难关必刷 01 有理数与整式加减综合之规律探究与新定义（解答 40 题专练）

一、解答题

1.（2022 秋·江西景德镇·七年级统考期中）材料一：对任意有理数 a，b 定义运算“⊗”，

$a\otimes b=a+b-\frac{2023}{2}$，如：$1\otimes 2=1+2-\frac{2023}{2}$，$1\otimes 2\otimes 3=1+2-\frac{2023}{2}+3-\frac{2023}{2}=-2017$.

材料二：规定$[a]$表示不超过 a 的最大整数，如$[3.1]=3$，$[-2]=-2$，$[-1.3]=-2$.

(1)$2\otimes 6=$_____，$[-\pi]^{[\pi]}=$_____；

(2)求$1\otimes 2\otimes 3\otimes 4\ldots\otimes 2022\otimes 2023$的值：

(3)若有理数 m，n 满足$m=2[n]=3[n+1]$，请直接写出$m\otimes[m+n]$的结果.

【答案】(1)$-\frac{2007}{2}$，-64

(2)2023

(3)$-\frac{2053}{2}$

【分析】（1）根据材料 1 新定义的运算“⊗”的概念即可求出$2\otimes 6$的值，根据材料 2 中的定义即可求出$[-\pi]^{[\pi]}$的值；

（2）根据新定义函数把$1\otimes 2\otimes 3\otimes 4\ldots\otimes 2022\otimes 2023$变形为加减运算，再根据运算顺序即可求出$1\otimes 2\otimes 3\otimes 4\ldots\otimes 2022\otimes 2023$的值；

（3）根据$m=2[n]=3[n+1]$求出m的值和n的范围，再求出$[m+n]$的值，即可得出$m\otimes[m+n]$的值.

【详解】（1）解：$\because a\otimes b=a+b-\frac{2023}{2}$，

$\therefore 2\otimes 6=2+6-\frac{2023}{2}=-\frac{2007}{2}$，

$\because[-\pi]=-4,[\pi]=3$，

$\therefore[-\pi]^{[\pi]}=(-4)^{3}=-64$，

故答案为：$-\frac{2007}{2}$，-64；

（2）依题意，$1\otimes 2\otimes 3\otimes 4\ldots\otimes 2022\otimes 2023$

$=1+2+3+\ldots\ldots+2023+2022\times\left(-\frac{2023}{2}\right)$

$=\frac{1+2023}{2}\times 2023-\frac{2022\times 2023}{2}$

$=2023$；

（3）$\because[n+1]=[n]+1$，$2[n]=3[n+1]$，

$\therefore 2[n]=3[n]+3$，

$\therefore[n]=-3$，

$\therefore m=2\times(-3)=-6$，

$\therefore[m+n]=[-6+n]=-9$，

$\therefore m\otimes[m+n]=-9\otimes(-6)=-9-6-\frac{2023}{2}=-\frac{2053}{2}$.

【点睛】本题考查了新定义运算，有理数的混合运算，理解新定义是解题的关键.

2.（2022 秋·浙江台州·七年级校考期中）定义：对于任意的有理数 a，$b(a\neq b)$，$a\oplus b=\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$

(1)探究性质：

①例：$3\oplus 2=$_____；$2\oplus 3=$_____；$(-3)\oplus 2=$_____；$(-3)\oplus(-2)=$_____；

②可以再举几个例子试试，你有什么发现吗？请用含 a，b 的式子表示出 $a\oplus b$ 的一般规律；

(2)性质应用：

①运用发现的规律求【$(-92.5)\oplus 16.33$】$\oplus$【$(-33.8)\oplus(-4)$】的值；

②将 -11，-10，-9，-8……，7，8 这 20 个连续的整数，任意分为 10 组，每组两个数，现将每组的两个数中任一数值记作 a，另一个记作 b，求出 $a\oplus b$，10 组数代入后可求得 10 个 $a\oplus b$ 的值，则这 10 个值的和的最小值是____.

【答案】(1)①3，3，2，-2；②见解析，一般规律为 $a\oplus b=\begin{cases}a,a>b\\b,b>a\end{cases}$

(2)①16.33；②-10

【分析】（1）①根据定义 $a\oplus b=\frac{1}{2}(|a-b|+a+b),a\neq b$ 即可求解；②举例 $3\oplus(-2),(-2)\oplus(-3)$，通过与以上几个比较，可以发现该运算是用来求大小不同的两个有理数的最大值；

（2）①直接利用规律进行求解；②不妨设 $a>b$，则代数式中绝对值符号可直接去掉，代数式等于 a，由此即可解决问题.

【详解】（1）解：①$\because a\oplus b=\frac{1}{2}(|a-b|+a+b),a\neq b$，

$\therefore 3\oplus 2=\frac{1}{2}\left(|3-2|+3+2\right)=3$，

$2\oplus 3=\frac{1}{2}\left(|2-3|+2+3\right)=3$，

$(-3)\oplus 2=\frac{1}{2}\left(|-3-2|-3+2\right)=2$，

$(-3)\oplus(-2)=\frac{1}{2}\left(|-3+2|-3-2\right)=-2$，

故答案为：3，3，2，-2；

②例如：$3\oplus(-2)=\frac{1}{2}\left(|3+2|+3-2\right)=3$，

$(-2)\oplus(-3)=\frac{1}{2}\left(|-2+3|-2-3\right)=-2$，

通过以上例子发现，该运算是用来求大小不同的两个有理数的最大值，

用a，b的式子表示出一般规律为$a\oplus b=\begin{cases}a,a>b\\b,b>a\end{cases}$；

（2）解：①【$(-92.5)\oplus 16.33$】$\oplus$【$(-33.8)\oplus(-4)$】

$=16.33\oplus(-4)$

$=16.33$；

②不妨设$a>b$，则代数式中绝对值符号可直接去掉，

$\therefore$代数式等于a，

a为偶数，$b=a-1$

最小值$=(-10)+(-8)+(-6)+(-4)+(-2)+0+2+4+6+8=-10$，

故答案为：-10.

【点睛】本题考查了绝对值、有理数的加减混合运算，解题的关键是掌握新定义，把所给代数式化简，找到新定义的运算规律，利用规律进行求解.

3.（2022秋·浙江温州·七年级校联考期中）如图，从左边第一个格子开始向右数，在每个小格子中都填入一个整数，使得其中任意三个相邻格子中所填整数之和都相等.

-2	a			6	b			-9	c	…	

(1)可求得$a=$____，第2022个格子中的数为____；

(2)求前2022个格子中所填整数之和S的值；

(3)若前m个格子中所填整数之和$S=-2022$，求m的值.（直接写出答案即可）

【答案】(1)6，–9

(2)-3370

(3)$m=1213$

【分析】（1）根据三个相邻格子的整数的和相等列式求出a的值，再根据第 9 个数是–9，可得$b=-9$，然后找出格子中的数每 3 个为一个循环组依次循环，再用 2022 除以 3，根据余数的情况确定与第几个数相同即可得解；

（2）可先计算出这三个数的和，再照规律计算.

（3）由于是三个数重复出现，因此可用前三个数的重复多次计算出结果.

【详解】（1）解：设第三个数为x，第四个数为y，由题意得：

$a+x+y=x+y+6$，

$\therefore a=6$，

$\because -2+a+x=a+x+y$，

$\therefore y=-2$.

根据表格可以看出，数据的规律为每三个数是一个循环，

$\therefore x=b=-9$.

$\because 2022\div 3=674$，

∴第 2022 个格子中的数与第三个格子中的数相同为：–9.

故答案为：6，–9；

（2）解：$S=674\times(-2+6-9)=-3370$；

（3）解：$\because -9+6-2=5$，

$(-2022)\div(-5)=404\ldots\ldots-2$，

∴前 404 组数据之和为-2020，

$\because 404\times 3=1212$，

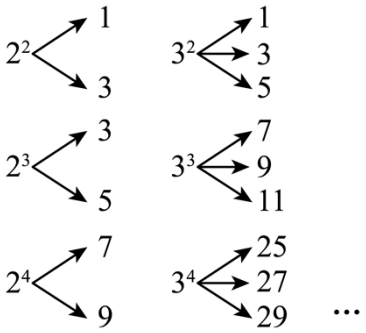
∴前 1213 个格子中所填整数之和$S=-2022$，

$\therefore m=1213$.

【点睛】本题考查了数字的变化规律，找到数据变化的规律是解题的关键.

4.（2022 秋·浙江温州·七年级校考期中）我校七年级数学兴趣小组成员们自主开展数学微项目研究．结合本阶段学内容特点，他们决定研究数的一些“神秘”性质.

探索数的神秘性质

<table>
<tr><td>素材</td><td>尼科马霍斯是古希腊数学家，他的著作《算术入门》中记载了各种数分门别类的整理成果，其中任何一个整数 m 的立方都可以写成 m 个连续奇数之和.</td><td>举例论证：
$1^3=1$；$2^3=3+5$；$3^3=7+9+11$；
请你按规律写出：
$4^3=$_.</td></tr>
<tr><td>规律总结</td><td>当 m 是奇数 7 时，则等号右边式子中的中间数（即第 4 个数）为_；</td><td>当 m 为偶数 10 时，则等号右边式子中的中间两个数（即第 5 和第 6 个数）为_.</td></tr>
<tr><td>综合应用</td><td colspan="2">利用上面结论计算：$1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3+10^3+11^3$.</td></tr>
<tr><td>拓展延伸</td><td colspan="2">我们还发现以下规律：已知 $m\geq 2$，$n\geq 3$，且 m，n 均为正整数，如果将 m^n 进行如图所示的“分解”：

若 m^n（且 m，n 均为不大于 7 的正整数）的分解中有奇数 31，则 m^n 的值为_.</td></tr>
</table>

【答案】素材：$13+15+17+19$；规律总结：49，99，101；综合应用：4356；拓展延伸：64 或 216

【分析】素材：设未知数，列方程求解即可；

规律总结：根据左边数与右边中间一个数或两个数的平均数的关系求解即可；

综合应用：找出规律，根据规律进行计算即可求解；

拓展延伸：根据题意，验证求解.

【详解】解：素材：设 $4^3=(a-2)+a+(a+2)+(a+4)$，

解得：$a=15$，

$\therefore 4^3=13+15+17+19$，

故答案为：$13+15+17+19$；

规律总结：设$7^3=(a-6)+(a-4)+(a-2)+a+(a+2)+(a+4)+(a+6)$，

解得：$a=49$，

当$m=10$时，$10^2-1=99$，$10^2+1=101$，

故答案为：49，99，101；

综合应用：$1^3=1=1^2$，

$1^3+2^3=1+8=9=3^2=(1+2)^2$，

$1^3+2^3+3^3=1+8+27=36=6^2=(1+2+3)^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3=1+8+27+64=100=10^2=(1+2+3+4)^2$，

…

$\therefore 1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3+10^3+11^3$

$=(1+2+3+\cdots+9+10+11)^2$，

$=\left[\dfrac{(1+11)\times 11}{2}\right]^2$

$=66^2$

$=4356$

拓展延伸：当$m=2$时，$2^{n-1}-1=31$，

解得：$n=6$，

此时$m^n=2^6=64$，

当$m=6$时，$6^{n-1}-5=31$，

解得$n=3$，

此时$m^n=6^3=216$，

故答案为：64 或 216.

【点睛】本题考查了数字的变化规律，有理数的加法运算，指数方程，利用方程思想是解题的关键.

5.（2021 春·山东青岛·七年级校考期中）问题再现：

数形结合是解决数学问题的一种重要的思想方法，借助这种方法可将抽象的数学知识变得直观起来并且具有可操作性，从而可以帮助我们快速解题．初中数学里的一些代数公式，很多都可以通过表示几何图形面积的方法进行直观推导和解释．例如：利用图形的几何意义推证完全平方公式．将一个边长为 a 的正方形

的边长增加 b，形成两个矩形和两个正方形，如图 1，这个图形的面积可以表示成：$(a+b)^2$ 或 $a^2+2ab+b^2$，$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，这就验证了两数和的完全平方公式.

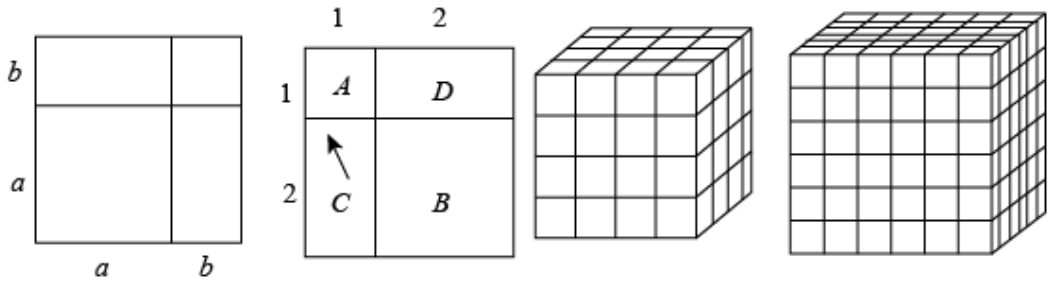


图1　　图2　　图3　　图4

问题提出：

如何利用图形几何意义的方法推证：$1^3+2^3=3^2$，如图 2，A 表示 1 个 1×1 的正方形，即：$1\times1\times1=1^3$，B 表示 1 个 2×2 的正方形，C 与 D 恰好可以拼成 1 个 2×2 的正方形，因此：B、C、D 就可以表示 2 个 2×2 的正方形，即：$2\times2\times2=2^3$，而 A、B、C、D 恰好可以拼成一个 $(1+2)\times(1+2)$ 的大正方形，由此可得：$1^3+2^3=(1+2)^2=3^2$.

(1)尝试解决：请你类比上述推导过程，利用图形几何意义方法推证：$1^3+2^3+3^3=$_____（要求自己构造图形并写出推证过程）.

(2)类比归纳：请用上面的表示几何图形面积的方法探究：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$_____（要求直接写出结论，不必写出解题过程）.

(3)实际应用：图 3 是由棱长为 1 的小正方体搭成的大正方体，图中大小正方体一共有多少个？为了正确数出大小正方体的总个数，我们可以分类统计，即分别数出棱长是 1，2，3 和 4 的正方体的个数，再求总和．例如：棱长是 1 的正方体有：$4\times4\times4=4^3$ 个，棱长是 2 的正方体有：$3\times3\times3=3^3$ 个，棱长是 3 的正方体有：$2\times2\times2=2^3$ 个，棱长是 4 的正方体有：$1\times1\times1=1^3$ 个，然后利用（3）类比归纳的结论，可得：_____=_____.

(4)图 4 是由棱长为 1 的小正方体成的大正方体，图中大小正方体一共有_____个.

(5)逆向应用：如果由棱长为 1 的小正方体搭成的大正方体中，通过上面的方式数出的大小正方体一共有 3025 个，那么棱长为 1 的小正方体一共有_____个.

【答案】(1)推过程见解析，36

(2) $(1+2+3+\cdots+n)^2$

(3) $1^3+2^3+3^3+4^3$，100

(4)441

(5)1000

【分析】（1）仿照推导$1^3+2^3=3^2$的方法即可完成计算；

（2）由前面两个推导即可得到一般规律；

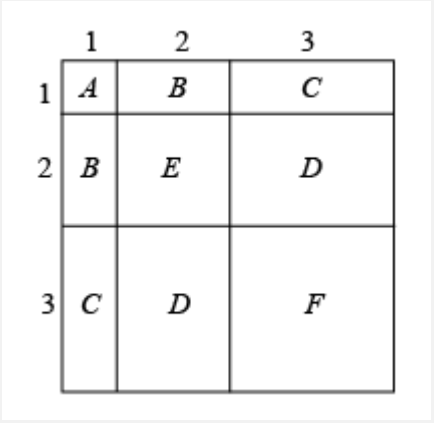
（3）由（2）的一般规律即可完成；

（4）分别表示出棱长为 1、2、3、4、5、6 的正方体的个数，再由（2）得出的规律即可完成计算；

（5）由$3025=55^2=(1+2+3+\cdots+10)^2$，即可确定 n 的值.

【详解】（1）解：A 表示 1 个 1×1 的正方形，即：$1\times1\times1=1^3$，E 表示 1 个2×2的正方形，F 表示 1 个3×3的正方形，两个 B 恰好可以拼成 1 个2×2的正方形，1 个 C 与 D 恰好可以拼成 1 个 2×2 的正方形，因此：B、B、E 就可以表示 2 个 2×2 的正方形，即：$2\times2\times2=2^3$，1 个 C 与 D 恰好可以拼成 1 个3×3的正方形，C、D、C、D、F 表示 3 个3×3的正方形，即：$3\times3\times3=3^3$；而这 9 个长方形恰好可以拼成一个$(1+2)\times(1+2)$的大正方形，由此可得：$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2=6^2=36$.

故答案为：36；



（2）解：由前面两个推导可得规律：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$；

故答案为：$(1+2+3+\cdots+n)^2$；

（3）解：由（2）得到的规律有：$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=10^2=100$（个），

故答案为：$1^3+2^3+3^3+4^3$，100；

（4）解：棱长分别为 1、2、3、4、5、6 的正方体的个数分别为6^3、5^3、4^3、3^3、2^3、1^3个，则大小正方体一共有$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=(1+2+3+4+5+6)^2=21^2=441$（个），

故答案为：441；

（5）解：由于$3025=55^2=(1+2+3+\cdots+10)^2$，则$n=10$，

所以棱长为 1 的小正方体一共有$10^3=1000$（个）；

故答案为：1000.

【点睛】本题是数形结合的问题，通过几何图形间的数量关系作出几何解释，得出规律，并应用规律解决问题，考查了有理数的运算，列代数式，学生归纳推理能力及解决问题的能力.

6.（2020 秋·浙江宁波·七年级校考期中）规定：求若干个相同的有理数（均不等于 0）的除法运算叫做除方，如 2÷2÷2，（-3）÷（-3）÷（-3）÷（-3）等．类比有理数的乘方，我们把 2÷2÷2 记作 2③，读作“2 的圈 3 次方”，（-3）÷（-3）÷（-3）÷（-3）记作（-3）④，读作“-3 的圈 4 次方”，一般地，把$\underbrace{a\div a\div a\div\ldots\div a}_{n个a}$（a≠0）记作 a⓷，读作“a 的圈 n 次方”.

【初步探究】

（1）直接写出计算结果：2③=___，（$\frac{1}{2}$）⑤=___；

（2）关于除方，下列说法错误的是___

A．任何非零数的圈 2 次方都等于 1；

B．对于任何正整数 n，1⓷=1；

C．3④=4③；

D．负数的圈奇数次方结果是负数，负数的圈偶数次方结果是正数.

【深入思考】

我们知道，有理数的减法运算可以转化为加法运算，除法运算可以转化为乘法运算，有理数的除方运算如何转化为乘方运算呢？

（1）试一试：仿照上面的算式，将下列运算结果直接写成幂的形式.

（-3）④=___； 5⑥=___；（$-\frac{1}{2}$）⑩=___.

（2）想一想：将一个非零有理数 a 的圈 n 次方写成幂的形式等于___；

（3）算一算：$12^2\div(-\frac{1}{3})^④\times(-2)^⑤-(-\frac{1}{3})^⑥\div3^3$

【答案】初步探究：（1）$\frac{1}{2}$，8;（2）C；深入思考：（1）$\frac{1}{3^2}$，$\frac{1}{5^4}$，2^8；（2）$\frac{1}{a^{n-2}}$；（3）-5.

【分析】初步探究：

（1）根据除方运算的定义即可得出答案；

（2）根据除方运算的定义逐一判断即可得出答案；

深入思考：

（1）根据除方运算的定义即可得出答案；

（2）根据（1）即可总结出（2）中的规律；

（3）先按照除方的定义将每个数的圈 n 次方算出来，再根据有理数的混合运算法则即可得出答案.

【详解】解：初步探究：

（1）$2^{③}=2\div2\div2=\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2})^{⑤}=\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}=8$

（2）A：任何非零数的圈 2 次方就是两个相同数相除，所以都等于 1，故选项 A 错误;

B：因为多少个 1 相除都是 1，所以对于任何正整数 n，$1^{ⓝ}$都等于 1，故选项 B 错误；

C：$3^{④}=3\div3\div3\div3=\frac{1}{9}$，$4^{③}=4\div4\div4=\frac{1}{4}$，$3^{④}\neq4^{③}$，故选项 C 正确；

D：负数的圈奇数次方，相当于奇数个负数相除，则结果是负数；负数的圈偶数次方，相当于偶数个负数相除，则结果是正数，故选项 D 错误；

故答案选择：C.

深入思考：

（1）$(-3)^{④}=(-3)\div(-3)\div(-3)\div(-3)=\frac{1}{3^2}$

$5^{⑥}=5\div5\div5\div5\div5\div5=\frac{1}{5^4}$

$(-\frac{1}{2})^{⑩}=\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)=2^8$

（2）$a^{ⓝ}=a\div a\div a\ldots\div a=\frac{1}{a^{n-2}}$

（3）原式$=144\div\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{4-2}}\times\frac{1}{(-2)^{5-2}}-\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{6-2}}\div27$

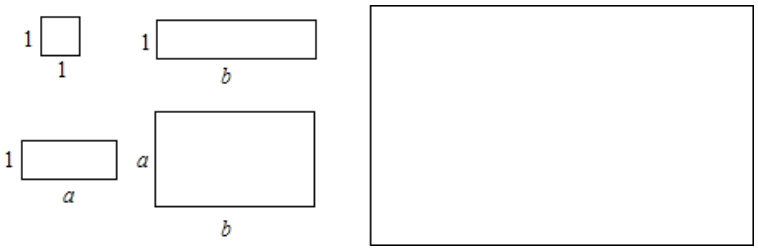
$=144\div9\times\left(-\frac{1}{8}\right)-81\div27$

$=-2-3$

$=-5$

【点睛】本题主要考查了除方运算，运用到的知识点是有理数的混合运算，掌握有理数混合运算的法则是解决本题的关键.

7.（2023 春·江苏盐城·七年级统考期中）【操作发现】如图，现有1×1，$1\times a$，$1\times b$，$a\times b$的矩形卡片各一张，请你在下面的方框内将它们拼成一个大的矩形（要求：画出分割线，并标注必要的线段长）．观察操作前后的面积可以得到一个等式，这个等式是_____.



【应用探究】对于一个正整数 n，若能找到正整数 a，b，使得 $n=a+b+ab$，则称 n 为一个“奇妙数”．例如 $3=1+1+1\times1$，则 3 就是一个“奇妙数”．根据“奇妙数”的规定，解决下列问题：

（1）7 是不是一个“奇妙数”？为什么？

（2）从 1 到 15 这 15 个正整数中“奇妙数”有哪些?

【活动拓展】在一次数学活动课上，黑板上写有 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、…、$\frac{1}{60}$ 共 60 个数字．小王老师要求同学们进行以下操作：每次操作先从黑板上的数中任选取 2 个数 a、b，然后删去这两个数 a 和 b，同时在黑板上写出与 $a+b+ab$ 的值相等的数．试求经过 59 次操作后黑板上剩下的数．

【答案】[操作发现] $a+b+ab+1=(a+1)(b+1)$（答案不唯一）；[应用探究]（1）是，理由见解析；（2）3、5、7、8、9、11、13、14、15；[活动拓展]60

【分析】[操作发现] 利用图形面积写出等式即可；

[应用探究]（1）将 7 分解为 $1+3+1\times3$，即可得出答案；

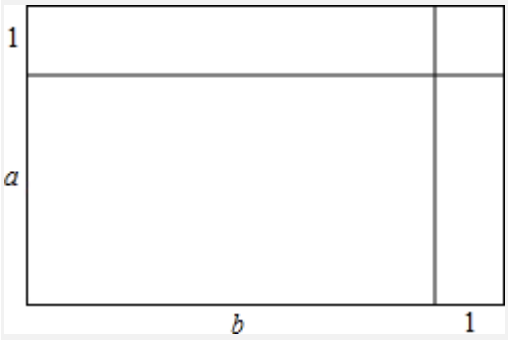
（2）由 $n=a+b+ab$，可变形为 $n+1=(a+1)(b+1)$，所以，只要 $n+1$ 是合数，n 就是奇妙数；

[活动拓展] 设经过 59 次操作后，黑板上剩下的数为 x，则：$x+1=(1+1)\times(\frac{1}{2}+1)\times(\frac{1}{3}+1)\times(\frac{1}{4}+1)\ldots(\frac{1}{60}+1)$ 进而求出 x 的值即可．

【详解】解：[操作发现]

图形不唯一，如图：

$a+b+ab+1=(a+1)(b+1)$；



[应用探究]

（1）7 是一个“奇妙数”，理由：$7=1+3+1\times3$；

（2）$3=1+1+1\times1$，$5=1+2+1\times2$，$7=1+3+1\times3$，$8=2+2+2\times2$，$9=1+4+1\times4$，$11=1+5+1\times5$，

$13=1+6+1\times6$，$14=2+4+2\times4$，$15=1+7+1\times7$，

从 1 到 15 这 15 个正整数中“奇妙数”有 3、5、7、8、9、11、13、14、15 共 9 个；

[活动拓展]

$\because a+b+ab+1=(a+1)(b+1)$，

$\therefore$每次操作前和操作后，黑板上的每个数的乘积不变，

设经过 59 次操作后，黑板上剩下的数为x，则：

$x+1=(1+1)\times(\frac{1}{2}+1)\times(\frac{1}{3}+1)\times(\frac{1}{4}+1)\ldots(\frac{1}{60}+1)$

$=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\ldots\times\frac{61}{60}$

$=61$

解得：$x=60$，

$\therefore$经过 59 次操作后黑板上剩下的数是 60.

【点睛】此题主要考查了应用设计与作图，有理数的混合运算，解题的是要多进行运算，并且理解奇妙数的意义，明白命题者考查的意图.

8.（2020 秋·广东惠州·七年级校考期中）观察以下一系列等式：

①$2^2-2^1=4-2=2^1$；

②$2^3-2^2=8-4=2^2$；

③$2^4-2^3=16-8=2^3$；

④_____；…

（1）请按这个顺序仿照前面的等式写出第④个等式：_____；

（2）根据你上面所发现的规律，用含字母 n 的式子表示第 n 个等式：_____，并说明这个规律的正确性；

（3）请利用上述规律计算：$2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{100}$.

【答案】（1）$2^5-2^4=32-16=2^4$；（2）$2^{n+1}-2^n=2^n$，见解析；（3）$2^{101}-2$

【分析】（1）根据题目中的式子，可以写出第④个等式；

（2）根据题目中式子的特点可以写出第 n 个等式；

（3）根据发现的规律，可以计算出所求式子的值.

【详解】解：（1）$\because$①$2^2-2^1=4-2=2^1$；

②$2^3-2^2=8-4=2^2$；

③$2^4-2^3=16-8=2^3$；

则第④个等式是：$2^5-2^4=32-16=2^4$，

故答案为：$2^5-2^4=32-16=2^4$；

（2）第 n 个等式是：$2^{n+1}-2^n=2^n$，

故答案为：$2^{n+1}-2^n=2^n$，

∵$2^{n+1}-2^n$

$=2\times2^n-2^n$

$=(2-1)\times2^n$

$=2^n$，

∴$2^{n+1}-2^n=2^n$；

（3）根据规律：

$2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{100}$，

$=(2^2-2^1)+(2^3-2^2)+(2^4-2^3)+\ldots+(2^{101}-2^{100})$

$=2^2-2^1+2^3-2^2+2^4-2^3+\ldots+2^{101}-2^{100}$

$=2^{101}-2^1$

$=2^{101}-2$.

【点睛】本题考查数字的变化类，有理数的混合运算，解答本题的关键是明确题意，发现题目中式子的变化特点，写出相应的式子.

9.（2022 秋·广东东莞·七年级校考期中）观察下列各式：

$1^2=\dfrac{1\times2\times3}{6}$；$1^2+2^2=\dfrac{2\times3\times5}{6}$；$1^2+2^2+3^2=\dfrac{3\times4\times7}{6}$；$1^2+2^2+3^2+4^2=\dfrac{4\times5\times9}{6}$；……

（1）根据你发现的规律，计算下面算式的值：$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=$_；

（2）请用一个含n的算式表示这个规律：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=$_；

（3）根据发现的规律，请计算算式$51^2+52^2+\cdots+99^2+100^2$的值（写出必要的解题过程）.

【答案】（1）55；（2）$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；（3）295425

【分析】（1）根据所给的 4 个算式的规律，$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ 等于$\dfrac{5\times6\times11}{6}$；

（2）根据所给的 4 个算式的规律，$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ 等于$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

（3）用 $1^2+2^2+\ldots+99^2+100^2$ 的值减去 $1^2+2^2+\ldots+49^2+50^2$ 的值，求出算式 $51^2+52^2+\ldots+99^2+100^2$ 的值是多少即可.

【详解】（1）$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\dfrac{5\times6\times11}{6}=55$；

（2）$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

（3）原式$=(1^2+2^2+\cdots+99^2+100^2)-(1^2+2^2+\cdots+49^2+50^2)$

$=\frac{100\times101\times201}{6}-\frac{50\times51\times101}{6}$

$=\frac{101\times(100\times201-50\times51)}{6}$

$=\frac{101\times(20100-2550)}{6}$

$=\frac{101\times17550}{6}$

$=295425$

【点睛】此题主要考查了有理数的混合运算，以及数字的变化规律，熟练掌握有理数混合运算顺序是解题的关键 .

10.（2022 秋·河南郑州·七年级校考期中）【阅读】求值$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$.

解：设 S= $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$ ①

将等式①的两边同时乘以 2 得：2S= $2+2^2+2^3+2^4\cdots+2^{11}$ ②

由②－①得：$2S-S=2^{11}-1$

即：S= $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=2^{11}-1$

【运用】仿照此法计算：

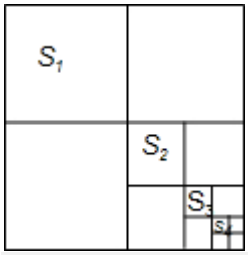
$1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{100}$ ；

【延伸】如图，将边长为 1 的正方形分成 4 个完全一样的小正方形，得到左上角一个小正方形为 S_1，选取右下角的小正方形进行第二次操作，又得到左上角更小的正方形 S_2，依次操作 2019 次，依次得到小正方形 S_1、S_2、S_3、…、S_{2019}.

完成下列问题：

（1）小正方形的面积 S_{2019} 等于_____；

（2）求正方形 S_1、S_2、S_3、…、S_{2019} 的面积和.



【答案】[运用] $\frac{5^{101}-1}{4}$；（1）$\frac{1}{4^{2019}}$；（2）$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{2020}}\right)$

【分析】[运用]仿照题目中的算法可以解答本题；

（1）由 $S_1=\frac{1}{4}$、$S_2=\frac{1}{4}S_1=\frac{1}{4^2}$、$S_3=\frac{1}{4}S_2=\frac{1}{4^3}$，可得 $S_{2019}=\frac{1}{4^{2019}}$；

（2）仿照题目中的算法可以解答本题.

【详解】解：[运用]设$S=1+5+5^2+5^3+5^4+\ldots+5^{100}$①，

①×3，得：$5S=5+5^2+5^3+5^4+\ldots+5^{100}+5^{101}$②，

②－①，得：$4S=5^{101}-1$，

则$S=\frac{5^{101}-1}{4}$，即$1+5+5^2+5^3+5^4+\ldots+5^{100}=\frac{5^{101}-1}{4}$；

（1）$\because S_1=\frac{1}{4}$、$S_2=\frac{1}{4}S_1=\frac{1}{4^2}$、$S_3=\frac{1}{4}S_2=\frac{1}{4^3}$，……

$\therefore S_{2019}=\frac{1}{4^{2019}}$，

故答案为：$\frac{1}{4^{2019}}$；

（2）设$S=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{2019}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^{2019}}$①，

①×$\frac{1}{4}$，得：$\frac{1}{4}S=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^{2019}}+\frac{1}{4^{2020}}$②，

①-②，得：$\frac{3}{4}S=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{2020}}$，

所以$S=\frac{4}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{2020}})$，即$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{2019}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{2020}}\right)$.

【点睛】本题考查数字的变化类，解题的关键是明确题意，发现数字的变化规律.

11.（2021 秋·福建泉州·七年级福建省永春第一中学校考期中）探究规律，完成相关题目

老师说：“我定义了一种新的运算，叫※（加乘）运算.”

老师写出了一些按照※（加乘）运算法则进行运算的式子:

(+2) ※(+4)=+6 ；(-3) ※(-4)=+7

(-2) ※(+3)=-5 ； (+5) ※(-6)=-11

0※(+9)=+9；(-7) ※0=+7

小明看完算式后说：我知道老师定义的※（加乘）运算法则了，聪明的你看出来了吗？请你帮忙归纳※（加乘）运算法则：

（1）归纳※（加乘）运算法则：

两数进行※（加乘）运算时，_

特别是 0 和任何数进行※（加乘）运算，或是任何数和 0 进行※（加乘）运算_

（2）计算：-5※〔0※（-3）〕=_

（3）若（4-2b）※（|a|-1）=0,求 a+b 的值

【答案】（1）同号得正，异号得负，并把绝对值相加；都等于这个数的绝对值；（2）﹣8；（3）1 或 3.

【分析】（1）根据题目中的例子可以总结出❋（加乘）运算的运算法则；

（2）①根据（1）中的结论可以解答本题；

②根据（1）中的结论和分类讨论的方法可以解答本题.

【详解】解：（1）由题意可得，

归纳❋（加乘）运算的运算法则：两数进行❋（加乘）运算时，同号得正，异号得负，并把它们的绝对值相加；

特别地，0 和任何数进行❋（加乘）运算，或任何数和 0 进行❋（加乘）运算，都等于这个数的绝对值；

故答案为：同号得正，异号得负，并把绝对值相加；都等于这个数的绝对值；

（2）（﹣5）❋[0❋（﹣3）]

=（﹣5）❋3

=﹣（5+3）

=﹣8，

故答案为：﹣8.

（3）∵（4-2b）❋（|a|-1）=0，

∴当|a|≠1 时，|4-2b|+||a|-1|=0，得 b=2，|a|=1（舍去），

当|a|=1 时，|4-2b|=0，得 b=2，

∴当|a|=1，b=2 时，a=±1，

∴当 a=1，b=2 时，a+b=3，

当 a=-1，b=2 时，a+b=1；

【点睛】本题考查有理数的混合运算，解答本题的关键是明确有理数混合运算的计算方法.

12.（2020 秋·山东枣庄·七年级统考期中）同学们学过有理数减法可以转化为有理数加法来运算，有理数除法可以转化为有理数乘法来运算．其实这种转化的数学方法，在学习数学时会经常用到，通过转化我们可以把一个复杂问题转化为一个简单问题来解决.

例如：计算$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$.

此题我们按照常规的运算方法计算比较复杂，但如果采用下面的方法把乘法转化为减法后计算就变得非常简单.

分析方法：因为$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

所以，将以上 4 个等式两边分别相加即可得到结果，解法如下：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$=\frac{4}{5}$

（1）$\frac{1}{n(n+1)}=$_____；

（2）应用上面的方法计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{2019\times2020}$.

（3）类比应用上面的方法探究并计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{11\times13}+\frac{1}{13\times15}$.

【答案】（1）$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；（2）$\frac{2019}{2020}$；（3）$\frac{7}{15}$

【分析】（1）根据题中式子的计算规律直接计算即可；

（2）根据题目中式子的特点，将各式化为两个数的差，再根据有理数的加减法法则计算；

（3）根据题目中式子的特点，将各式化为两个数的差，再根据有理数的加减法法则计算.

【详解】（1）$\because\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，

$\therefore\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

故答案为：$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

（2）$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{2019\times2020}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$

$=1-\frac{1}{2020}$

$=\frac{2019}{2020}$；

（3）$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{11\times13}+\frac{1}{13\times15}$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15})$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{15})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{14}{15}$

$=\frac{7}{15}$.

【点睛】此题考查有理数的混合运算，数字类规律的探究，根据题意得到此题的计算规律是解题的关键.

13.（2020 秋·山西太原·七年级山西实验中学校考期中）定义：若a是不为 1 的有理数，我们把$\frac{1}{1-a}$称为a的差倒数．如：2 的差倒数是$\frac{1}{1-2}=-1$，-1的差倒数是$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$．已知$a_1=-\frac{1}{3}$，$a_2$是$a_1$的差倒数，$a_3$是$a_2$的差倒数，则$a_3=$_____；$a_4$是$a_3$的差倒数，…，依次类推，回答下列问题：

（1）$a_2=$_____，$a_3=$_____，$a_4=$_____.

（2）求$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019}$的值.

【答案】（1）$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=4$，$a_4=-\frac{1}{3}$；（2）$\frac{35669}{12}$

【分析】（1）直接利用倒差数的定义求出 a_2、a_3、a_4 即可；

（2）先根据（1）发现 a_1、a_2、a_3…a_4 为$-\frac{1}{3}$、$\frac{3}{4}$、4 的循环，然后运用加法结合律计算即可.

【详解】解：（1）$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$，$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$

故答案为$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=4$，$a_4=-\frac{1}{3}$；

（2）由题意和（1）可知，a_1、a_2、a_3…a_4 为$-\frac{1}{3}$、$\frac{3}{4}$、4 的循环

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019}$

=（$-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+4$）+（$-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+4$）+…+（$-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+4$）

=673×（$-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+4$）

=$673\times\frac{53}{12}$

=$\frac{35669}{12}$.

【点睛】本题主要考查了数字变化规律以及有理数的四则混合运算，理解差倒数的定义以及发现每三个数一循环成为解答本题关键.

14.（2022 秋·湖南衡阳·七年级校考期中）观察下列等式：

$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$……

（1）仿照上面的等式，把后面这个代数式写成上面等式右边的形式：$\frac{1}{n(n+1)}=$_____.

（2）直接写出下面算式的结果：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{2019\times2020}=$_____；

以下两小题，需写出解答过程：

（3）计算：$\left|\frac{1}{2}-1\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{99}-\frac{1}{98}\right|+\left|\frac{1}{100}-\frac{1}{99}\right|$

（4）探究并计算：$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2006\times2008}$.

【答案】（1）$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；（2）$\frac{2019}{2020}$；（3）$\frac{99}{100}$；（4）$\frac{1003}{4016}$

【分析】（1）观察题干中所给的式子可得结果；

（2）原式各项利用拆项法变形，计算即可得到结果；

（3）先去绝对值，再利用拆项法变形，计算即可得到结果；

（4）将原式变形为$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1003\times1004}\right)$，再利用拆项法变形，计算即可得到结果.

【详解】解：（1）由题意可得：

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

（2）由题意可得：

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{2019\times2020}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$

$=1-\frac{1}{2020}$

$=\frac{2019}{2020}$；

（3）$\left|\frac{1}{2}-1\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{99}-\frac{1}{98}\right|+\left|\frac{1}{100}-\frac{1}{99}\right|$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$=1-\frac{1}{100}$

$=\frac{99}{100}$；

（4）$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2006\times2008}$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1003\times1004}$

$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1003\times1004}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1003}-\frac{1}{1004}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{1004}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1003}{1004}$

$=\frac{1003}{4016}$

【点睛】本题考查了有理数的混合运算，数字型规律，解题的关键是理解题干中的拆项方法.

15.（2021 春·浙江·七年级期中）数学中有很多的可逆的推理．如果$10^b=n$，那么利用可逆推理，已知 n 可求 b 的运算，记为$b=f\ \ (n)$，如$10^2=100$，

则$2=f(100)$;$10^4=10000$，则$4=f(10000)$.

①根据定义，填空：$f(10)=$_____，$f\left(10^3\right)=$_____.

②若有如下运算性质：$f(mn)=f(m)+f(n), f\left(\frac{n}{m}\right)=f(n)-f(m)$.

根据运算性质填空，填空：若$f(2)=0.3010$，则$f(4)=$_____；$f(5)=$_____；

③下表中与数x对应的$f(x)$有且只有两个是错误的，请直接找出错误并改正.

x	1.5	3	5	6	8	9	12	27
$f(x)$	$3a-b+c$	$2a-b$	$a+c$	$1+a-b-c$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$3-b-2c$	$6a-3b$

错误的式子是_____，_____；分别改为_____，_____.

【答案】①1，3；②0.6020；0.6990；③f（1.5），f（12）；f（1.5）=3a-b+c-1，f（12）=2-b-2c.

【分析】①根据定义可得：f（10b）=b，即可求得结论；

②根据运算性质：f（mn）=f（m）+f（n），f（$\frac{n}{m}$）=f（n）-f（m）进行计算；

③通过9=3^2，27=3^3，可以判断f（3）是否正确，同样依据5=$\frac{10}{2}$，假设f（5）正确，可以求得f（2）的值，即可通过f（8），f（12）作出判断.

【详解】解：①根据定义知：f（10b）=b，

∴f（10）=1，

f（10^3）=3.

故答案为：1，3.

②根据运算性质，得：f（4）=f（2×2）=f（2）+f（2）=2f（2）=0.3010×2=0.6020，

f（5）=f（$\frac{10}{2}$）=f（10）-f（2）=1-0.3010=0.6990.

故答案为：0.6020；0.6990.

③若f（3）≠2a-b，则f（9）=2f（3）≠4a-2b，

f（27）=3f（3）≠6a-3b，

从而表中有三个对应的f（x）是错误的，与题设矛盾，

∴f（3）=2a-b；

若f（5）≠a+c，则f（2）=1-f（5）≠1-a-c，

∴f（8）=3f（2）≠3-3a-3c，

f（6）=f（3）+f（2）≠1+a-b-c，

表中也有三个对应的f（x）是错误的，与题设矛盾，

∴f（5）=a+c，

∴表中只有f（1.5）和f（12）的对应值是错误的，应改正为：

f（1.5）=f（$\frac{3}{2}$）=f（3）-f（2）=（2a-b）-（1-a-c）=3a-b+c-1，

f（12）=f（$\frac{6\times6}{3}$）=2f（6）-f（3）=2（1+a-b-c）-（2a-b）=2-b-2c．

∵9=3^2，27=3^3，

∴f（9）=2f（3）=2（2a-b）=4a-2b，f（27）=3f（3）=3（2a-b）=6a-3b．

【点睛】本题考查了幂的应用，新定义运算等，解题的关键是深刻理解所给出的定义或规则，将它们转化为我们所熟悉的运算．

16．（2023 春·四川达州·七年级校考期中）数学问题：计算$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots\frac{1}{m^n}$（其中$m$，$n$都是正整数，且$m\geq2$，$n\geq1$）．

探究问题：为解决上面的数学问题，我们运用数形结合的思想方法，通过不断地分割一个面积为1 的正方形，把数量关系和几何图形巧妙地结合起来，并采取一般问题特殊化的策略来进行探究．

探究一：计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$．

第1次分割，把正方形的面积二等分，其中阴影部分的面积为$\frac{1}{2}$．

第 2 次分割，把上次分割图中空白部分的面积继续二等分，阴影部分的面积之和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$．

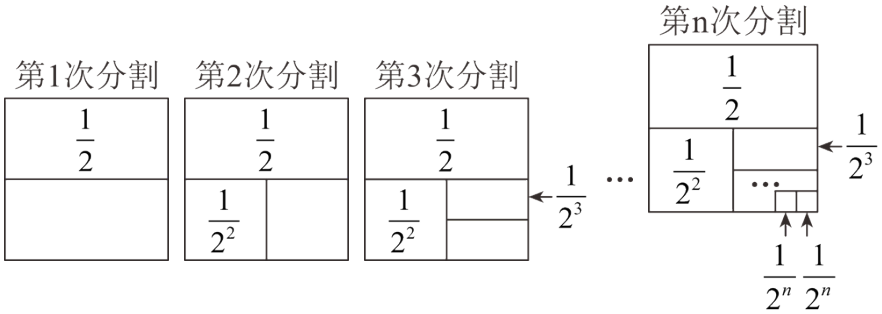
第 3 次分割，把上次分割图中空白部分的面积继续二等分，⌞ ．

⌞

第n次分割，把上次分割图中空白部分的面积最后二等分，所有阴影部分的面积之和

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，最后空白部分的面积是$\frac{1}{2^n}$．

第n次分割图可得等式：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$．


第1次分割
第2次分割
第3次分割
第n次分割
1/2
1/2
1/2

第2次分割，把上次分割图中空白部分的面积继续三等分，阴影部分的面积之和为$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}$.

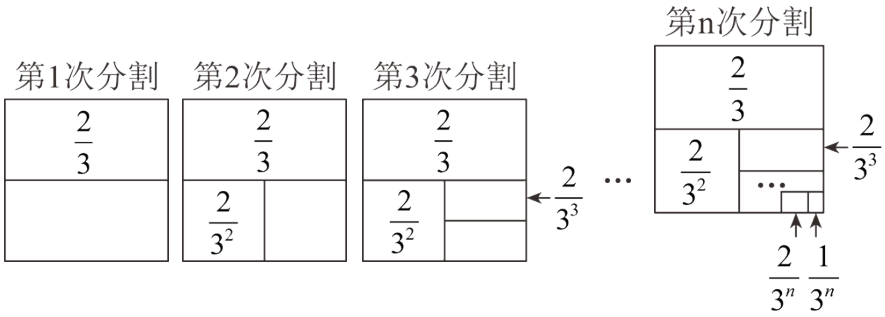
第3次分割，把上次分割图中空白部分的面积继续三等分，$\llcorner$.

$\llcorner$

第n次分割，把上次分割图中空白部分的面积最后三等分，所有阴影部分的面积之和为$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}$，最后空白部分的面积是$\frac{1}{3^n}$.

根据第n次分割图可得等式：$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}=1-\frac{1}{3^n}$，

两边同除以2，得$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}$.



探究三：计算$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$.

（仿照上述方法，只画出第n次分割图，在图上标注阴影部分面积，并写出探究过程）



解决问题：根据前面探究结果：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}=$_____.

$\llcorner$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}+\cdots+\frac{1}{m^n}=$_____.（只填空，其中$m$，$n$都是正整数，且$m\geq 2$，$n\geq 1$）

拓广应用：计算$\frac{5-1}{5}+\frac{5^2-1}{5^2}+\frac{5^3-1}{5^3}+\cdots+\frac{5^n-1}{5^n}$.

【答案】探究三：见解析；解决问题：$\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times 4^n}$，$1-\frac{1}{m^n}$；拓广应用：$n-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 5^n}$

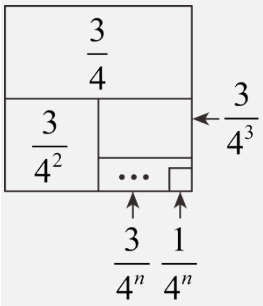
【分析】探究三：模仿例题，画出图形即可，根据正方形面积为1，构建关系式，可得结论.

解决问题：利用规律解决问题即可.

拓广应用：用转化的思想解决问题即可.

【详解】解：探究三

第n次分割图如图所示：



所有阴影部分的面积之和为1；

最后的空白部分的面积是$\frac{1}{4^n}$；

根据第n次分割图可得等式$\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{3}{4^n}=1-\frac{1}{4^n}$；

两边同除以3，得$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times4^n}$；

解决问题

根据前面探究结果：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$，

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3^n}$，

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times4^n}$.

L

根据第n次分割图可得等式，$\frac{m-1}{m}+\frac{m-1}{m^2}+\frac{m-1}{m^3}+\ldots+\frac{m-1}{m^n}=1-\frac{1}{m^n}$，

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\ldots+\frac{1}{m^n}=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{(m-1)\cdot m^n}$.

拓广应用

$\frac{5-1}{5}+\frac{5^2-1}{5^2}+\frac{5^3-1}{5^3}+\ldots+\frac{5^n-1}{5^n}$

$=1-\frac{1}{5}+1-\frac{1}{5^2}+1-\frac{1}{5^3}+\ldots+1-\frac{1}{5^n}$

$=n-(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\times5^n})$

$=n-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times5^n}$.

【点睛】本题考查规律型－图形变化类，有理数的混合运算，正方形的性质等知识，解题的关键是学会利用数形结合的思想解决问题，属于中考填空题中的压轴题.

17.（2021秋·湖北武汉·七年级武汉市武珞路中学校考期中）观察下面三行数：

2，-4，8，-16，32，-64；

3，-3，9，-15，33，-63；

-5，7，-17，31，-65，127.

（1）第一行的第9个数是_，第一行的第n个数是_；

（2）取每一行的第8个数，分别记为a,b,c，则$a-2b+c=$_；

（3）小明在第二行中取连续三个数，并求出他们的和为387，则$n=$_；

（4）取每行数的第n 个数，这三个数中任意两个数之差的最大值为6146，则$n=$_.

【答案】（1）512，$-(-2)^n$；（2）765；（3）7；（4）11

【分析】（1）观察第一行的每一个数，总结出规律，第n个数据为$-(-2)^n$，即可求解；

（2）观察第二、三行数据，总结出规律，求得每行的第8个数，然后代入求解即可；

（3）设取的是第二行中第n个数，求出这三个数，列方程求解即可；

（4）求出的每行的第n个数，并求出它们的差，分类讨论，求出最大的差，使得最大的差等于6146，求解即可.

【详解】解：（1）观察第一行的每一个数，可得第n个数据为$-(-2)^n$

将$\boldsymbol{n=9}$代入得，$-(-2)^9=512$

故答案为512，$-(-2)^n$

（2）观察第二行的数据，发现第二行数据比第一行数据大1，可得第n个数据为$-(-2)^n+1$

观察第三行数据，可得第三行数据为第一行和第二行数据和的相反数，可得第n个数据为$2\times(-2)^n-1$

∴第一行中，第8个数为$-(-2)^8=-256$，即$a=-256$

第二行中，第8个数为$-256+1=-255$，即$b=-255$

第三行中，第8个数为$-(-256-255)=511$，即$c=511$

$\therefore a-2b+c=(-256)-2\times(-255)+511=765$

故答案为765

（3）设取的是第二行中第n个数，则这三个连续的数为$-(-2)^n+1$，$-(-2)^{n+1}+1$，$-(-2)^{n+2}+1$

由题意可得$-(-2)^n+1+[-(-2)^{n+1}+1]+[-(-2)^{n+2}+1]=387$

化简得：$-3\times(-2)^n+3=387$，即$(-2)^n=-128$，解得$n=7$

故答案为7

（4）第一行中第n个数为$-(-2)^n$，第二行中第n个数为$-(-2)^n+1$，第三行中第n个数据为$2\times(-2)^n-1$

第一行和第二行的差为1

第一行和第三行的差为$\left|3(-2)^n-1\right|$

第二行和第三行的差为$\left|3\times(-2)^n-2\right|$

当n为偶数时，$3\times(-2)^n-1>0$，且$\left|3(-2)^n-1\right|>\left|3\times(-2)^n-2\right|$

$\therefore 3\times(-2)^n-1=6146$，$(-2)^n=2049$，

又$\because n$为正整数，$2^{11}=2048$

$\therefore n$无解；

当n为奇数时，$3\times(-2)^n-2<0$，且$\left|3(-2)^n-1\right|<\left|3\times(-2)^n-2\right|$

$\therefore 3\times(-2)^n-2=-6146$，即$(-2)^n=-2048$，解得$n=11$

故答案为11

【点睛】此题考查了数字类规律的探索，涉及的有理数的乘方，解题的关键是根据所给数字，得到每行的规律.

18.（2022秋·四川资阳·七年级校考期中）概念学习

现规定：求若干个相同的有理数（均不等于0）的商的运算叫做除方，比如$2\div2\div2$，

$(-3)\div(-3)\div(-3)\div(-3)$等，类比有理数的乘方，我们把$2\div2\div2$写作$2^{③}$，读作“2的圈3次方”，

$(-3)\div(-3)\div(-3)\div(-3)$写作$(-3)^{④}$，读作“$(-3)$的圈4次方”，一般地，把$\underbrace{a\div a\div a\div\cdots\div a}_{n个a}(a\neq0)$写作$a^{ⓝ}$，读作“a的圈n次方”.

初步探究

（1）直接写出计算结果：$3^{②}=$_____，$\left(-\frac{1}{3}\right)^{③}=$_____；

（2）下列关于除方说法中，错误的有_____；（在横线上填写序号即可）

A．任何非零数的圈2次方都等于1

B．任何非零数的圈3次方都等于它的倒数

C．负数的圈奇数次方结果是负数，负数的圈偶数次方结果是正数

D．圈n次方等于它本身的数是 1 或–1

深入思考

我们知道，有理数的减法运算可以转化为加法运算，除法运算可以转化为乘法运算，那么有理数的除方运算如何转化为乘方运算呢？

除方$\longrightarrow$ $2^{④}=2\div2\div2\div2=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ $\longrightarrow$ 乘方幂的形式

（3）归纳：请把有理数$a(a\neq0)$的圈$n(n\geq3)$次方写成幂的形式为：$a^{ⓝ}=$_____；

（4）比较：$(-2)^{⑧}$_____$(-4)^{⑥}$；填“>”“<”或“=”）

（5）计算：$-1^{⑳}+1\div\left(-\frac{1}{2}\right)^{④}\times(-7)^{⑥}-(-48)\div\left(\frac{1}{7}\right)^{④}$.

【答案】（1）1，–3；（2）D；（3）$(\frac{1}{a})^{n-2}$；（4）>；（5）$-\frac{195}{9604}$

【分析】（1）根据规定的运算，直接计算即可；

（2）根据圈n次方的意义，计算判断得出结论；

（3）根据题例的规定，直接写成幂的形式即可；

（4）根据圈n次方的规定直接进行判断即可；

（5）先把圈n次方转化成幂的形式，利用有理数的混合运算，计算求值即可.

【详解】解：（1）$3^{②}=3\div3=1$，

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{③}=\left(-\frac{1}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{3}\right)=-3$，

故答案为：1，–3；

（2）A．任何非零数的圈 2 次方都等于 1，结论正确，不符合题意；

B．任何非零数的圈 3 次方都等于它的倒数，结论正确，不符合题意；

C．负数的圈奇数次方结果是负数，负数的圈偶数次方结果是正数，结论正确，不符合题意；

D．圈n次方等于它本身的数是 1，结论错误，符合题意；

故选：D；

（3）$a^{ⓝ}=a\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\times\ldots\times\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{a}\right)^{n-2}$，

故答案为：$(\frac{1}{a})^{n-2}$；

（4）$(-2)^{⑧}=(-2)\div(-2)\div(-2)\div(-2)\div(-2)\div(-2)\div(-2)\div(-2)$

$=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{6}$

$=\frac{1}{2^{6}}$，

$(-4)^{⑥}=(-4)\div(-4)\div(-4)\div(-4)\div(-4)\div(-4)$

$=1\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{4}$

$=\frac{1}{4^{4}}$，

$\because 2^{6}<4^{4}$，

$\therefore\frac{1}{2^{6}}>\frac{1}{4^{4}}$，

故答案为：>；

（5）原式$=-1+1\div4\times\left(\frac{1}{7^{4}}\right)-(-48)\div7^{2}$

$=-1+\frac{1}{4\times2401}+\frac{48}{49}$

$=-\frac{195}{9604}$.

【点睛】本题考查了新定义运算，掌握圈n次方的意义是解本题的关键.

19.（2021秋·重庆渝中·七年级重庆巴蜀中学校考期中）阅读理解：

一个多位数，如果根据它的位数，可以从左到右分成左、中、右三个数位相同的整数，其中 a 代表这个整数分出来的左边数，b 代表的这个整数分出来的中间数，c 代表这个整数分出来的右边数，其中 a，b，c 数位相同，若 $b-a=c-b$，我们称这个多位数为等差数.

例如：357分成了三个数3，5，7，并且满足：5－3＝7－5；

413223分成三个数41，32，23，并且满足：32－41＝23－32；

所以：357和413223都是等差数.

（1）判断：148 _____等差数，514335_____等差数；（用“是”或“不是”填空）

（2）若一个三位数是等差数，试说明它一定能被3整除；

（3）若一个三位数 T 是等差数，且 T 是24的倍数，求该等差数 T.

【答案】（1）不是，是；（2）见解析；（3）432或456或840或864或888

【分析】（1）根据等差数的定义判定即可；

（2）设这个三位数是 M，$M=100a+10b+c$，根据等差数的定义可知 $b=\frac{a+c}{2}$，进而得出 $M=3(35a+2c)$ 即可.

（3）根据等差数的定义以及 24 的倍数的数的特征可先求出 a 的值，再根据是 8 的倍数可确定 c 的值，又因为 $b=\frac{a+c}{2}$，所以可确定 a、c 为偶数时 b 才可取整数有意义，排除不符合条件的 a、c 值，再将符合条件的 a、c 代入 $b=\frac{a+c}{2}$ 求出 b 的值，即可求解.

【详解】解：（1）$\because 4-1\neq 8-4$ ，

$\therefore$148 不是等差数，

$\because 43-51=35-43=-8$ ，

$\therefore$514335 是等差数；

（2）设这个三位数是 M，$M=100a+10b+c$，

$\because b-a=c-b$ ，

$\therefore b=\frac{a+c}{2}$ ，

$\because M=100a+10\times\frac{a+c}{2}+c=105a+6c=3(35a+2c)$ ，

$\therefore$这个等差数是 3 的倍数；

（3）由（2）知 $T=3(35a+2c), b=\frac{a+c}{2}$ ，

$\because T$ 是 24 的倍数，

$\therefore 35a+2c$ 是 8 的倍数，

$\because 2c$ 是偶数，

$\therefore$只有当 $35a$ 也是偶数时 $35a+2c$ 才有可能是 8 的倍数，

$\therefore a=2$ 或 4 或 6 或 8，

当 $a=2$ 时，$35a=70$ ，此时若 $c=1$，则 $35a+2c=72$ ，若 $c=5$ ，则 $35a+2c=80$ ，若 $c=9$ ，则 $35a+2c=88$，大于 70 又是 8 的倍数的最小数是 72，之后是 80,88 当 $35a+2c=96$ 时 $c>10$ 不符合题意；

当 $a=4$ 时，$35a=140$，此时若 $c=2$，则 $35a+2c=144$，若 $c=6$，则 $35a+2c=152$，（144、152 是 8 的倍数），

当 $a=6$ 时，$35a=210$，此时若 $c=3$，则 $35a+2c=216$，若 $c=7$，则 $35a+2c=224$，

（216、244 是 8 的倍数），

当 $a=8$ 时，$35a=280$，此时若 $c=0$，则 $35a+2c=280$，若 $c=4$，则 $35a+2c=288$，

若$c=8$，则$35a+2c=296$，（280,288,296 是 8 的倍数），

$\because b=\dfrac{a+c}{2}$，

∴若 a 是偶数，则 c 也是偶数时 b 才有意义，

$\therefore a=2$ 和 $a=6$ 是 c 是奇数均不符合题意，

当$a=4,c=2$时，$b=\dfrac{4+2}{2}=3,T=432$ ，

当$a=4,c=6$时，$b=\dfrac{4+6}{2}=5,T=456$，

当$a=8,c=0$时，$b=\dfrac{8+0}{2}=4,T=840$，

当$a=8,c=4$时，$b=\dfrac{8+4}{2}=6,T=864$，

当$a=8,c=8$时，$b=\dfrac{8+8}{2}=8,T=888$，

综上，T 为 432 或 456 或 840 或 864 或 888.

【点睛】本题考查新定义下的实数运算、有理数混合运算，整式的加减运算，能够结合倍数的特点及熟练掌握整数的奇偶性是解题关键.

20.（2022 秋·江苏·七年级期中）先阅读下列材料，然后解答问题：

材料：从 4 张不同的卡片中选取 2 张，有 6 种不同的选法，抽象成数学问题就是从 4 个不同元素中选取 2 个元素的组合，组合数记为$C_4^2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$．一般地，从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合数记作C_n^m，

$C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots2\times1}$（$m\le n$）.

例如：从 6 个不同元素中选 3 个元素的组合，组合数记作$C_6^3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

（1）为迎接国家建设工作检查，学校将举办小型书画展览．王老师在班级 8 幅优秀书画中选取 3 幅，共有多少种选法？

（2）探索发现：

计算：$C_3^2=$_____，$C_3^3=$_____，$C_4^3=$_____，$C_5^3=$_____，$C_5^4=$_____，$C_6^4=$_____.

由上述计算，试猜想C_n^k，C_n^{k+1}，C_{n+1}^{k+1}之间有什么关系.（只写结论，不需说明理由）

（3）请你直接利用（2）中猜想的结论计算：$C_4^3+C_4^2+C_5^2+C_6^2+\ldots+C_{10}^2$.

【答案】（1）56 种；（2）3，1，4，10，5，15；$Ckn+Cnk^{+1}=Cn_{+1}k^{+1}$；（3）165

【分析】（1）根据材料给出组合的方法直接计算即可；

（2）根据新定义分别进行计算；利用计算结果得$\because C_3^2+C_3^3=C_4^3$，$C_5^3+C_5^4=C_6^4$，由此规律可得$C_n^k+C_n^{k+1}=$

C_{n+1}^{k+1}，　　；

（3）利用（2）中的规律从左到右依次计算即可．

【详解】解：（1）根据公式$C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$，

答：共有 56 种选法．

（2）$C_3^2=3$，$C_3^3=1$，$C_4^3=4$，$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$，$C_5^4=\frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}=5$，$C_6^4=C_6^2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$，

$\because C_3^2+C_3^3=3+1=4=C_4^3$，

$C_5^3+C_5^4=10+5=15=C_6^4$，

$\therefore C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$，

故答案为 3；1；4；10；5；15；

（3）$C_4^3+C_4^2+C_5^2+C_6^2+\ldots+C_{10}^2$，

$=C_5^3+C_5^2+C_6^2+\ldots+C_{10}^2$，

$=C_6^3+C_6^2+\ldots+C_{10}^2$，

$=C_{11}^3$，

$=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}$，

$=165$．

【点睛】本题考查组合新定义计算，有理数的乘除法混合计算，掌握新定义的计算方法与性质，有理数的乘除法混合计算法则是解题关键．

21．（2021 秋·辽宁鞍山·七年级统考期中）仔细观察下列三组数：

第一组：－1，8，－27，64，－125，….

第二组：1，－4，9，－16，25，…

第三组：－2，－8，－18，－32，－50，…

（1）第一组的第 6 个数是 _____；

（2）第二组的第 n 个数是 _____；

（3）分别取每一组的第 10 个数，计算这三个数的和．

【答案】（1）216；（2）$(-1)^{n+1}n^2$；（3）700

【分析】（1）观察各数可以得到各数的绝对值为各数序号的立方，结合符号，即可得到规律，即可求出第 6 个数；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/178130053110006112