

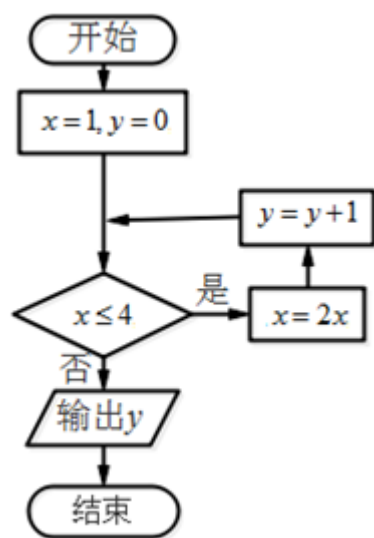
湖北省武汉外国语学校 2023 年高三（下）月考数学试题

注意事项：

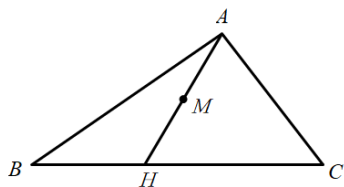
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图是一个算法流程图，则输出的结果是（ ）



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
2. 在 $\triangle ABC$ 中， H 为 BC 上异于 B, C 的任一点， M 为 AH 的中点，若 $\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ ，则 $\lambda + \mu$ 等于（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$
3. 设点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$ 上的一点， F_1, F_2 是椭圆的两个焦点，若 $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$ ，则 $|PF_1| + |PF_2| =$ （ ）
- A. 4 B. 8 C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{7}$
4. 已知方程 $x|x| + y|y| = -1$ 表示的曲线为 $y = f(x)$ 的图象，对于函数 $y = f(x)$ 有如下结论：① $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减；② 函数 $F(x) = f(x) + x$ 至少存在一个零点；③ $y = f(|x|)$ 的最大值为 1；④ 若函数 $g(x)$ 和 $f(x)$

图象关于原点对称, 则 $y = g(x)$ 由方程 $y|y| + x|x| = 1$ 所确定; 则正确命题序号为()

- A. ①③ B. ②③ C. ①④ D. ②④

5. 记单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 + a_4 = 10$, $a_2 a_3 a_4 = 64$, 则()

- A. $S_{n+1} - S_n = 2^{n+1}$ B. $a_n = 2^n$ C. $S_n = 2^n - 1$ D. $S_n = 2^{n-1} - 1$

6. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数), 若目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9, 则 $k =$ ()

- A. -16 B. -6 C. $-\frac{27}{4}$ D. $\frac{27}{4}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$, 方程 $f(x) - a = 0$ 有四个不同的根, 记最大的根的所有取值为集合 D , 则“函

数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有两个零点”是“ $k > \frac{1}{2}$ ”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且满足: $f(x)$ 的导函数存在, 且 $\frac{f(x)}{f'(x)} < x$, 则下列不等式成立的是()

- A. $f(2) < 2f(1)$ B. $3f(3) < 4f(4)$
C. $2f(3) < 3f(4)$ D. $3f(2) < 2f(3)$

9. 已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) = 3^x + \frac{4}{3}$, 则 $f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) =$ ()

- A. -2 B. 3 C. -3 D. 2

10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 点 M, N 分别在棱 BB_1, CC_1 上, 满足 $AM + MN + ND_1$ 最小, 则四面体 $AMND_1$ 的体积为()

- A. $\frac{1}{12}V$ B. $\frac{1}{8}V$ C. $\frac{1}{6}V$ D. $\frac{1}{9}V$

11. 已知 $p: |x+1| > 2$, $q: x > a$, 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 则 a 的取值范围是()

- A. $a \leq 1$ B. $a \leq -3$ C. $a \geq -1$ D. $a \geq 1$

12. 已知平行于 x 轴的直线分别交曲线 $\ln y = 2x + 1, y^2 = 2x - 1 (y \geq 0)$ 于 A, B 两点, 则 $4|AB|$ 的最小值为()

- A. $5 + \ln 2$ B. $5 - \ln 2$ C. $3 + \ln 2$ D. $3 - \ln 2$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 平面区域 $\begin{cases} 3y + 2x - 1 \geq 0 \\ y + 4x - 7 \leq 0 \\ y - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ 的外接圆的方程是_____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 6$, $S_6 = -8$ ，则 $S_9 =$ _____.

15. $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为_____.

16. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 2 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 2x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = \frac{x+1}{y+2}$ 的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ， $x_1, x_2, x_3 \in R$ ，且 $x_1 < x_2 < x_3$ 。

(1) 当 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ 时，求函数 $f(x)$ 的减区间；

(2) 求证：方程 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根；

(3) 若方程 $f'(x) = 0$ 的两个实数根是 α, β ($\alpha < \beta$)，试比较 $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{x_2 + x_3}{2}$ 与 α, β 的大小，并说明理由。

18. (12 分) 已知半径为 5 的圆的圆心在 x 轴上，圆心的横坐标是整数，且与直线 $4x + 3y - 29 = 0$ 相切。

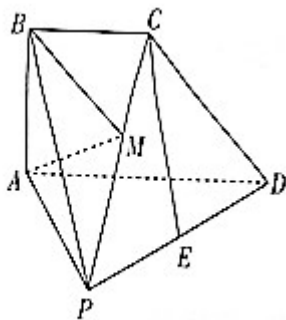
(1) 求圆的方程；

(2) 设直线 $ax - y + 5 = 0$ ($a > 0$) 与圆相交于 A, B 两点，求实数 a 的取值范围；

(3) 在 (2) 的条件下，是否存在实数 a ，使得弦 AB 的垂直平分线 l 过点 $P(-2, 4)$ ，若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由。

19. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 PAD ， $AD \parallel BC$ ， $AB = BC = AP = \frac{1}{2}AD$ ，

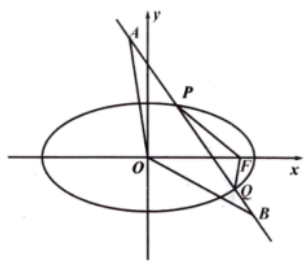
$\angle ADP = 30^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， E 是 PD 的中点。



(1) 证明： $PD \perp PB$ ；

(2) 设 $AD = 2$ ，点 M 在线段 PC 上且异面直线 BM 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ，求二面角 $M - AB - P$ 的余弦值.

20. (12 分) 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, F 为其右焦点, 直线 $l: y = kx + b (kb < 0)$ 与椭圆交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 点 P, Q 在 l 上, 且满足 $|AP| = |BQ|, |AQ| = |BP|, |OP| = |OQ|$. (点 A, P, Q, B 从上到下依次排列)



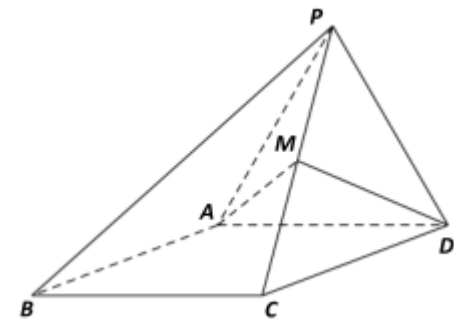
- (I) 试用 x_1 表示 $|OP|$;
- (II) 证明: 原点 O 到直线 l 的距离为定值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2|x - 2| - m (m > 0)$, 若 $f(x + 2) < 0$ 的解集为 $(-2, 2)$.

- (1) 求 m 的值;
- (2) 若正实数 a, b, c 满足 $a + 2b + 3c = m$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} \geq \frac{9}{4}$.

22. (10 分) 如图, 四棱锥 $P - ABCD$, 侧面 PAD 是边长为 2 的正三角形, 且与底面垂直, 底面 $ABCD$ 是 $\angle ABC = 60^\circ$ 的菱形, M 为棱 PC 上的动点, 且 $\frac{PM}{PC} = \lambda (\lambda \in [0, 1])$.

- (I) 求证: $\triangle PBC$ 为直角三角形;
- (II) 试确定 λ 的值, 使得二面角 $P - AD - M$ 的平面角余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

执行程序框图，逐次计算，根据判断条件终止循环，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，执行上述的程序框图：

第 1 次循环：满足判断条件， $x=2, y=1$ ；

第 2 次循环：满足判断条件， $x=4, y=2$ ；

第 3 次循环：满足判断条件， $x=8, y=3$ ；

不满足判断条件，输出计算结果 $y=3$ ，

故选 A.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的结果的计算与输出，其中解答中执行程序框图，逐次计算，根据判断条件终止循环是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

2. A

【解析】

根据题意，用 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 表示出 $\overline{AH}, \overline{BH}$ 与 $\overline{AM}$ ，求出 λ, μ 的值即可.

【详解】

解：根据题意，设 $\overline{BH} = x\overline{BC}$ ，则

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BH}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + x\overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}x(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}(1-x)\overline{AB} + \frac{1}{2}x\overline{AC},$$

$$\text{又 } \overline{AM} = \lambda\overline{AB} + \mu\overline{AC},$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}(1-x), \mu = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2},$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了平面向量基本定理的应用，关键是要找到一组合适的基底表示向量，是基础题.

3. B

【解析】

$$\because |F_1F_2| = 4\sqrt{3}$$

$$\because |F_1F_2| = 2c = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore c = 2\sqrt{3}$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2, \quad b^2 = 4$$

$$\therefore a = 4$$

$$\therefore |PF_1| + |PF_2| = 2a = 8$$

故选 B

点睛：本题主要考查利用椭圆的简单性质及椭圆的定义. 求解与椭圆性质有关的问题时要结合图形进行分析，即使不画出图形，思考时也要联想到图形，当涉及顶点、焦点、长轴、短轴等椭圆的基本量时，要理清它们之间的关系，挖掘出它们之间的内在联系.

4. C

【解析】

分四类情况进行讨论，然后画出相对应的图象，由图象可以判断所给命题的真假性.

【详解】

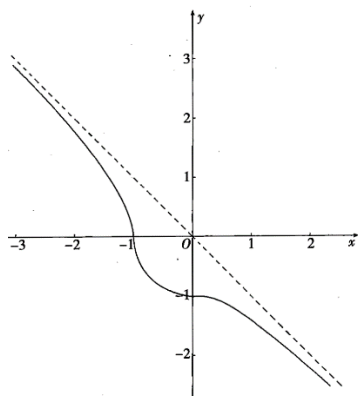
(1) 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时， $x^2 + y^2 = -1$ ，此时不存在图象；

(2) 当 $x \geq 0, y < 0$ 时， $y^2 - x^2 = 1$ ，此时为实轴为 y 轴的双曲线一部分；

(3) 当 $x < 0, y \geq 0$ 时， $x^2 - y^2 = 1$ ，此时为实轴为 x 轴的双曲线一部分；

(4) 当 $x < 0, y < 0$ 时， $x^2 + y^2 = 1$ ，此时为圆心在原点，半径为 1 的圆的一部分；

画出 $y = f(x)$ 的图象，



由图象可得：

对于①， $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，所以①正确；

对于②，函数 $y=f(x)$ 与 $y=-x$ 的图象没有交点，即 $F(x)=f(x)+x$ 没有零点，所以②错误；

对于③，由函数图象的对称性可知③错误；

对于④，函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 图象关于原点对称，则 $x|x|+y|y|=-1$ 中用 $-x$ 代替 x ，用 $-y$ 代替 y ，可得 $y|y|+x|x|=1$ ，所以④正确。

故选：C

【点睛】

本题主要考查了双曲线的简单几何性质，函数的图象与性质，函数的零点概念，考查了数形结合的数学思想。

5. C

【解析】

先利用等比数列的性质得到 a_3 的值，再根据 a_2, a_4 的方程组可得 a_2, a_4 的值，从而得到数列的公比，进而得到数列的通项和前 n 项和，根据后两个公式可得正确的选项。

【详解】

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_3^2 = a_2 a_4$ ，故 $a_3^3 = 64$ 即 $a_3 = 4$ ，

由 $\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_2 a_4 = 16 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2 = 8 \\ a_4 = 2 \end{cases}$ ，因为 $\{a_n\}$ 为递增数列，故 $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ 符合。

此时 $q^2 = 4$ ，所以 $q = 2$ 或 $q = -2$ （舍，因为 $\{a_n\}$ 为递增数列）。

故 $a_n = a_3 q^{n-3} = 4 \times 2^{n-3} = 2^{n-1}$ ， $S_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$ 。

故选 C。

【点睛】

一般地，如果 $\{a_n\}$ 为等比数列， S_n 为其前 n 项和，则有性质：

(1) 若 $m, n, p, q \in N^*, m+n=p+q$ ，则 $a_m a_n = a_p a_q$ ；

(2) 公比 $q \neq 1$ 时，则有 $S_n = A + Bq^n$ ，其中 A, B 为常数且 $A+B=0$ ；

(3) $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \dots$ 为等比数列 ($S_n \neq 0$) 且公比为 q^n 。

6. B

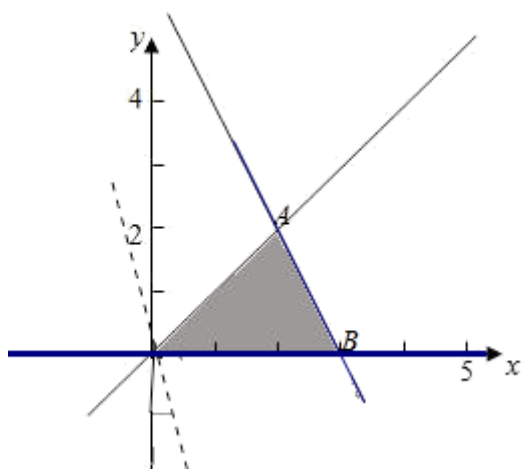
【解析】

由目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9，我们可以画出满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数) 的可行域，根据目标函数

的解析式形式，分析取得最优解的点的坐标，然后根据分析列出一个含参数 k 的方程组，消参后即可得到 k 的取值。

【详解】

画出 x, y 满足的 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数) 可行域如下图：



由于目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9，

可得直线 $y = 0$ 与直线 $9 = 3x + y$ 的交点 $B(3, 0)$ ，

使目标函数 $z = x + 3y$ 取得最大值，

将 $x = 3, y = 0$ 代入 $2x + y + k = 0$ 得： $k = -6$ 。

故选：B。

【点睛】

如果约束条件中含有参数，我们可以先画出不含参数的几个不等式对应的平面区域，分析取得最优解是哪两条直线的交点，然后得到一个含有参数的方程（组），代入另一条直线方程，消去 x, y 后，即可求出参数的值。

7. A

【解析】

作出函数 $f(x)$ 的图象，得到 $D = (2, 4]$ ，把函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有零点转化为 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 $(2, 4]$ 上有交点，利用导数求出切线斜率，即可求得 k 的取值范围，再根据充分、必要条件的定义即可判断。

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象如图，

由图可知， $D = (2, 4]$ ，

函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有 2 个零点，即 $f(x) = kx$ 有两个不同的根，

也就是 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 $(2, 4]$ 上有 2 个交点，则 k 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ；

设过原点的直线与 $y = \log_2 x$ 的切点为 $(x_0, \log_2 x_0)$ ，斜率为 $\frac{1}{x_0 \ln 2}$ ，

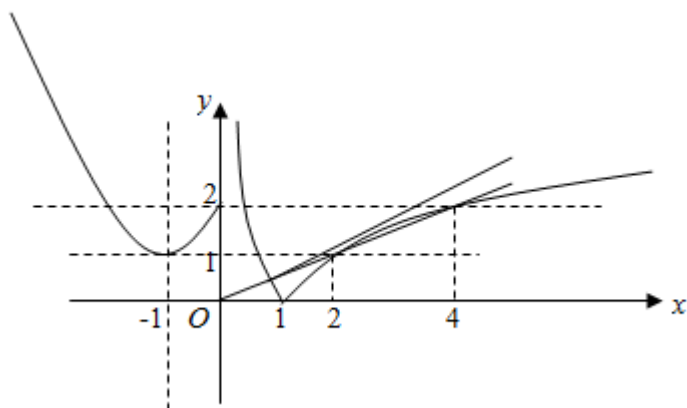
则切线方程为 $y - \log_2 x = \frac{1}{x_0 \ln 2} (x - x_0)$ ，

把 $(0, 0)$ 代入，可得 $-\log_2 x_0 = -\frac{1}{\ln 2}$ ，即 $x_0 = e$ ， $\therefore$ 切线斜率为 $\frac{1}{e \ln 2}$ ，

$\therefore k$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e \ln 2}\right)$ ，

$\therefore$ 函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有两个零点”是“ $k > \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件，

故选 A.



【点睛】

本题主要考查了函数零点的判定，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，训练了利用导数研究过曲线上

某点处的切线方程，试题有一定的综合性，属于中档题.

8. D

【解析】

根据 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数及 $\frac{f(x)}{f'(x)}$ 有意义可得 $f'(x) > 0$, 构建新函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 利用导数可得

$g(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 从而可得正确的选项.

【详解】

因为 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 故 $f'(x) \geq 0$.

又 $\frac{f(x)}{f'(x)}$ 有意义, 故 $f'(x) \neq 0$, 故 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x) < xf'(x)$.

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $g(3) > g(2)$ 即 $\frac{f(3)}{3} > \frac{f(2)}{2}$,

整理得到 $2f(3) > 3f(2)$.

故选: D.

【点睛】

本题考查导数在函数单调性中的应用, 一般地, 数的大小比较, 可根据数的特点和题设中给出的原函数与导数的关系构建新函数, 本题属于中档题.

9. D

【解析】

判断 $-1 < \log_3 \frac{2}{3} < 0$, 利用函数的奇偶性代入计算得到答案.

【详解】

$\because -1 < \log_3 \frac{2}{3} < 0$, $\therefore f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) = f\left(-\log_3 \frac{2}{3}\right) = f\left(\log_3 \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.

故选: D

【点睛】

本题考查了利用函数的奇偶性求值, 意在考查学生对于函数性质的灵活运用.

10. D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/178122053051006137>