关于高中数学选修简单曲线的极坐标方程

复习

1、极坐标系的四要素

极点；极轴；长度单位；角度单位及它的正方向。

2、点与其极坐标一一对应的条件

$$\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

3、极坐标与直角坐标的互化公式

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}(x \neq 0)$$

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$$

曲线的极坐标方程

一 定义：如果曲线C上的点与方程$f(\rho,\theta)=0$有如下关系

（1）曲线C上任一点的坐标（所有坐标中至少有一个）符合方程$f(\rho,\theta)=0$；

（2）以方程$f(\rho,\theta)=0$的所有解为坐标的点都在曲线C上。

则曲线C的方程是$f(\rho,\theta)=0$。

二 求曲线的极坐标方程的步骤：

与直角坐标系里的情况一样

①建系 （适当的极坐标系）

②设点 （设M（ ρ，θ）为要求方程的曲线上任意一点）

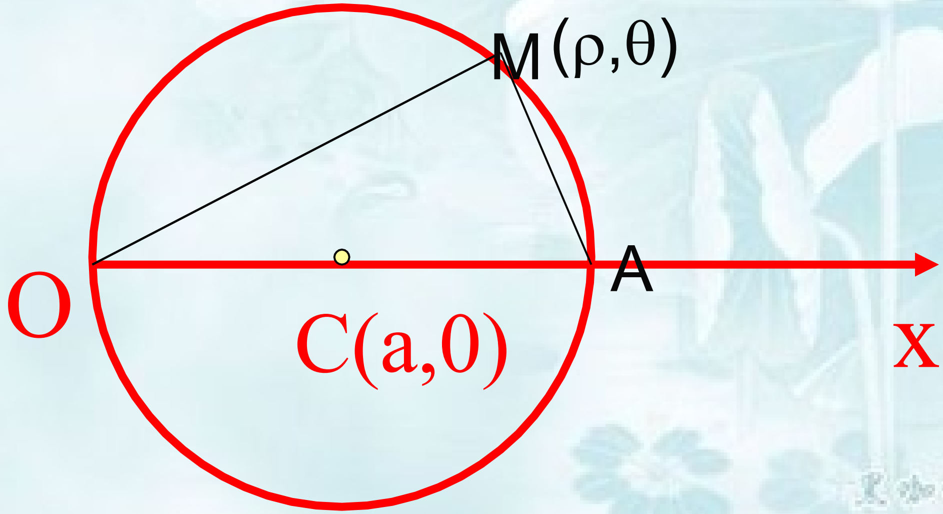
③列等式（构造⊿，利用三角形边角关系的定理列关于M的等式）

④将等式坐标化

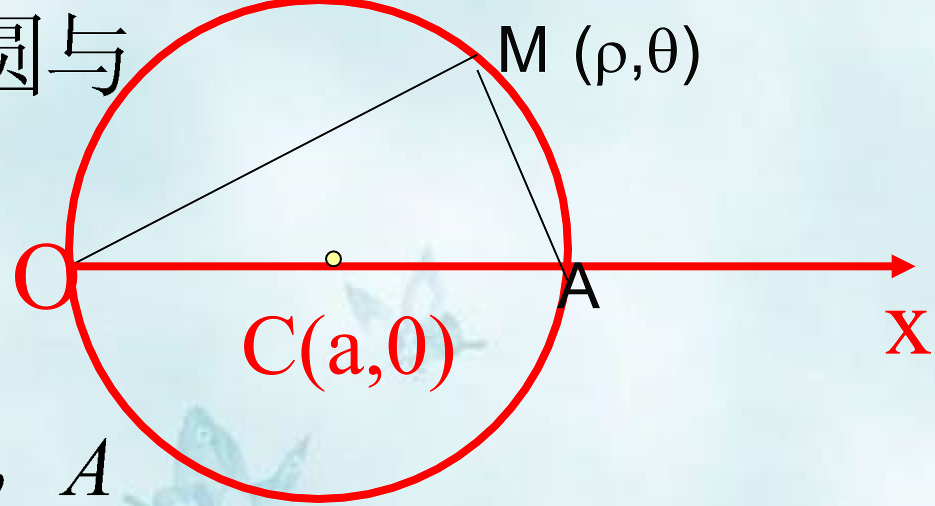
⑤化简 （此方程$f(\rho,\theta)=0$即为曲线的方程）

例1.半径为a的圆的圆心坐标为(a,0)(a>0)，极坐标方程：

$$\rho = 2a\cos\theta$$



解：圆经过极点O。设圆与极轴的另一个交点是A，那么$|OA|=2a$，



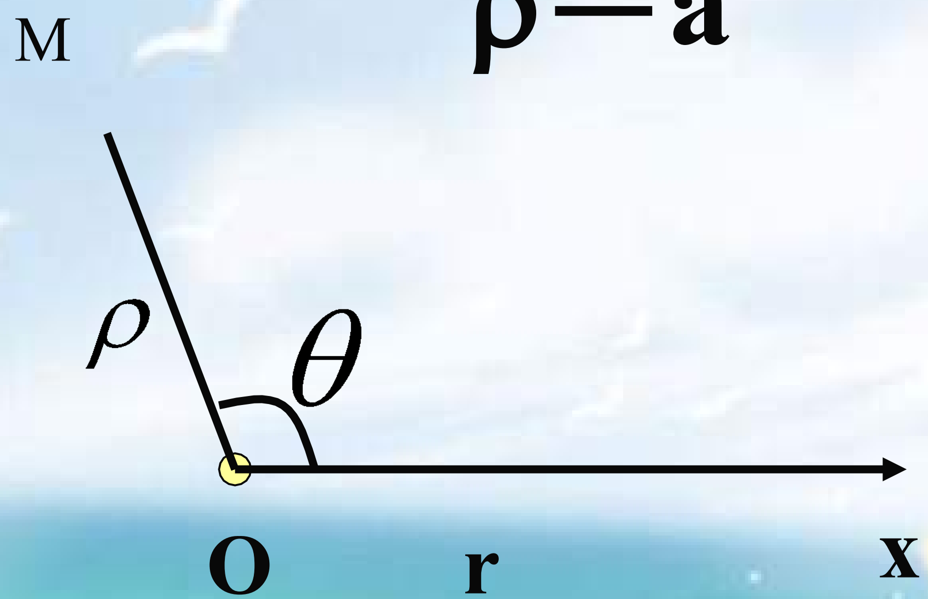
设$M(\rho,\theta)$为圆上除点O，A以外的任意一点，那么$OM\perp AM$。在$Rt\Delta AMO$中$|OM|=|OA|\cos\angle MOA$即$\rho=2a\cos\theta$............(1)

可以验证，点$O(0,\dfrac{\pi}{2}),A(2a,0)$的坐标满足等式(1)

所以，等式(1)就是圆上任意一点的极坐标(ρ,θ)满足的条件，另一方面可以验证，坐标适合等式(1)的点都在这个圆上。

例2.已知圆O的半径为r，极坐标方程？

$\rho = a$



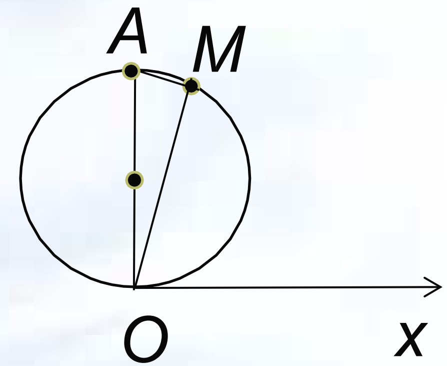
解：如果以圆心O为极点，从O出发的一条射线为极轴建立坐标系（如图），那么圆上各点的几何特征就是它们的极径都等于半径r.

设$M(\rho,\theta)$为圆上任意一点，则$|OM|=r$,即

$\rho=r$

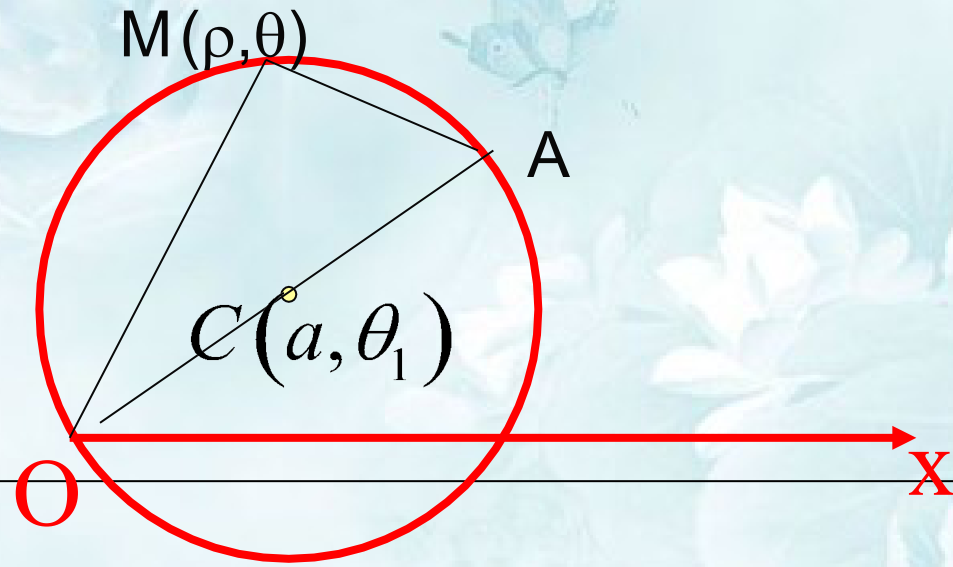
显然，使极点与圆心重合时的极坐标方程在形式上比(1)简单。

例3.半径为a的圆的圆心坐标为$(a,\pi/2)(a>0)$
求圆的极坐标方程。



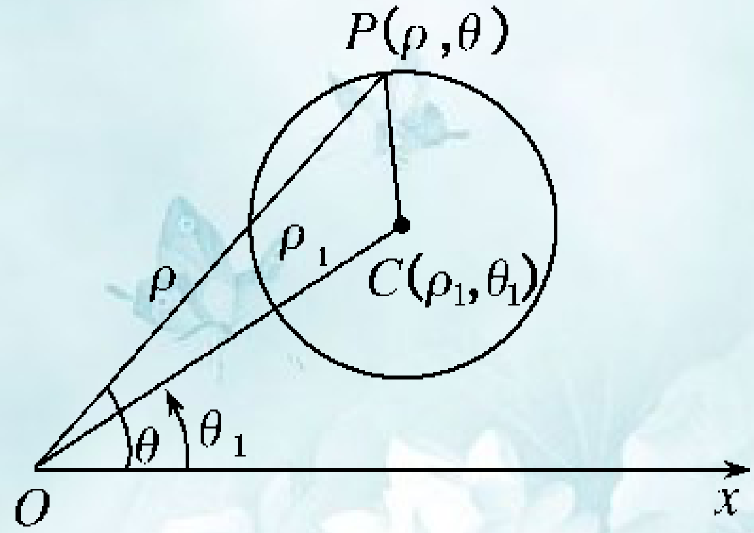
$$\rho = 2a\sin\theta$$

例4.如图，半径为a的圆的圆心坐标为$C(a,\theta_1)$a>0)，圆的极坐标方程？



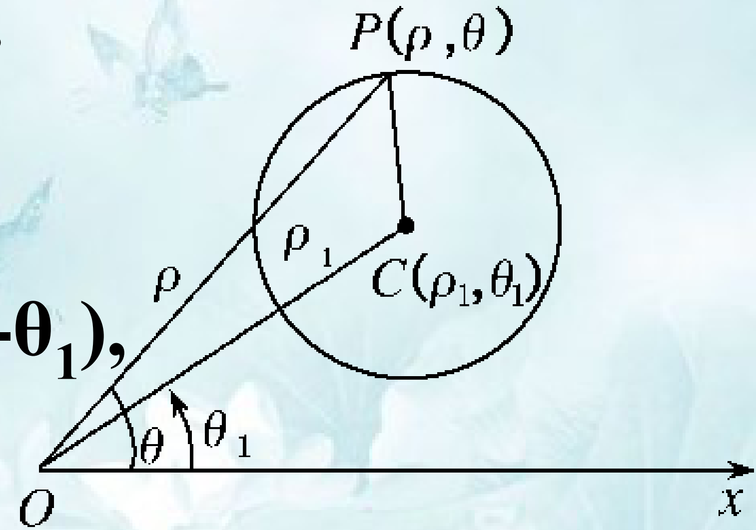
$$\rho = 2a\cos(\theta - \theta_1)$$

例5.如图，C (ρ_1, θ_1)，半径为r圆的极坐标方程？



解:设$P(\rho,\theta)$为圆周上任意一点,如下图所示,在

$\triangle OCP$中,$CP=r,OC=\rho_1,OP=\rho$.



根据余弦定理,得

$CP^2=OC^2+OP^2-2OC\cdot OP\cdot\cos(\theta-\theta_1)$,

即$r^2=\rho_1{}^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\theta-\theta_1)$.

也就是$\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\theta-\theta_1)+(\rho_1{}^2-r^2)=0$.

即：$\rho^2+\rho_1{}^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)=r^2$

这就是圆在极坐标系中的一般方程.

圆的几种极坐标方程

(1)中心在极点，半径为a；

$$\rho = a$$

(2)中心在C (a,0)，半径为a；

$$\rho = 2a\cos\theta$$

(3)中心在($a,\pi/2$)，半径为a；

$$\rho = 2a\sin\theta$$

(4)中心在(a,θ_1)，半径为a；

$$\rho = 2a\cos(\theta - \theta_1)$$

(5)中心在C (ρ_1,θ_1)，半径为r。

$$\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\theta - \theta_1) = r^2$$

思考：已知一个圆的极坐标方程是

$$\rho = 5\sqrt{3}\cos\theta - 5\sin\theta,$$

求在直角坐标系下圆心坐标和半径。

解：$\rho = 5\sqrt{3}\cos\theta - 5\sin\theta$两边同乘以$\rho$得

$\rho^2 = 5\sqrt{3}\rho\cos\theta - 5\rho\sin\theta$即化为直角坐标为

$x^2 + y^2 = 5\sqrt{3}x - 5y$　即$(x - \frac{5\sqrt{3}}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = 25$

所以圆心为$(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2})$，半径是5

你可以用极坐标方程直接来求吗？

已知一个圆的极坐标方程是$\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$，求圆心坐标和半径。

解：原式可化为

$$\rho=10(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\cdot\frac{1}{2})=10\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$$

所以圆心为$(5,-\frac{\pi}{6})$，半径为5

结论：

圆心为$(a,\theta_1)(a>0)$半径为a，圆的极坐标方程为$\rho=2a\cos(\theta-\theta_1)$，此圆过极点$O$。

练习2

1.以极坐标系中的点(1,1)为圆心，1为半径的圆的方程是(　　)

$A.\rho = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$　　$B.\rho = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

$C.\rho = 2\cos(\theta - 1)$　　$D.\rho = 2\sin(\theta - 1)$

2、曲线的极坐标方程 $\rho = 4\sin\theta$ 化为直角坐标方程是什么？

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$