



第五届新青年数学教师发展(西部)论坛 暨“嗨课堂”杯青年教师中考数学压轴题讲题比赛 (通知暨邀请函)



尊敬的_____老师/学校:

自 2014 年以来,新青年数学教师工作室已成功举办了四届新青年数学教师发展论坛,受到广大青年数学教师的关注与支持。按计划,2018 年暑假继续举办第五届新青年数学教师发展论坛。

第五届新青年数学教师发展论坛拟分为**南部、东部、西部**三个论坛,花开几朵、各自妖娆。欢迎大家根据各论坛的主题、时间、地点及个人兴趣选择参加。

坛别	主题	时间	地点
南部论坛	新青年数学教师专业发展专题报告	2018 年 8 月 1 至 4 日	贵州师范大学
东部论坛	新青年数学学校开学典礼	2018 年 8 月待定	常州工学院继续教育学院
西部论坛	新青年数学教师中考压轴题讲题比赛	2018 年 8 月 9 至 10 日	陕西渭南高新中学

第五届全国新青年数学教师发展(西部)论坛暨青年教师中考数学压轴题讲题比赛,定于 2018 年 8 月 9、10 日(周四、周五)在陕西省渭南市隆重举行,这是初中青年数学教师的盛会。

本届(西部)论坛特邀专家:

陕西师范大学博士生导师罗增儒教授;

中国教育学会《中小学数学》杂志主编、首都师范大学方运加教授。

参加本届(西部)论坛中考数学压轴题讲题比赛的代表队及赛题:

- (1)北京十一学校一分校代表队:2018 年北京市第 27 题;
- (2)西安铁一中代表队:2018 年天津市第 24 题;
- (3)沈阳市实验学校代表队:2018 年沈阳市第 25 题;
- (4)辽宁省山丽娜名师工作室代表队:2018 年武汉市第 24 题;
- (5)湖南省数学青年精英代表队:2018 年长沙市第 25 题;
- (6)西安高新一中初中代表队:2018 年陕西省第 25 题;
- (7)大连红星海学校代表队:2018 年大连市第 26 题;
- (8)河南大学附中代表队:2018 年河南省第 23 题;
- (9)深圳多维教育代表队:2018 年深圳市第 23 题;
- (10)挑战压轴题丛书代表队:2018 年上海市第 25 题;
- (11)新青年数学教师工作室陕西分站代表队(东道主):2018 年嘉兴市第 24 题。

现诚挚邀请您/贵校参加本届(西部)论坛,并将有关事宜通知如下。

一、论坛主题

把握正确导向,培养青年教师中考数学压轴题研究与教学能力



二、组织机构

1.主办单位:

新青年数学教师工作室

陕西省渭南高新中学

嗨课堂教育

2.学术支持单位:

首都师范大学《中小学数学》杂志社

华东师范大学出版社

陕西师范大学《中学数学教学参考》编辑部

三、日程安排

日期、时间		主题	主讲人或主持人	学时
8月8日	全天	外地参会人员到达渭南、入住推荐酒店	会务组	/
		参加讲题比赛的青年教师集中排练	马学斌老师	
8月9日 周四	07:30-08:00	迎接参会老师	会务组	8学时
	08:00-08:30	开幕式	刘祖希理事长	
		专家寄语青年教师	方运加教授	
	08:30-12:00	青年教师讲题比赛(4个代表队)	马学斌老师 赵辉老师	
	12:00-14:30	合影、午餐、午休		
	14:30-17:30	青年教师讲题比赛(4个代表队)	于永库副校长 孔令志副社长	
	17:30-19:00	晚餐		
	19:00-21:00	青年沙龙1(数学教研沙龙)	刘祖希理事长 潘红玉副主编	4学时
		青年沙龙2(几何画板沙龙)	马学斌老师 邵新虎老师	
8月10日 周五	08:00-12:00	青年教师讲题比赛(3个代表队)	赵辉老师 王小武老师	8学时
		名师讲座——缘定中考数学压轴题	马学斌老师	
	11:30-14:30	午餐、午休		
	14:30-16:30	专家集中点评11个代表队的讲题过程	罗增儒教授	
		校长寄语青年教师——当代青年名师成长之路	王建学校长	
	16:30-17:00	颁奖仪式、闭幕式	曹艳老师	
	17:00-	离会		
	18:00-	答谢晚宴(专家、参赛代表队、嘉宾)	王建学校长	



四、讲题比赛规则

1. 本次比赛在全国范围内邀请 11 个代表队参赛，每队参赛代表 3 人。
2. 各代表队讲本地或其他省市 2018 年数学中考压轴题。
3. 讲解过程使用黑板、直尺、圆规，回归经典教学方式。
4. 每个代表队主讲 1 人，主讲完毕，接受现场提问，代表队 3 人均可答辩。
5. 不设专家评委，没有评分标准，现场微信投票，每位投票人选 8 个满意的代表队。
6. 评奖设特等奖代表队、一等奖代表队等。每位参赛代表发个人获奖证书。
7. 所有的代表队有机会获得专家教授提名奖。有创新、有亮点、有发现等方面表现的代表队，由罗增儒教授、方运加教授提名。
8. 各代表队免费参赛，讲课的资源可以供全国各地的老师们分享。
9. 参赛代表队提前一天报到，熟悉会场环境，由马学斌老师指导排练。

五、报名、费用问题

1. 本届(西部)论坛参会对象包括全国各地初中和校外教育机构的数学教师、数学教育工作者与研究人员，以及数学爱好者，等等。特别欢迎全国各地数学教师工作室组团参加。
2. 愿意参加本届(西部)论坛的教师个人或学校，**请关注我们 2018 年 7 月 18 日零点开始发布的报名二维码、扫码报名(满额即止)**，论坛控制规模 300 人。没有及时报名或接受邀请的老师，不确保获得参会席位、会议资料。
3. **参加本届(西部)论坛及讲题比赛不收取任何费用**。参会人员的交通、住宿等自理或回单位报销。
4. 参加讲题比赛的代表队 8 月 7 日报到，8 日集训，9、10 日比赛，11 日和专家交流、主办方答谢。

六、报到问题

1. 报到时间、地点：

- (1) 专家、嘉宾按照约定时间，入住渭南高新区**爱可思精品酒店**。
- (2) 参赛代表队 2018 年 8 月 7 日报到，入住渭南高新区**爱可思精品酒店**。
- (3) 参加会议的外地老师 2018 年 8 月 8 日报到，入住渭南高新区**华年酒店、尚客优连锁酒店万达店**。
- (4) 本地不住宿的老师 2018 年 8 月 8 日下午 15:00-17:00 到渭南高新区**尚客优连锁酒店**报到、领取资料。
- (5) 会议控制规模 300 人。没有提前报名或接受邀请的老师，不能保证会议资料。

2. 酒店、会场(渭南高新中学)地址：

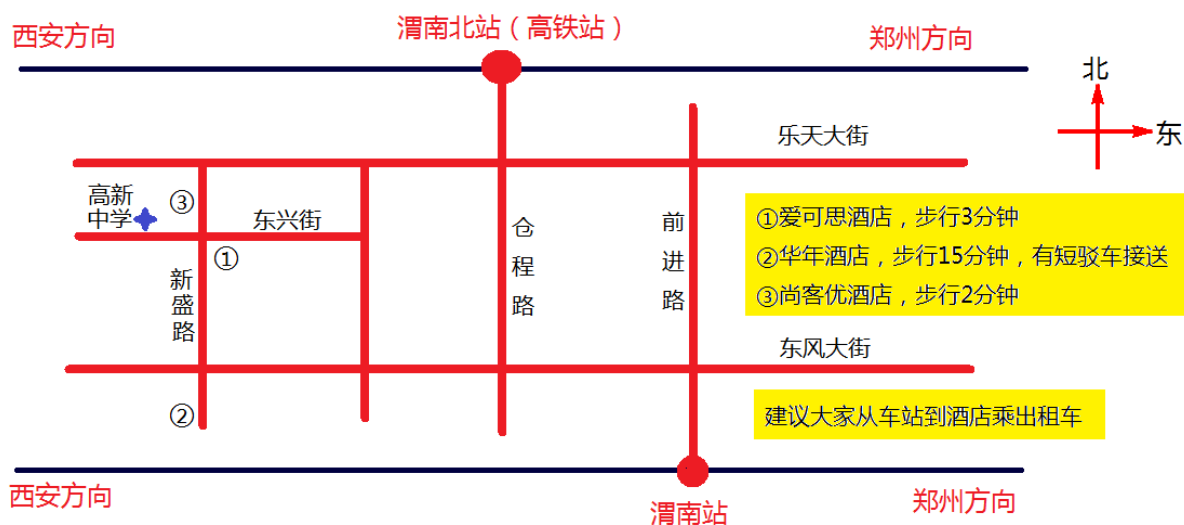
- (1) 爱可思精品酒店(图中①处)，渭南高新区新盛路与东兴街十字口东南角(渭南市公安局对面)，房间约 180 元(标间)，订房电话：0913-8183322 或 8198333。
- (2) 华年酒店(图中②处)，渭南高新区新盛路 24 号，房间约 200 元(标间)，订房电话：0913-2688000。
- (3) 尚客优连锁酒店万达店(图中③处)，渭南高新区新盛路北段 46 号(黄河工程局对面)，房间约 160 元(标间)，订房电话：0913-2087555 或 2130555。
- (4) **渭南高新中学**(图中☆处)，渭南市高新区东兴街 13 号。

3. 交通指南：

- (1) 大交通：建议到达渭南火车站或高铁渭南北站。不建议乘飞机到达西安咸阳机场，没有接机的话，机场到渭南需要等定时班车。



(2)市内交通：渭南城市不大，出租车费用不高，建议大家乘出租车到酒店。从渭南火车站、高铁渭南北站到酒店全程不超过 8 公里，打车 15 元左右。



七、其他说明

1.论坛日程、内容、专家可能临时作微调，以论坛现场为准。

2.论坛纸质会议通知、学时证明请在论坛现场领取。

3.论坛联系或咨询方式：

①新青年数学教师-论坛 QQ 群，群号：40871919；

②咨询电话：马学斌老师 138-0161-2181(微信同号)。



强烈建议准备报名参会的老师，从现在开始到会前，
认真阅读并做完以下 11 道赛题，防止现场烧脑。



赛题 1 2018 年长沙市中考第 25 题——湖南省数学青年精英代表队

如图 1, 在平面直角坐标系中, 函数 $y = \frac{m}{x}$ (m 为常数, $m > 1$, $x > 0$) 的图像经过点 $P(m, 1)$ 和 $Q(1, m)$, 直线 PQ 与 x 轴、 y 轴分别交于 C 、 D 两点. 点 $M(x, y)$ 是该函数图像上的一个动点, 过点 M 分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 垂足分别为 A 、 B .

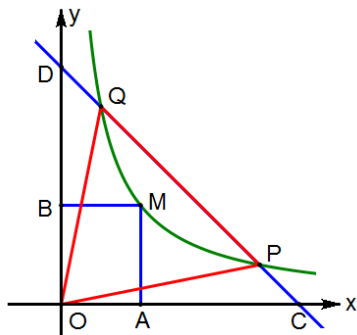


图 1

(1) 求 $\angle OCD$ 的度数;

(2) 当 $m=3$, $1 < x < 3$ 时, 存在点 M 使得 $\triangle OPM \sim \triangle OCP$, 求此时点 M 的坐标;

(3) 当 $m=5$ 时, 矩形 $OAMB$ 与 $\triangle OPQ$ 的重叠部分的面积能否等于 4.1? 请说明你的理由.

动感体验

请打开几何画板文件名“18 长沙 25”, 拖动点 M 运动, 观察 S 随 M 运动变化的函数图像, 可以体验到, S 的最大值为 4.

思路点拨

- 第 (1) 题过 P 、 Q 分别画 x 轴、 y 轴的垂线构造直角三角形 PQK , 证明 $\triangle PQK$ 是等腰直角三角形.
- 第 (2) 题中点 O 、 P 、 C 是确定的, 先根据相似三角形的对应边成比例, 求得 OM 的长, 再根据 OM 的长列方程. 求得两个点 M 需要检验舍去其中一个.
- 第 (3) 题用点 M 的横坐标 x 表示重叠部分的面积, 再列方程, 这个方程的 $\Delta < 0$.

满分解答

(1) 如图 2, 作 $PP' \perp x$ 轴于 P' , 作 $QQ' \perp y$ 轴于 Q' . 设 PP' 与 QQ' 交于点 K .

由 $\tan \angle KQP = \frac{PK}{QK} = \frac{m-1}{m-1} = 1$, 得 $\angle KQP = 45^\circ$. 所以 $\angle OCD = 45^\circ$.

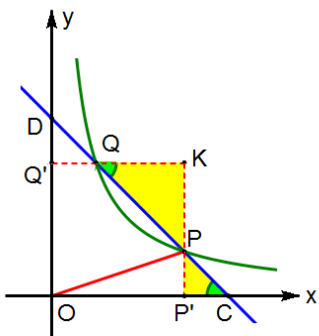


图 2

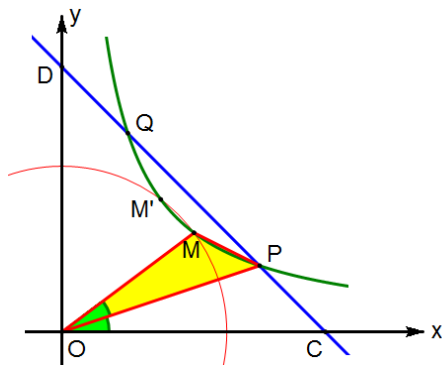


图 3

(2) 如图 3, 当 $m=3$ 时, $y = \frac{3}{x}$, $P(3, 1)$, $Q(1, 3)$. 所以 $OP = \sqrt{10}$.

由直线 PQ 的解析式 $y = -x + 4$, 得 $C(4, 0)$. 所以 $OC = 4$.

如果 $\triangle OPM \sim \triangle OCP$, 那么 $\frac{OP}{OC} = \frac{OM}{OP} = \frac{PM}{CP}$. 所以 $OM = \frac{OP^2}{OC} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.



由 $M(x, \frac{3}{x})$, $OM^2 = \frac{25}{4}$, 得 $x^2 + (\frac{3}{x})^2 = \frac{25}{4}$.

整理, 得 $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$. 解得 $x^2 = 4$, 或 $x^2 = \frac{9}{4}$.

所以 $x = 2$, 或 $x = \frac{3}{2}$. 所以 $M(2, \frac{3}{2})$, 或 $(\frac{3}{2}, 2)$.

检验: 当 $M(\frac{3}{2}, 2)$ 时, $OM = \frac{5}{2}$, $PM = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

所以 $\frac{OM}{OP} = \frac{5}{2} \div \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\frac{PM}{CP} = \frac{\sqrt{13}}{2} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{26}}{4}$.

所以 $\frac{OM}{OP} \neq \frac{PM}{CP}$. 所以 $M(\frac{3}{2}, 2)$ 要舍去. 所以符合条件的点 M 的坐标是 $(2, \frac{3}{2})$.

(3) 如图 4, 设 MA 与 OP 交于点 G , MB 与 OQ 交于点 H .

由 $\frac{GA}{OA} = \frac{PP'}{OP'} = \frac{1}{5}$, 得 $GA = \frac{1}{5}OA = \frac{x}{5}$. 所以 $S_{\triangle OAG} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2}{10}$.

由 $\frac{HB}{OB} = \frac{QQ'}{OQ'} = \frac{1}{5}$, 得 $HB = \frac{1}{5}OB = \frac{1}{x}$. 所以 $S_{\triangle OBH} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{5}{2x^2}$.

所以重叠部分的面积 $S = S_{\text{矩形 } OAMB} - S_{\triangle OAG} - S_{\triangle OBH} = 5 - \frac{x^2}{10} - \frac{5}{2x^2}$.

解方程 $5 - \frac{x^2}{10} - \frac{5}{2x^2} = \frac{41}{10}$, 整理, 得 $x^4 - 9x^2 + 25 = 0$.

因为 $\Delta = 81 - 100 < 0$, 所以此方程无实数根. 所以重叠部分的面积不能为 4.1.

如图 5, 当 $x > 5$ 时, 重叠部分的面积小于 $\triangle OPP'$ 面积的一半, 不可能为 4.1.

当 $0 < x < 1$ 时, 重叠部分的面积小于 $\triangle OQQ'$ 面积的一半, 不可能为 4.1.

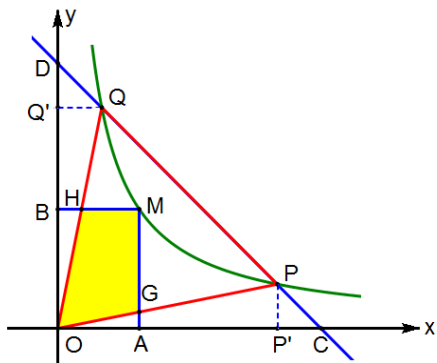


图 4

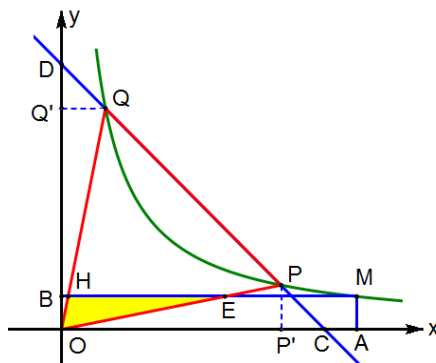


图 5

考点伸展

第(3)题情景下, 重叠部分的面积的最大值是多少呢?

由 $S = 5 - \frac{x^2}{10} - \frac{5}{2x^2} = -\frac{1}{10}(x^2 + \frac{25}{x^2} - 50) = -\frac{1}{10}[(x^2 - 10 + \frac{25}{x^2}) - 50 + 10]$

$= -\frac{1}{10}(x - \frac{5}{x})^2 + 4$, 可知重叠部分面积的最大值为 4.



赛题 2 2018 年沈阳市中考第 25 题——沈阳市实验学校代表队

如图 1, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $C_1: y=ax^2+bx-1$ 经过点 $A(-2, 1)$ 和点 $B(-1, -1)$, 抛物线 $C_2: y=2x^2+x+1$, 动直线 $x=t$ 与抛物线 C_1 交于点 N , 与抛物线 C_2 交于点 M .

(1) 求抛物线 C_1 的表达式;

(2) 直接用含 t 的代数式表示线段 MN 的长;

(3) 当 $\triangle AMN$ 是以 MN 为直角边的等腰直角三角形时, 求 t 的值;

(4) 在 (3) 的条件下, 设抛物线 C_1 与 y 轴交于点 P , 点 M 在 y 轴右侧的抛物线 C_2 上, 连接 AM 交 y 轴于点 K , 连接 KN , 在平面内有一点 Q , 连接 KQ 和 QN , 当 $KQ=1$ 且 $\angle KNQ=\angle BNP$ 时, 请直接写出点 Q 的坐标.

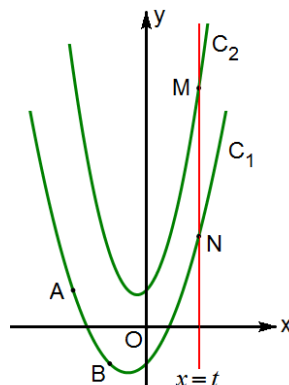


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 沈阳 25”, 拖动直线 MN 运动, 可以体验到, 等腰直角三角形 AMN 存在两种情况, 其中一种情况点 M 落在 y 轴上. 点击屏幕左下方的按钮“第 (4) 题”, 可以体验到, 在以 K 为圆心的单位圆上, 有 4 个符合条件的点 Q .

思路点拨

1. 第 (3) 题探究等腰直角三角形的策略是, 先确定直角三角形, 再验证两条直角边是否相等.

2. 第 (4) 的策略是, 在平面内把确定的 A 、 B 、 M 、 N 、 P 、 K 等 6 个点准确的描出来, 再以 K 为圆心画一个单位圆, 那么在圆上存在 4 个点 Q 使得 $\angle KNQ=\angle BNP$.

画好图以后, 仔细观察数量关系和位置关系, 原来有两对全等三角形哦.

满分解答

(1) 将 $A(-2, 1)$ 、 $B(-1, -1)$ 两点分别代入 $y=ax^2+bx-1$, 得 $\begin{cases} 4a-2b-1=1, \\ a-b-1=-1. \end{cases}$

解得 $a=1$, $b=1$. 所以抛物线 C_1 的表达式为 $y=x^2+x-1$.

(2) $MN=y_M-y_N=(2t^2+t+1)-(t^2+t-1)=t^2+2$.

(3) 先确定直角, 再验证是否等腰. 分两种情况:

已知 $A(-2, 1)$, $M(t, 2t^2+t+1)$, $N(t, t^2+t-1)$.

①当 $\angle AMN=90^\circ$ 时, $y_M=y_A$. 解方程 $2t^2+t+1=1$, 得 $t=0$, 或 $t=-\frac{1}{2}$.

当 $t=0$ 时, $AM=2$, $MN=t^2+2=2$. 所以 $\triangle AMN$ 是等腰直角三角形 (如图 2).

当 $t=-\frac{1}{2}$ 时, $AM=\frac{3}{2}$, $MN=t^2+2=\frac{9}{4}$. 所以 $\triangle AMN$ 不是等腰直角三角形.

②当 $\angle ANM=90^\circ$ 时, $y_N=y_A$. 解方程 $t^2+t-1=1$, 得 $t=1$, 或 $t=-2$.

当 $t=1$ 时, $AN=3$, $MN=t^2+2=3$. 所以 $\triangle AMN$ 是等腰直角三角形 (如图 3).

当 $t=-2$ 时, 直线过点 A , 所以 $\triangle AMN$ 不存在.

综上所述, 当 $\triangle AMN$ 是以 MN 为直角边的等腰三角形时, $t=0$ 或 $t=1$.



(4) 如图 4, $Q_1(-1, 3)$, $Q_2(0, 2)$, $Q_3(\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$, $Q_4(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$.

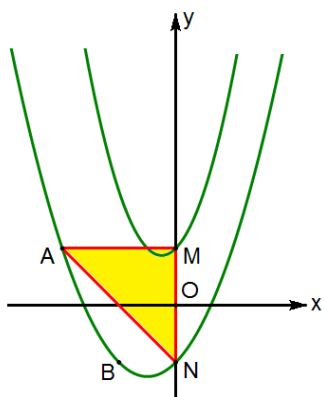


图 2

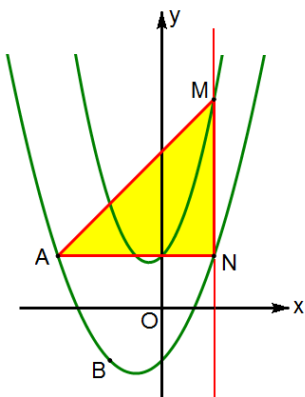


图 3

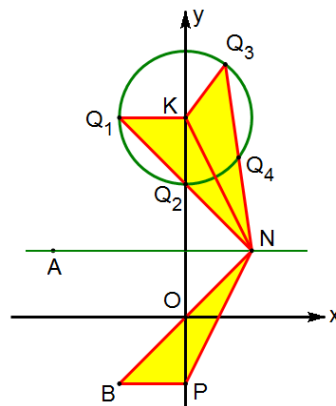


图 4

考点伸展

第(4)题的解题过程: 先来梳理一下 A 、 B 、 M 、 N 、 P 、 K 等 6 个点.

已知 $A(-2, 1)$, $B(-1, -1)$, $M(t, 2t^2 + t + 1)$, $N(t, t^2 + t - 1)$, $P(0, -1)$.

当 $t=0$ 时, $M(0, 1)$ 在 y 轴上, 不在 y 轴右侧. 所以不考虑这种情况.

当 $t=1$ 时, $M(1, 4)$, $N(1, 1)$. 由 $A(-2, 1)$ 、 $M(1, 4)$, 可得 $K(0, 3)$ (如图 5 所示).

再来认识这 6 个点的位置关系和数量关系.

如图 5, 由 $B(-1, -1)$ 、 $N(1, 1)$ 、 $P(0, -1)$, 可得 B 、 N 关于原点对称, BN 过原点, $BP=OP=1$.

由 $K(0, 3)$ 、 $P(0, -1)$ 、 $N(1, 1)$, 可知点 N 在 KP 的垂直平分线上, 所以 $NP=NK$.

第一次变换:

如图 6, 过点 N 画水平直线 $y=1$, 以直线 $y=1$ 为对称轴, 将 $\triangle NBP$ 翻折, 那么点 B 对应点 Q_1 , 点 O 对应点 Q_2 , 符合 $KQ=BP=1$, $\angle KNQ=\angle PNB$.

点 $B(-1, -1)$ 关于直线 $y=1$ 的对应点 Q_1 的坐标是 $(-1, 3)$; 点 $O(0, 0)$ 关于直线 $y=1$ 的对应点 Q_2 的坐标是 $(0, 2)$.

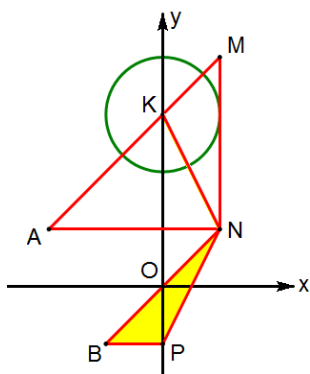


图 5

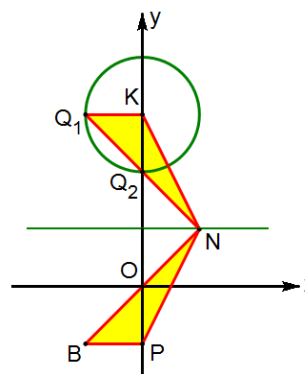


图 6

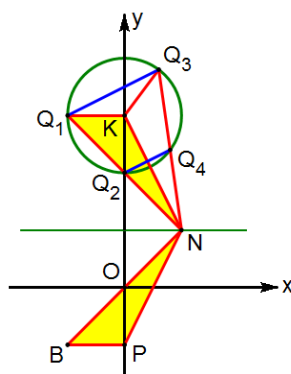


图 7

第二次变换:

如图 7, 以 K 为圆心画单位圆. 以直线 NK 为对称轴, 作 Q_1 、 Q_2 的对应点 Q_3 、 Q_4 , 那么点 Q_3 、 Q_4 一定落在圆上, 而且弦 Q_1Q_3 /弦 Q_2Q_4 , 直线 NK 垂直平分 Q_1Q_3 、 Q_2Q_4 .

①如图 8, 构造 $\text{Rt}\triangle Q_1Q_3H$, 使 $Q_1H \parallel x$ 轴. 所以 $\tan \angle Q_3Q_1H = \tan \angle NKP = \frac{1}{2}$.



设 $Q_3H=m$, $Q_1H=2m$.

在 $\text{Rt}\triangle Q_3KH$ 中, 由勾股定理, 得 $m^2+(2m-1)^2=1^2$. 解得 $m=\frac{4}{5}$.

所以点 $Q_1(-1, 3)$ 向右平移 $\frac{8}{5}$ 个单位, 再向上平移 $\frac{4}{5}$ 个单位, 得到点 $Q_3(\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$.

②如图 9, 构造 $\text{Rt}\triangle Q_2Q_4G$, 使 $Q_4G \parallel x$ 轴. 所以 $\tan \angle Q_2Q_4G = \tan \angle NKP = \frac{1}{2}$.

设 $Q_2G=m$, $Q_4G=2m$.

在 $\text{Rt}\triangle Q_4KG$ 中, 由勾股定理, 得 $(2m)^2+(1-m)^2=1^2$. 解得 $m=\frac{2}{5}$.

所以点 $Q_2(0, 2)$ 向右平移 $\frac{4}{5}$ 个单位, 再向上平移 $\frac{2}{5}$ 个单位, 得到点 $Q_4(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$.

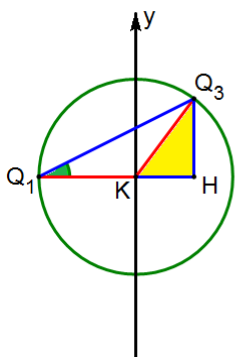


图 8

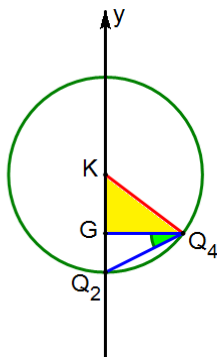


图 9

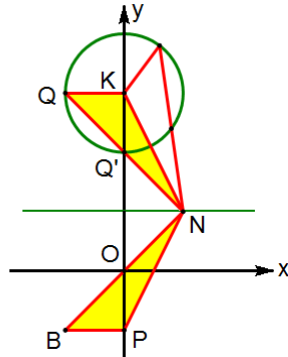


图 10

如果用代数法解第(4)题, 表述起来更方便一些, 而且是“一石二鸟”的效果.

如图 10, 由 $\triangle QKN \cong \triangle BPN$, 得 $QK=BP=1$, $QN=BN=2\sqrt{2}$.

设 $Q(x, y)$, 已知 $K(0, 3)$, $N(1, 1)$, 由 $\begin{cases} QK^2=1, \\ QN^2=8, \end{cases}$ 列方程组 $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2=8. \end{cases}$

解得 $x=-1$, $y=3$ 或 $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{19}{5}$. 所以 $Q(-1, 3)$, 或 $(\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$.

由 $\triangle Q'KN \cong \triangle OPN$, 得 $Q'K=OP=1$, $Q'N=ON=\sqrt{2}$.

设 $Q'(x, y)$, 已知 $K(0, 3)$, $N(1, 1)$, 由 $\begin{cases} Q'K^2=1, \\ Q'N^2=2, \end{cases}$ 列方程组 $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2=2. \end{cases}$

解得 $x=0$, $y=2$ 或 $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{12}{5}$. 所以 $Q'(0, 2)$, 或 $(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$.



赛题 3 2018 年大连市中考第 26 题——大连红星海学校代表队

已知抛物线 $y = ax^2 - 2amx + am^2 + 2m - 5$ ($-\frac{1}{4} < a < 0$)，其中 A、B、C 三点在抛物线上从左至右依次排列，且满足 $AB \parallel x$ 轴， $AB = 4$ ， $\angle ABC = 135^\circ$ 。

- (1) 求顶点的坐标；
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 (用含 a 的式子表示)；
- (3) 若 $S_{\triangle ABC} = 2$ ，当 $2m - 5 \leq x \leq 2m - 2$ 时， y 的最大值为 2，求 m 的值。

动感体验

请打开几何画板文件名“18 大连 26”，拖动表示实数 m 和实数 a 的点运动，可以体验到， $\triangle ABC$ 的形状和大小与 m 无关，与 a 相关。点击屏幕左下方的按钮“第 (3) 题”，拖动表示实数 a 的点运动，可以体验到，抛物线上的 E、F 两点之间的部分，有两种情况 y 的最大值等于 2。

思路点拨

1. 题目无图，心中必须有图啊。抛物线的开口向下，对称轴是 $x = m$ 。
2. 第 (2) 题用含 a 的式子表示 $\triangle ABC$ 的面积，暗示了与 m 无关。底边 $AB = 4$ 为定值，底边上的高 CE 与 BC 围成了等腰直角三角形，用 a 表示 CE 的长。
3. 第 (3) 题先根据 $\triangle ABC$ 的面积等于 2 确定 a 的值，这样抛物线的解析式中只待定一个字母 m 。
4. 第 (3) 题 y 的最大值不能只理解为抛物线的顶点，因为 x 的取值范围是一个区间，所以要按照这个区间与对称轴的关系，分三种情况讨论。

满分解答

(1) 由 $y = ax^2 - 2amx + am^2 + 2m - 5 = a(x - m)^2 + 2m - 5$ ，得顶点 $D(m, 2m - 5)$ 。

(2) 如图 1，如图 2，由 $AB \parallel x$ 轴， $AB = 4$ ，可知 A、B 两点关于抛物线 $x = m$ 对称。

所以 $x_A = m - 2$ ， $x_B = m + 2$ 。所以 $y_A = y_B = 4a + 2m - 5$ 。

作 $\triangle ABC$ 的高 CE ，因为 $\angle ABC = 135^\circ$ ，所以 $CE = BE$ 。

设 $CE = BE = n$ ，那么点 C 的坐标可以表示为 $(m + 2 + n, 4a + 2m - 5 - n)$ 。

将点 C 代入 $y = a(x - m)^2 + 2m - 5$ ，得 $4a + 2m - 5 - n = a(2 + n)^2 + 2m - 5$ 。

整理，得 $an^2 + 4an + n = 0$ 。解得 $n = -\frac{1}{a} - 4$ ，或 $n = 0$ (舍去)。

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} \times 4 \left(-\frac{1}{a} - 4\right) = -\frac{2}{a} - 8$ 。

如图 1 是 $a = -0.1$ ， $m = 4$ 的效果图。如图 2 是 $a = -0.2$ ， $m = 1.5$ 的效果图。

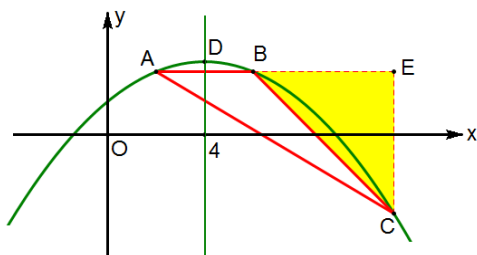


图 1

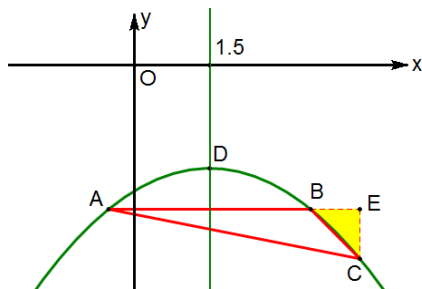


图 2

(3) 由 $S_{\triangle ABC} = -\frac{2}{a} - 8 = 2$ ，得 $a = -\frac{1}{5}$ 。



所以抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{5}(x-m)^2 + 2m-5$ ，开口向下，顶点为最高点。

分三种情况讨论 y 的最大值。

①如果 $2m-5 \leq x \leq 2m-2$ 在对称轴 $x=m$ 的右侧，那么 $x=2m-5$ 对应 y 的最大值。

由 $2m-5 > m$ ，得 $m > 5$ 。

当 $x=2m-5$ 时， $y = -\frac{1}{5}(x-m)^2 + 2m-5 = -\frac{1}{5}(m-5)^2 + 2m-5 = 2$ 。

整理，得 $m^2 - 20m + 60 = 0$ 。

解得 $m = 10 + 2\sqrt{10}$ ，或 $m = 10 - 2\sqrt{10}$ （不在 $m > 5$ 的范围内，舍去）。

②对称轴 $x=m$ 在 $2m-5 \leq x \leq 2m-2$ 之间，那么 $x=m$ 对应 y 的最大值。

当 $x=m$ 时， $y = -\frac{1}{5}(x-m)^2 + 2m-5 = 2m-5 = 2$ 。解得 $m = \frac{7}{2}$ 。

③如果 $2m-5 \leq x \leq 2m-2$ 在对称轴 $x=m$ 的左侧，那么 $x=2m-2$ 对应 y 的最大值。

由 $2m-2 < m$ ，得 $m < 2$ 。

当 $x=2m-2$ 时， $y = -\frac{1}{5}(x-m)^2 + 2m-5 = -\frac{1}{5}(m-2)^2 + 2m-5 = 2$ 。

整理，得 $m^2 - 14m + 39 = 0$ 。

解得 $m = 7 + \sqrt{10} > 2$ ，或 $m = 7 - \sqrt{10} > 2$ ，这两个解都要舍去。

综上所述，当 $m = 10 + 2\sqrt{10}$ 或 $m = \frac{7}{2}$ 时， y 的最大值为 2。

考点伸展

第(3)题的示意图是这样的：如图3，抛物线上的 E 、 F 两点间的部分在对称轴的右侧，点 E 对应最大值；如图4， E 、 F 两点在对称轴的两侧；如图5，抛物线上的 E 、 F 两点间的部分在对称轴的左侧，点 F 对应最大值。

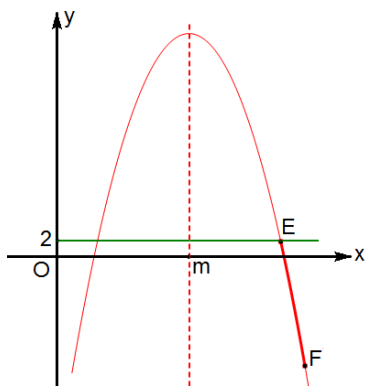


图3

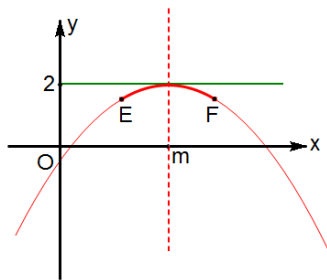


图4

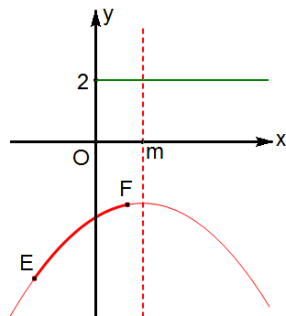


图5



赛题 4 2018 年天津市中考第 24 题——西安铁一中分校代表队

在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是矩形，点 $O(0, 0)$ ，点 $A(5, 0)$ ，点 $B(0, 3)$ 。以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOBC$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O 、 B 、 C 的对应点分别为 D 、 E 、 F 。

(1) 如图 1，当点 D 落在 BC 边上时，求点 D 的坐标；

(2) 如图 2，当点 D 落在线段 BE 上时， AD 与 BC 交于点 H 。

①求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ；

②求点 H 的坐标；

(3) 记 K 为矩形 $AOBC$ 的对角线的交点， S 为 $\triangle KDE$ 的面积，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。

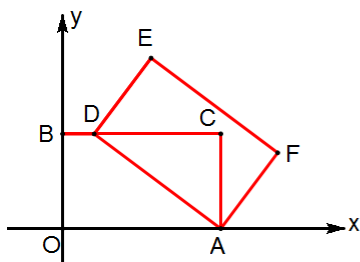


图 1

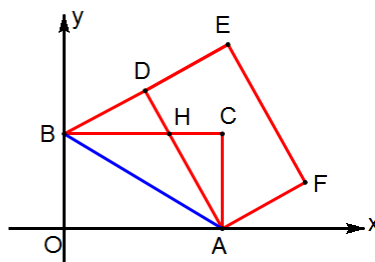


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“18 天津 24”，拖动点 D 绕着点 A 旋转，可以体验到，当点 K 落在 AD 上时， $\triangle KDE$ 的面积最小；当点 K 落在 AD 的延长线上时， $\triangle KDE$ 的面积最大。

思路点拨

1. 第 (3) 题求面积的最值，由于 DE 是定值，于是转化为求高 DH 的最值。

2. 根据垂线段最短，又转化为求 KD 的最值问题。

3. 由于 KD 在 $\triangle KDA$ 中，两边为定值，那么第三边的最大值、最小值根据三角形的三边关系就确定了。

满分解答

(1) 如图 3，作 $DM \perp x$ 轴于 M 。

当点 D 落在 BC 边上时，在 $\text{Rt}\triangle DMA$ 中， $AD=5$ ， $DM=3$ ，所以 $AM=4$ 。

所以 $OM=5-4=1$ 。此时 $D(1, 3)$ 。

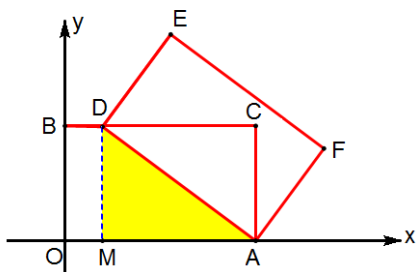


图 3

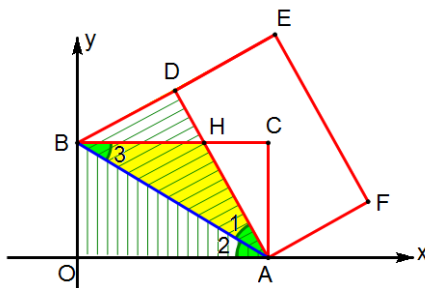


图 4

(2) ①如图 4，当点 D 落在线段 BE 上时， $\angle ADB = \angle AOB = 90^\circ$ 。

由 $AB=AB$ ， $AD=AO$ ，得 $\text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle AOB$ (H.L.)。

②如图 4，由 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ，得 $\angle 1 = \angle 2$ 。



由 $BC \parallel OA$, 得 $\angle 2 = \angle 3$.

所以 $\angle 1 = \angle 3$. 所以 $HA = HB$. 设 $HA = HB = m$.

在 $\text{Rt}\triangle HCA$ 中, 由勾股定理, 得 $m^2 = (5-m)^2 + 3^2$.

解得 $m = \frac{17}{5}$. 所以 $H(\frac{17}{5}, 3)$.

$$(3) \frac{30-3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30+3\sqrt{34}}{4}.$$

考点伸展

第(3)题的思路是这样的: 如图5, 过点 K 向直线 DE 作垂线, 垂足为 H .

在 $\triangle KDE$ 中, $DE=3$ 为定值, 所以 $\triangle KDE$ 的面积的最大值、最小值取决于 KH 的最大值、最小值. 而 KH 总是小于或等于 KD 的, 所以 KH 的最大值、最小值又取决于 KD 的最大值、最小值.

在 $\triangle KDA$ 中, $KA = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $AD=5$ 为定值.

如图6, 当点 K 落在 AD 上时, KD 取得最小值. 此时 KH 的最小值为 $5 - \frac{\sqrt{34}}{2}$.

如图7, 当点 K 落在 DA 的延长线上时, KD 取得最大值. 此时 KH 的最大值为 $5 + \frac{\sqrt{34}}{2}$.

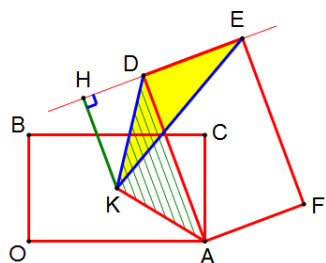


图5

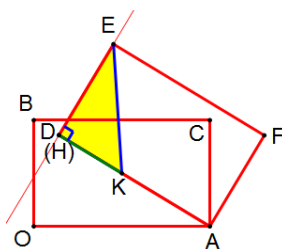


图6

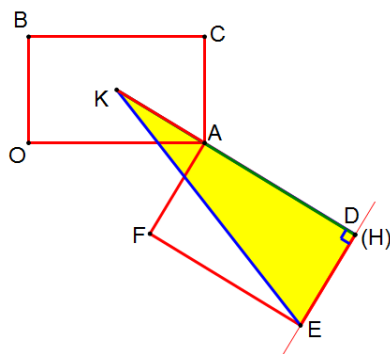


图7



赛题 5 2018 年北京市中考第 27 题——北京十一学校一分校代表队

如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上的一动点 (不与 A 、 B 重合), 连接 DE , 点 A 关于直线 DE 的对称点为 F , 连接 EF 并延长交 BC 于点 G , 连接 DG , 过点 E 作 $EH \perp DE$ 交 DG 的延长线于点 H , 连接 BH .

- (1) 求证: $GF=GC$;
- (2) 用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系, 并证明.

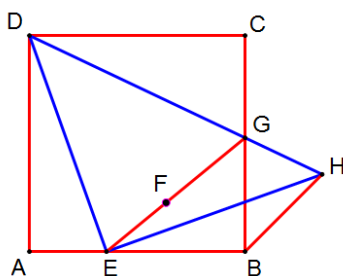


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 北京 27”, 拖动 E 在 AB 上运动, 可以体验到, DF 与 DA 关于 DE 对称, DF 与 DC 关于 DG 对称, $\triangle DEH$ 保持等腰直角三角形的形状.

思路点拨

1. 连接 DF 就得到两对轴对称的全等三角形, 于是得到 $\angle EDG=45^\circ$ 为定值.
2. 由等腰直角三角形 DEH 的腰为对应边构造全等三角形.

满分解答

(1) 如图 2, 连接 DF .

因为 A 、 F 关于直线 DE 对称, 所以 $\triangle DAE \cong \triangle DFE$.

所以 $DA=DF$, $\angle A=\angle DFE=90^\circ$.

因为 $DG=DG$, $DF=DA=DC$, 所以 $\text{Rt}\triangle DFG \cong \text{Rt}\triangle DCG$ (H.L.).

所以 $GF=GC$.

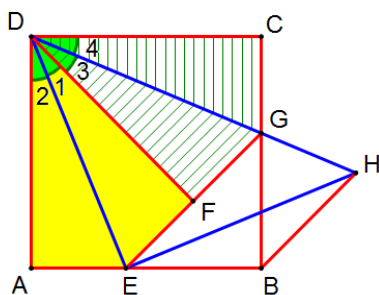


图 2

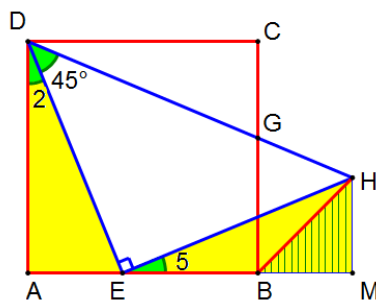


图 3

(2) 如图 2, 由 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 可得 $\angle 1+\angle 3=45^\circ$.

又因为 $\angle DEH=90^\circ$, 所以 $\triangle DEH$ 是等腰直角三角形. 所以 $DE=EH$.

如图 3, 作 $HM \perp AB$, 垂足为 M .

因为 $\angle 2$ 与 $\angle 5$ 都是 $\angle AED$ 的余角, 所以 $\angle 2=\angle 5$.

又因为 $DE=EH$, $\angle A=\angle EMH$, 所以 $\triangle DAE \cong \triangle EMH$.



所以 $AE = MH$, $DA = EM$.

由 $AB = DA = EM$, 可得 $AE + EB = EB + BM$. 所以 $AE = BM$.

所以 $AE = BM = MH$. 所以 $\triangle HBM$ 是等腰直角三角形, $BH = \sqrt{2} MH$.

所以 $BH = \sqrt{2} AE$.

考点伸展

第(2)题再介绍一种解法:

如图4, 在 DA 上截取 $DN = EB$, 由“边角边”可以证明 $\triangle DNE \cong \triangle EBH$.

所以 $BH = NE$.

在等腰直角三角形 NAE 中, $NE = \sqrt{2} AE$. 所以 $BH = \sqrt{2} AE$.

再讨论一个问题, 点 E 在 AB 上运动的过程中, 点 H 的轨迹是什么?

如图5, 因为 $\triangle HBM$ 是等腰直角三角形, 所以 $\angle HBM = 45^\circ$. 因此点 H 的运动轨迹是一条线段, 在 $\angle CBM$ 的角平分线上. 点 H 的路径长等于 AE 的 $\sqrt{2}$ 倍.

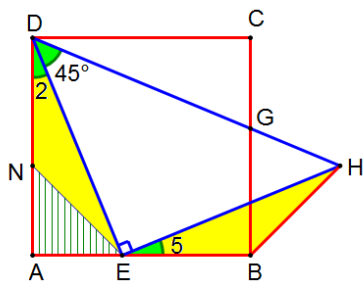


图4

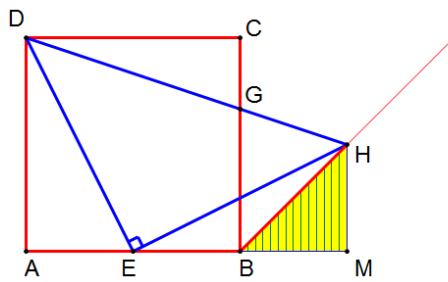
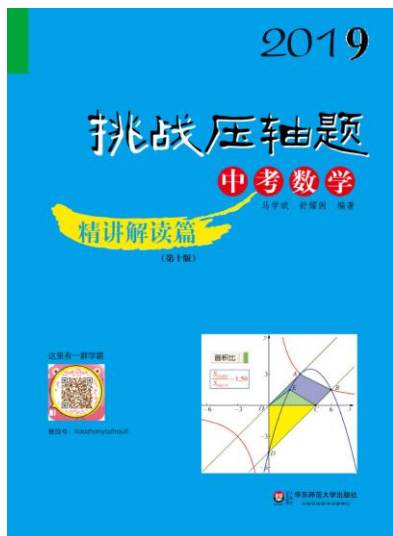


图5

【广而告之】

这次比赛的题目都收录在《挑战中考数学压轴题·精讲解读篇》(2019版)



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/177124144006010050>