

2024——2025 学年第一学期高二数学 10 月期中考试

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 设 a 为实数，已知直线 $l_1: ax+3y-2=0, l_2: 6x+(a-3)y+4=0$ ，若 $l_1 // l_2$ ，则 $a =$ ()

- A. 6 B. -3 C. 6 或 -3 D. -6 或 3

【答案】A

【解析】

【分析】由两条直线的一般式方程平行的条件求解即可．

【详解】因为 $l_1 // l_2$ ，所以 $a(a-3)=18$ ，解得： $a=6$ 或 $a=-3$ ．

当 $a=6$ 时， $l_1: 6x+3y-2=0, l_2: 6x+3y+4=0$ ，平行；

当 $a=-3$ 时， $l_1: -3x+3y-2=0, l_2: 6x-6y+4=0$ ，可判断此时重合，舍去．

故选：A

2. 已知焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦距为 6，则实数 m 等于 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. 6 C. 12 D. $12-6\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据椭圆的焦点位置以及焦距，列式求解，即得答案．

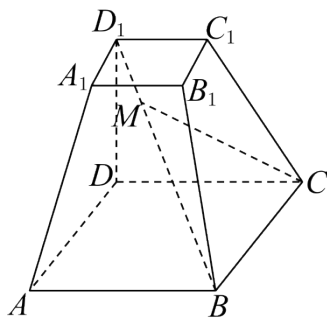
【详解】由于焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦距为 6，

故 $m-3=3^2, \therefore m=12$ ，

故选：C

3. 如图是元代数学家郭守敬主持建造的观星台，其可近似看作一个正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，若

$AB=2A_1B_1$ ，点 M 在 BD_1 上，且 $BM=3D_1M$ ，则 $\overrightarrow{CM} =$ ()



A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用空间向量的基本定理可求解.

【详解】因为: $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

所以: $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. 又因为: $BM = 3D_1M$,

所以: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$,

所以: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$.

故 C 项正确.

故选: C.

4. 过点 $M(-1, 2)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线方程为 ()

A. $x - 2y + 5 = 0$

B. $x + 2y + 5 = 0$

C. $2x - y - 5 = 0$

D. $2x + y + 5 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】先判断出点 M 在圆上, 进而求出切线斜率即可得到答案.

【详解】因为 $(-1)^2 + 2^2 = 5$ ，所以点 M 在圆上，而 $k_{OM} = \frac{2}{-1} = -2$ ，

则切线斜率为 $\frac{1}{2}$ ，所以切线方程为： $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - x - 5 = 0$

即 $x - 2y + 5 = 0$

故选：A

5. “ $m > 2$ ”是“方程 $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线”的（ ）条件

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用集合法进行求解.

【详解】因为方程 $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线，所以 $(2-m)(m+1) < 0$ ，解得 $m < -1$ 或 $m > 2$.

即 $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

因为 $(2, +\infty)$ 是 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ 的真子集，

所以“ $m > 2$ ”是“方程 $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线”的充分不必要条件.

故选：B.

6. 一条光线从点 $P(4, 2)$ 射出，经过直线 $y = x$ 反射后与 y 轴相交于点 $Q(0, -2)$ ，则入射光线所在直线的方程为（ ）

A. $x - 3y - 2 = 0$

B. $3x - y - 2 = 0$

C. $x - 3y + 2 = 0$

D. $x + 3y - 10 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出点 $Q(0, -2)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点 $Q'(-2, 0)$ ，由光学知识可得反射光线经过点 P ， Q' ，由直线的两点式即可求解.

【详解】根据题意可得反射光线经过点 $Q(0, -2)$ ，易得入射光线所在直线经过点 $Q'(-2, 0)$ ，

【详解】根据题意判断可得直线 l 过该抛物线的焦点 F ,

所以 $\frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} = \frac{2}{p} = 1$, (联立直线与抛物线, 应用韦达定理及 $\frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} = \frac{1}{y_M+1} + \frac{1}{y_N+1}$ 即可证明),

$$|MF| + 3|NF| = (|MF| + 3|NF|) \left(\frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} \right) = 4 + \frac{3|NF|}{|MF|} + \frac{|MF|}{|NF|} \geq 4 + 2\sqrt{3},$$

所以

当且仅当 $|MF| = \sqrt{3}|NF| = \sqrt{3} + 1$ 时取“=”.

故选: C.

二、多选题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要求, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率 $e = 2$, C 的右支上的点到其右焦点的最短距离为 1, 则 ()

A. 双曲线 C 的焦点坐标为 $(\pm 2, 0)$

B. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

C. 点 $(2, 3)$ 在双曲线 C 上

D. 直线 $mx - y - m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 与双曲线 C 恒有两个交点

【答案】AC

【解析】

【分析】由题意求出 a, b, c , 即可求出双曲线方程, 可得焦点坐标, 判断 AB; 代入验证可判断 C; 求出直线 $mx - y - m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 所过定点, 结合举特值, 即可判断 D.

【详解】双曲线 C 上的点到其焦点的最短距离为 $c - a = 1$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$, 所以 $a = 1, c = 2$,

所以 $b^2 = 3$, 所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 所以 C 的焦点坐标为 $(\pm 2, 0)$, A 正确.

双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$, B 错误.

因为 $2^2 - \frac{3^2}{3} = 1$, 所以点 $(2, 3)$ 在双曲线 C 上, C 正确.

直线 $mx - y - m = 0$ 即 $y = m(x-1)$, 恒过点 $(1,0)$, 即双曲线的右顶点,

当 $m = \pm\sqrt{3}$ 时, 直线与双曲线 C 的一条渐近线平行, 此时直线与双曲线只有一个交点, D 错误.

故选: AC

10. 已知 AB 为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的直径, 且 AB 不与 y 轴重合, 直线 $l: y = kx + 1$ 与 y 轴交于点 M , 则 ()

A. l 与 C 恒有公共点

B. $\triangle ABM$ 是钝角三角形

C. $\triangle ABM$ 的面积的最大值为 1

D. l 被 C 截得的弦的长度的最小值为 $2\sqrt{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】 M 是一个在圆内的定点, 可以判断 A, B 选项; 根据 AB 是定值可以判断到的距离最大时, 三角形面积最大, 从而判断 C 选项; l 被 C 截得的弦的长度的最小时, 圆心到直线的距离最大, 从而判断 D 选项.

【详解】直线 $l: y = kx + 1$ 与 y 轴交于点 M , 所以 $M(0,1)$, 易知 M 在圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 内部, 所以 l 与 C 恒有公共点, A 正确.

因为 M 在圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 内部, 所以 $\angle AMB$ 为钝角, 所以 $\triangle ABM$ 是钝角三角形, B 正确.

点 M 到 AB 的最大距离即点 M 与圆心之间的距离, 为 1, 所以 $S_{\triangle ABM} \leq \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$, C 错误.

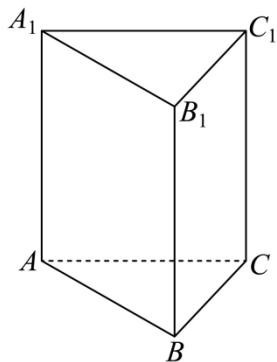
l 被 C 截得的弦的长度最小时, 圆心到直线 l 的距离最大, 易知此距离为点 M 与圆心之间的距离为 1,

所以最短弦长为 $2 \times \sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$, D 正确.

故选: ABD

11. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 3, $AB = 2$, 空间中一点 P 满足

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AA_1}$ ($x, y \in [0, 1]$), 则 ()



A. 若 $x = \frac{1}{2}$, 则三棱锥 $P-AA_1C$ 的体积为定值

B. 若 $y = \frac{1}{2}$, 则点 P 的轨迹长度为 3

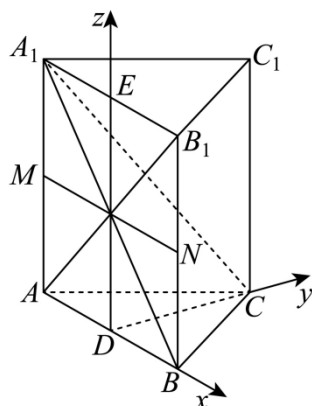
C. 若 $x+y=1$, 则 PB_1 的最小值为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

D. 若 $x=y$, 则点 P 到 BC 的距离的最小值为 $\frac{3}{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A: 做出图像, 由已知和选项找到点 P 的位置, 判断 P 到平面 AA_1C 的距离为定值, 又 $\triangle AA_1C$ 的面积为定值可求出; B: 作图找到点 P 位置, 判断轨迹长度即可; C: 由向量共线得到 P 的位置, 再点到直线的距离求 PB_1 最小值; D: 建系, 用空间向量关系求出 P 到 BC 的距离, 再用二次函数的性质求出最值.



【详解】

对 A, 若 $x = \frac{1}{2}$, 分别作棱 AB , A_1B_1 的中点 D , E , 连接 DE , 则 P 在线段 DE 上, 易知 $DE \parallel$ 平面 AA_1C , 故点 P 到平面 AA_1C 的距离为定值, 又 $\triangle AA_1C$ 的面积为定值, 所以三棱锥 $P-AA_1C$ 的体积为定

值, 故 A 正确;

若 $y = \frac{1}{2}$, 分别作 AA_1 , BB_1 的中点 M , N , 则点 P 的轨迹为线段 MN , 易知 $MN = AB = 2$, 故 B 错误;

若 $x + y = 1$, 则 A_1 , P , B 三点共线, 即点 P 在线段 A_1B 上, 易求点 B_1 到 A_1B 的距离为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$, 故

PB_1 的最小值为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$, 故 C 正确;

若 $x = y$, 则点 P 在线段 AB_1 上, 易证 DB , DC , DE 两两垂直, 以 D 为坐标原点, DB , DC , DE 所在直线分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $A_1(-1, 0, 3)$, $B_1(1, 0, 3)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 3)$,

$\overrightarrow{AP} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = (2x, 0, 3x)$,

所以 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (2x - 2, 0, 3x)$,

所以 $\cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{1-x}{|\overrightarrow{BP}|}$,

所以点 P 到 BC 的距离 $d = |\overrightarrow{BP}| \sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{|\overrightarrow{BP}|} \right)^2} = \sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2 - (1-x)^2} = \sqrt{12x^2 - 6x + 3} = \sqrt{12 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{9}{4}}$,

所以当 $x = \frac{1}{4}$ 时, $d_{\min} = \frac{3}{2}$, 故 D 正确.

故选: ACD.

【点睛】方法点睛: 本题考查平面向量关系和空间立体几何的位置关系判定和体积, 距离的求法, 利用点到直线的距离和二次函数和建立空间直角坐标系解答, 计算量大, 属于比较难的试题.

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 过点 $P(1, 2)$ 且在两坐标轴上截距的和为 0 的直线方程为_____.

【答案】 $2x - y = 0$ 或 $x - y + 1 = 0$

【解析】

【分析】直线过原点有直线方程为 $2x - y = 0$; 直线不过原点时, 设 x 轴截距为 $a (a \neq 0)$, 则 y 轴截距为

$-a$ ，根据截距式并结合所过的点求 a ，写出方程.

【详解】当直线过原点时，得直线方程为 $2x-y=0$;

当在坐标轴上的截距不为零时，设 x 轴截距为 $a (a \neq 0)$ ，则 y 轴截距为 $-a$ ，可设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$,

将 $P(1,2)$ 代入方程，可得 $a = -1$ ，得直线方程为 $x-y+1=0$.

∴ 综上，直线方程为 $2x-y=0$ 或 $x-y+1=0$.

故答案为: $2x-y=0$ 或 $x-y+1=0$.

13. 若双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的一条渐近线与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 交于 A, B 两点，则 $|AB| =$ ____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】根据双曲线的标准方程，得到 a, b, c 的值，结合双曲线的几何性质，求得双曲线的渐近线方程，再利用圆的弦长公式，即可求解.

【详解】由双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ ，可得 $a=2, b=1$,

又由双曲线的其中一条渐近线方程为 $y = \frac{a}{b}x = 2x$ ，即 $2x-y=0$,

因为圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(1,0)$ ，半径 $r=1$,

所以圆心到渐近线的距离为 $d = \frac{|2 \times 1 - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由圆的弦长公式，可得 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{1 - (\frac{2\sqrt{5}}{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，若 P 为椭圆 C 上一点，

$PF_1 \perp F_1F_2$, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $\frac{c}{3}$ ，则椭圆 C 的离心率为 ____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】由内切圆半径的计算公式，利用等面积法表示焦点三角形 PF_1F_2 的面积，得到 a, c 方程，即可得到离心率 e 的方程，计算得到结果.

【详解】由题意，可知 PF_1 为椭圆通径的一半，故 $PF_1 = \frac{b^2}{a}$ ， $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot PF_1 = \frac{b^2 c}{a}$ ，

又由于 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $\frac{c}{3}$ ，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积也可表示为 $\frac{1}{2}(2a+2c) \cdot \frac{c}{3}$ ，

所以 $\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot PF_1 = \frac{1}{2}(2a+2c) \cdot \frac{c}{3}$ ，即 $\frac{b^2 c}{a} = \frac{1}{2}(2a+2c) \cdot \frac{c}{3}$ ，

整理得： $2a^2 - ac - 3c^2 = 0$ ，两边同除以 a^2 ，

得 $3e^2 + e - 2 = 0$ ，所以 $e = \frac{2}{3}$ 或 -1 ，

又椭圆的离心率 $e \in (0, 1)$ ，所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$ 。

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 已知圆 M 过点 $(3, 3)$ ，圆心 M 在直线 $2x + y - 5 = 0$ 上，且直线 $x - 2y + 5 = 0$ 与圆 M 相切.

(1) 求圆 M 的方程；

(2) 过点 $D(0, -2)$ 的直线 l 交圆 M 于 A, B 两点.若 A 为线段 DB 的中点，求直线 l 的方程.

【答案】(1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

(2) $x=0$ 或 $5x-12y-24=0$ 。

【解析】

【分析】(1) 由待定系数法即可求解；

(2) 设 $A(x, y)$ ，从而得到 $B(2x, 2y+2)$ ，由 A, B 在圆上，代入方程求解即可解决问题.

【小问 1 详解】

设圆 M 的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/178016013014006142>