 = 4.52$ ，可知船闸至少需要修建闸室 5 个.

【详解】因为三峡大坝坝前正常蓄水位为海拔 175 米，而坝下通航最低水位为海拔 62 米，

所以水位差为 $175 - 62 = 113$ 米，

又每个闸室之间的水位差均可控制在 15 至 25 米之间，

则 $113 \div 25 = 4.52$ ，

所以船闸至少需要修建闸室 5 个.

故选：B.

4. C

【分析】根据诱导公式以及二倍角公式即可代入求解.

【详解】

$$\cos\left(2\alpha - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\left[1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right] = -1 + 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = -1 + 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{23}{25}$$

故选: C

5. A

【分析】根据数据的总个数可得第 65 百分位是第 6 位, 可得 x 的范围.

【详解】因为 $8 \times 65\% = 5.2$, 所以这组数据的第 65 百分位数是第 6 项数据 45, 则 $x \geq 45$.

故选: A

6. A

【分析】首先解方程 $\cos(\omega x + \varphi) = \frac{1}{2}$, 结合图象, 求得方程的实数根, 即可求解 ω 的值.

【详解】令 $\cos(\omega x + \varphi) = \frac{1}{2}$, 则 $\omega x_A + \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\omega x_B + \varphi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

则 $\omega(x_B - x_A) = \frac{4\pi}{3}$, 且 $|AB| = x_B - x_A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\omega = 4$.

故选: A

【点睛】关键点点睛: 本题的关键是结合余弦函数的图象, 正确求解 A, B 两点的坐标.

7. D

【分析】根据线面角以及线线角的定义可得 $\angle C_1AC = \alpha, \angle C_1AB_1 = \beta$, 即可由锐角三角函数

表示 $\sin \alpha = \frac{CC_1}{AC_1}, \cos \beta = \frac{B_1C_1}{AC_1}, \sin \beta = \frac{B_1C_1}{AC_1}$, 结合三角函数的单调性即可求解.

【详解】由于 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 故 $\angle C_1AC = \alpha, \angle C_1AB_1 = \beta$,

$$\text{故 } \sin \alpha = \frac{CC_1}{AC_1}, \cos \beta = \frac{B_1A}{AC_1}, \sin \beta = \frac{B_1C_1}{AC_1},$$

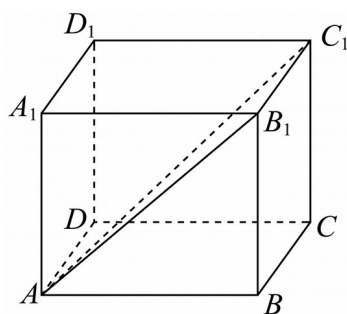
由于 CC_1, B_1C_1 的大小不确定，所以无法确定 $\sin \alpha, \sin \beta$ 的大小，故 α, β 的大小不确定，A 错误，

$$\text{由于 } \sin \alpha = \frac{CC_1}{AC_1}, \cos \beta = \frac{B_1A}{AC_1} = \frac{\sqrt{C_1C^2 + AB^2}}{AC_1} > \frac{CC_1}{AC_1},$$

$$\text{故 } \sin \alpha < \cos \beta = \sin(90^\circ - \beta),$$

由于 α, β 均为锐角，所以 $90^\circ - \beta$ 也是锐角，故 $\alpha < 90^\circ - \beta$ ，即 $\alpha + \beta < 90^\circ$ 。

故选：D



8. B

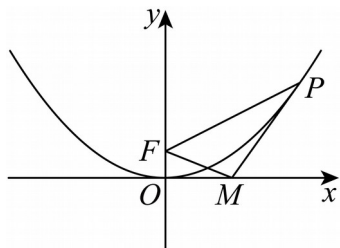
【分析】设 $P(x_0, y_0)$ ，求出过点 P 抛物线 C 的切线方程，令 $y=0$ ，可得 M 点的坐标，

由两点间距离公式表示出 $|PM|$ ， $|FM|$ ，由抛物线定义得到 $|FP| = y_0 + \frac{1}{2}$ ，在 $\triangle FPM$ 中，由

余弦定理得， $|FM|^2 = |FP|^2 + |PM|^2 - 2|FP||PM|\cos \angle FPM$ ，代入化简，解方程可得 $y_0 = \frac{3}{2}$ ，

即可得到 $|FP|$ 。

【详解】



由已知， $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $x_0^2 = 2y_0$ ，

由 $x^2 = 2y$ ，即 $y = \frac{1}{2}x^2$ ，则 $y' = x$ ，

所以过点 P 抛物线 C 的切线的斜率为 x_0 ，

则切线方程为 $y - y_0 = x_0(x - x_0)$ ，

当 $y = 0$ 时， $x = \frac{x_0^2 - y_0}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$ ，即 M 点的坐标为 $\left(\frac{y_0}{x_0}, 0\right)$ ，

$$|PM| = \sqrt{\left(x_0 - \frac{y_0}{x_0}\right)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{\frac{y_0}{2} + y_0^2}，$$

$$|FM| = \sqrt{\left(\frac{y_0}{x_0} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{y_0}{2} + \frac{1}{4}}，\quad |FP| = y_0 + \frac{1}{2}，$$

又 $\angle FPM = 30^\circ$ ，

则在 $\triangle FPM$ 中，由余弦定理得，

$$|FM|^2 = |FP|^2 + |PM|^2 - 2|FP||PM|\cos \angle FPM，$$

$$\text{则 } \frac{y_0}{2} + \frac{1}{4} = \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{y_0}{2} + y_0^2}\right)^2 - 2\left(y_0 + \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{\frac{y_0}{2} + y_0^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}，$$

整理得 $2y_0^2 + y_0 - \sqrt{3}\left(y_0 + \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{\frac{y_0}{2} + y_0^2} = 0$,

解得 $y_0 = \frac{3}{2}$,

所以 $|FP| = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

故选: B.

【点睛】关键点点睛: 设 $P(x_0, y_0)$, 利用导数的几何意义求出切线方程, 得到 M 点

的坐标, 由两点间距离公式和抛物线定义, 得到 $|PM|$, $|FM|$, $|FP|$, 在 $\triangle FPM$ 中, 由余

弦定理建立方程, 解出 y_0 , 即可求得 $|FP|$.

9. ACD

【分析】根据等差和等比数列的性质即可求解 AB, 举例即可说明 CD.

【详解】对于 A, 由于 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等差数列,

若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 公共项的最小的一项记为 a , 且 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公差分别

为 d_1, d_2 ,

若 d_1, d_2 的最小公倍数为 d , 则 $a + dk, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 均为 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公共项, 且构成等差, 故 A 正确.

对于 B, 由于 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列,

若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 公共项的最小的一项记为 a , 且 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公比分别

为 q_1, q_2 ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/177100061155006144>