线性代数第二章方阵的行列式b

目录

01

方阵与行列式基本概念

方阵定义及性质

方阵定义：行数与列数相等的矩阵称为方阵。

方阵性质

方阵的转置仍是方阵。

方阵与标量相乘，结果仍是方阵。

行列式定义及性质

01

行列式定义：由n阶方阵的元素所构成的代数和，称为该方阵的行列式，记作|A|或det(A)。

02

行列式性质

03

行列式与它的转置行列式相等。

04

互换行列式的两行（列），行列式变号。

05

行列式的某一行（列）的所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式。

06

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

特殊方阵与行列式关系

对角矩阵

除主对角线外的元素全为零的方阵。

其行列式等于主对角线上元素的乘积。

上（下）三角矩阵

主对角线以下（以上）的元素全为零的方阵。其行列式也等于主对角线上元素的乘积。

正交矩阵

满足$AA^T=A^TA=I$的方阵。其行列式的值为±1。

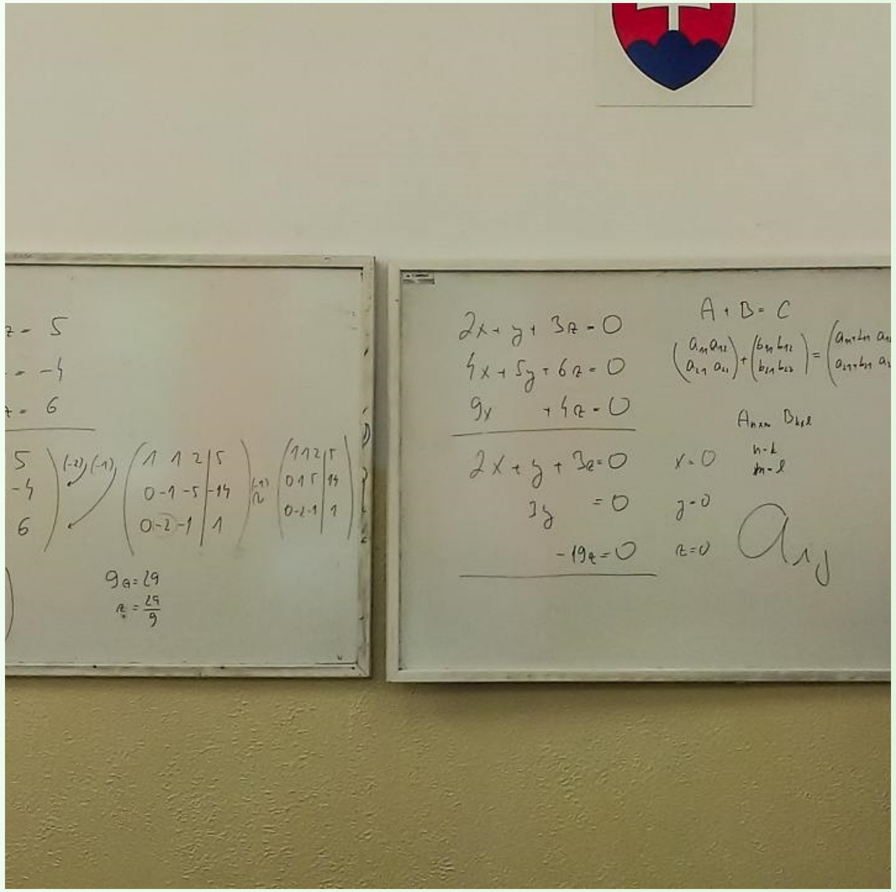
伴随矩阵

由n阶方阵A的行列式|A|的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的n阶矩阵称为A的伴随矩阵，记作A^*。有公式$AA^*=A^*A=|A|I$。

02

方阵行列式计算方法

直接法求方阵行列式



定义法

根据n阶行列式的定义，直接计算元素乘积的代数和。适用于低阶行列式。

对角线法则

对于2阶和3阶行列式，可以直接使用对角线法则进行计算。

展开法

利用行列式的性质，将高阶行列式降为低阶行列式进行计算。适用于任意阶数的行列式。

间接法求方阵行列式

01

利用性质化简

利用行列式的性质，如交换两行（列）、提公因子、拆项等，将原行列式化简为易计算的形式。

02

递推法

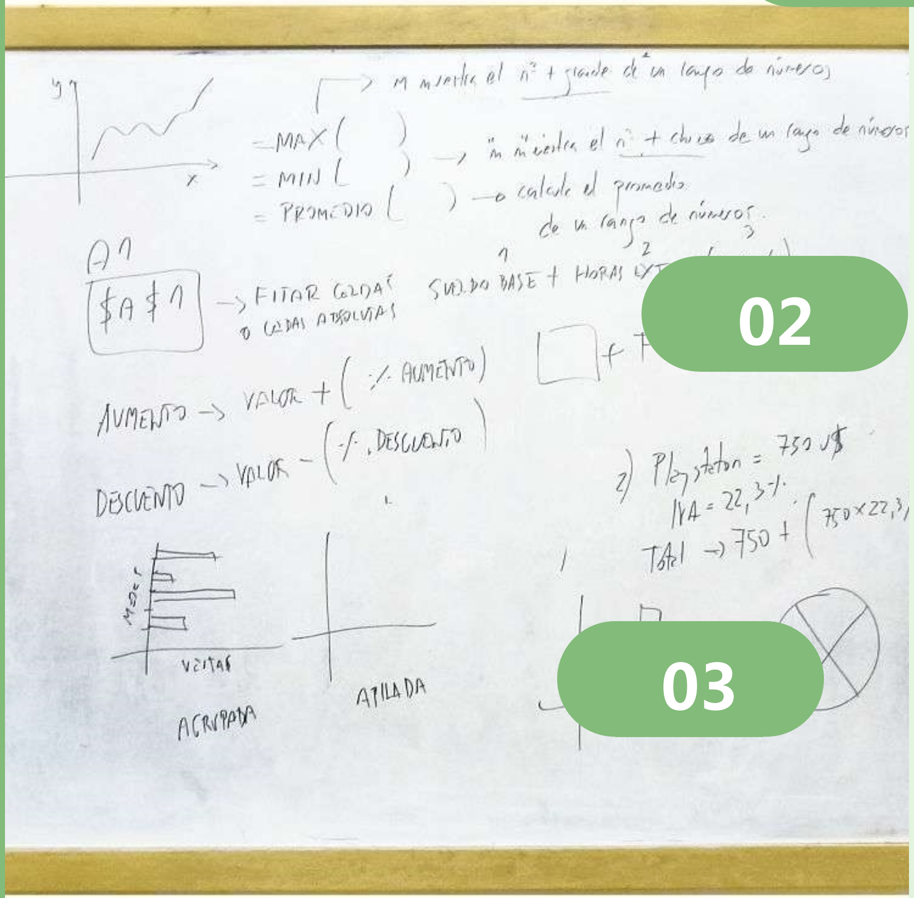
根据已知低阶行列式的值，通过递推关系式求得高阶行列式的值。

03

数学归纳法

对于具有某种规律性的行列式，可以使用数学归纳法进行证明和计算。

克拉默法则应用举例



01

求解线性方程组

利用克拉默法则，可以求解具有唯一解的n元线性方程组。具体步骤包括构造系数矩阵和增广矩阵、计算各阶主子式和克拉默法则中的分母与分子、求解未知量。

02

判断线性方程组的解的情况

通过比较系数矩阵和增广矩阵的秩，以及计算克拉默法则中的分母，可以判断线性方程组的解的情况，包括有唯一解、无解或无穷多解。

03

求解矩阵的逆

当矩阵A的行列式|A|≠0时，可以利用克拉默法则求解矩阵A的逆矩阵A^(-1)。具体步骤包括构造增广矩阵、计算各阶主子式和克拉默法则中的分母与分子、求解逆矩阵的元素。

03

方阵行列式性质与定理

行列式基本性质

01

行列式与它的转置行列式相等。

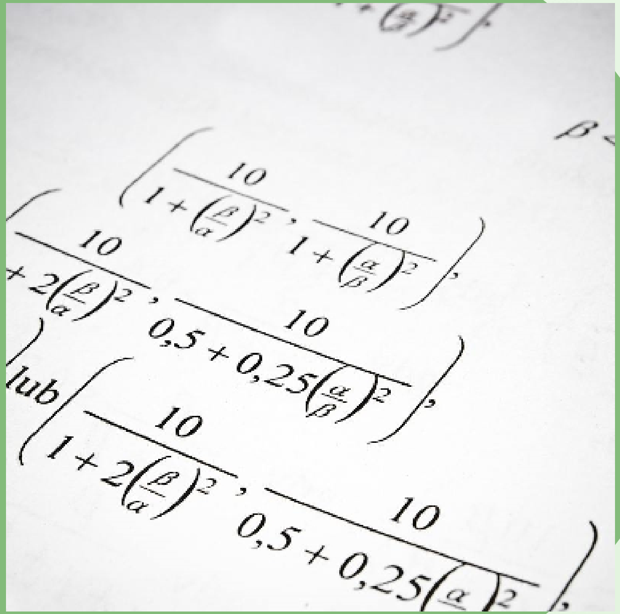
02

互换行列式的两行（列），行列式变号。

03

如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。

行列式基本性质



- 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式。
- 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。
- 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，例如第i列的元素都是两数之和：$D = | a{11} + b{11}, a{21} + b{21}, \ldots, a{n1} + b{n1}, a{12}, \ldots, a{n2}, \ldots, a{1n}, \ldots, a{nn} |$则$D$等于下列两个行列式之和：$D = | a{11}, a{21}, \ldots, a{n1}, a{12}, \ldots, a{n2}, \ldots, a{1n}, \ldots, a{nn} | + | b{11}, b{21}, \ldots, b{n1}, a{12}, \ldots, a{n2}, \ldots, a{1n}, \ldots, a{nn} |$

行列式按行（列）展开定理

01

余子式

在n阶行列式中，把(i,j)元a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做(i,j)元a_{ij}的余子式，记作M_{ij}。

02

代数余子式

记作$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，其中M_{ij}是元素a_{ij}的余子式。

03

行列式按行（列）展开法则

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ 或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$。

拉普拉斯定理及应用

k阶子式

在n阶行列式中，任取k行与k列（其中$k leq n$），位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在原行列式中的相对位置所构成的k阶行列式，称为原行列式的一个k阶子式。

拉普拉斯定理

在n阶行列式中，任意取定k行（列），由这k行（列）元素所构成的一切k阶子式的代数和等于行列式的值。

应用

拉普拉斯定理可以用来简化行列式的计算，特别是当行列式中包含许多零元素时。通过选择合适的子式和代数余子式，可以大大减少计算量。

04

方阵可逆条件与逆矩阵求法

方阵可逆条件及判定方法

对于n阶方阵A，若存在n阶方阵B，使得AB=BA=E（E为单位矩阵），则称A是可逆的，B是A的逆矩阵。

方阵可逆的充分必要条件是其行列式不等于零。

判定方法：计算方阵的行列式，若行列式不等于零，则方阵可逆；若行列式等于零，则方阵不可逆。