专题 26 相似模型之梅涅劳斯（定理）模型与塞瓦（定理）模型

梅涅劳斯（*Menelaus*，公元 98 年左右），是希腊数学家兼天文学家，梅涅劳斯定理是平面几何中的一个重要定理。

塞瓦（*G·Gevo*1647-1734）是意大利数学家兼水利工程师．他在 1678 年发表了一个著名的定理，后世以他的名字来命名，叫做塞瓦定理。

使用梅涅劳斯和塞瓦定理可以进行直线形中线段长度比例的计算，其逆定理还可以用来进行三点共线、三线共点等问题的判定方法，是平面几何学以及射影几何学中的一项基本定理，具有重要的作用．

目录导航

.....1

模型 1.梅涅劳斯（定理）模型及其逆定理.....1

模型 2.塞瓦（定理）模型.....7

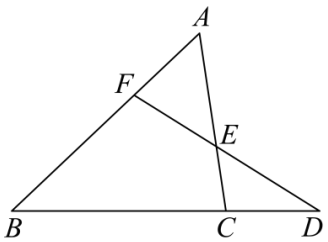
习题练模型 11

模型 1.梅涅劳斯（定理）模型及其逆定理

模型解读

梅涅劳斯（定理）模型：如图 1，如果一条直线与△*ABC* 的三边 *AB*、*BC*、*CA* 或其延长线交于 *F*、*D*、*E* 点，那么 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。其中：这条直线叫△*ABC* 的梅氏线，△*ABC* 叫梅氏三角形。

注意：梅涅劳斯（定理）特征是三点共线；我们用梅涅劳斯（定理）解决的大部分问题，也可添加辅助线后用平行线分线段成比例和相似来解决。



1）梅涅劳斯（定理）模型：如图 1，如果一条直线与△ABC 的三边 AB、BC、CA 或其延长线交于 F、D、E 点，那么 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。其中：这条直线叫△$ABC$ 的梅氏线，△ABC 叫梅氏三角形。

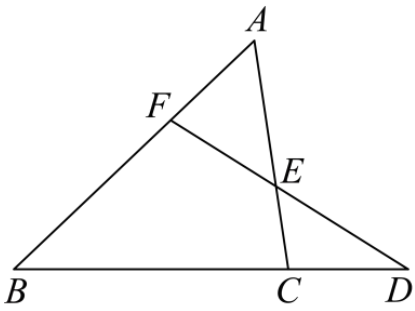


图 1

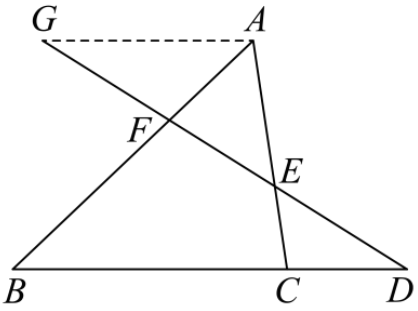


图 2

证明：证明：如图 2，过点 A 作 $AG\parallel BC$，交 DF 的延长线于点 G，易证：$\triangle AGF\backsim\triangle BDF$,$\triangle AGE\backsim\triangle CDE$，

$\therefore\frac{AF}{FB}=\frac{AG}{BD}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AG}$；$\therefore\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AG}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{AG}=1$.

2）梅涅劳斯定理的逆定理模型：如图 1，若 F、D、E 分别是△ABC 的三边 AB、BC、CA 或其延长线的三点，如果 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则 F、D、E 三点共线.

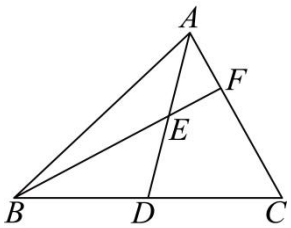
证明：先假设 F、D、E 三点不共线，直线 DF 与 AC 交于 P，由梅涅劳斯定理的定理得 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$。

$\because\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，$\therefore\frac{CP}{PA}=\frac{CE}{EA}$，$\therefore\frac{CP}{PA+CP}=\frac{CE}{EA+CE}$，$\therefore\frac{CP}{AC}=\frac{CE}{AC}$。

$\therefore$ $CP=CE$；即 P 与 E 重合，$\therefore$ D、E、F 三点共线。

模型运用

例 1.（23-24 九年级上·福建泉州·阶段练习）如图，已知，AD 是V ABC 的中线，E 是 AD 的中点，则 $AF:FC=$_____.



【答案】1:2

【分析】法 1：这道题是梅氏定理的直接应用，难点在于找梅氏线：直线 FEB。

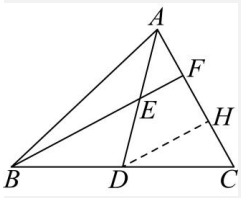
法 2：过点 D 作 $DH\parallel BF$，交 AC 于 H，根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{CD}{DB}=\frac{CH}{HF}$，$\frac{AF}{FH}=\frac{AE}{ED}$，根据

线段中点的性质得到$BD=DC, AE=ED$，得到$CH=HF$，$AF=FH$，计算即可.

本题考查的是平行线分线段成比例定理，灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键.

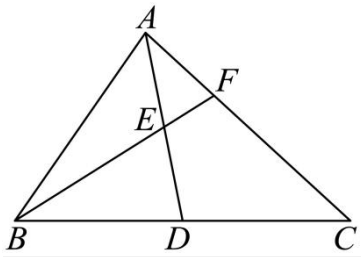
【详解】**法 1**：∵直线 EBF 是$\triangle ADC$的梅氏线，∴$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.∵ AD 是$\triangle ABC$ 的中线，∴$\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2}$，∵ E 是 AD 的中点，∴ $AE=ED$，∴$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{CF}{FA}=1$，∴$AF:FC=1:2$. 故答案为：$1:2$.

法 2：过点 D 作 $DH\parallel BF$ 交 AC 于 H，则$\frac{CD}{DB}=\frac{CH}{HF}$，$\frac{AF}{FH}=\frac{AE}{ED}$∵ AD 是$\triangle ABC$ 的中线，E 是 AD 的中点，



∴$BD=DC$，$AE=ED$，∴$CH=HF$，$AF=FH$ ∴$AF:FC=1:2$. 故答案为：$1:2$.

例 2.（23-24 八年级下·广东潮州·期中）$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 中点，E 为 AD 中点，直线 BE 交 AC 于 F，求证：$AC=3AF$.



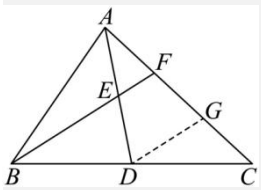
【答案】见解析

【分析】法 1：这道题是梅氏定理的直接应用，难点在于找梅氏线：直线 FEB。

法 2：本题考查了三角形中位线的性质及平行线分线段成比例定理，作 CF 的中点 G，连接 DG，证明 $DG\parallel BF$，即可得出 $AE:ED=AF:FG$，进而可证明 $AF=FG$，即可得出 $AC=3AF$.

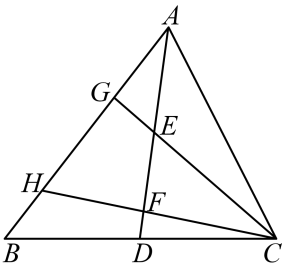
【详解】法 1：∵直线 EBF 是$\triangle ADC$的梅氏线，∴$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.∵$D$ 为 BC 中点，，∴$\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2}$，∵ E 是 AD 的中点，∴ $AE=ED$，∴$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{CF}{FA}=1$，∴ $FC=2AF$. $AC=3AF$.

法 2：作 CF 的中点 G，连接 DG，则 $FG=GC$，



∵$BD=DC$，∴$DG\parallel BF$，∴$AE:ED=AF:FG$，∵$AE=ED$，∴$AF=FG$，∴$AC=3AF$.

例 3.如图，在△ABC 中，D 为 BC 的中点，$AE:EF:FD=4:3:1$. 求 $AG:GH:AB$.



【解析】∵HFC是$\triangle ABD$的梅氏线，∴$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DF}{FA}=1$，

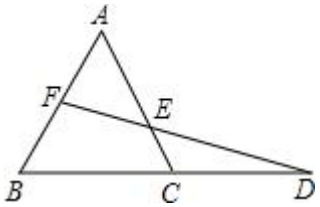
∵D为BC的中点，$AE:EF:FD=4:3:1$，∴$\frac{BC}{DC}=\frac{2}{1}$，$\frac{DF}{FA}=\frac{1}{7}$．∴$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{7}=1$，∴$\frac{AH}{HB}=\frac{7}{2}$．

∵GEC是$\triangle ABD$的梅氏线，∴$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DE}{EA}=1$，

∴$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$，∴$\frac{AG}{GB}=\frac{1}{2}$．∴$AG:GH:HB=3:4:2$．∴$AG:GH:AB=3:4:9$．

【点睛】这道题主要考查多个梅氏定理的应用，考查相对综合．

例4.（24-25 重庆九年级校考期中）如图，等边$\triangle ABC$的边长为2，F为AB中点，延长BC至D，使$CD=BC$，连接FD交AC于E，则四边形$BCEF$的面积为____．

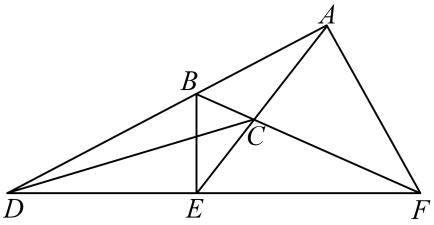


【解析】∵DEF是$\triangle ABC$的梅氏线，∴由梅涅劳斯定理得，$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，

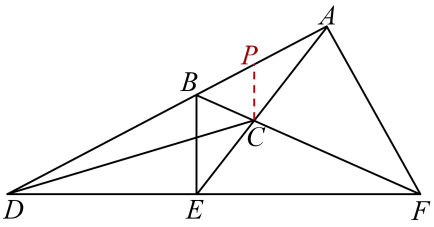
即$\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则$\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$，　连$FC$，$S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，

于是$S_{BCEF}=S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sin60°=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．故答案为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

例5.如图，CD、BE、AF分别为$\triangle ABC$（$\triangle ABC$不是等边三角形）的三个外角平分线，分别交AB、AC、BC于D、E、F．证明：D、E、F三点共线．



【解析】过 C 作 BE 的平行线，则 $\angle BCP=\angle CBE=\angle EBD=\angle CPB$，所以 $\triangle BPC$ 是等腰三角形．则 $PB=CB$．



则有：$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{PB}{BA}=\dfrac{CB}{BA}$．同理 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{CB}$；$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BA}{AC}$．所以 $\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{CB}{BA}\cdot\dfrac{AC}{CB}\cdot\dfrac{BA}{AC}=1$．

所以 D、E、F 共线．

【点睛】这道题主要是考查梅氏定理逆定理判定三点共线．

例 6．（24-25·广东·九年级校联考期中）梅涅劳斯（*Menelaus*）是古希腊数学家，他首先证明了梅涅劳斯定理，定理的内容是：如图 1，如果一条直线与 $\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 或它们的延长线交于 F、D、E 三点，那么一定有 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$．　下面是利用相似三角形的有关知识证明该定理的部分过程：

证明：如图 2，过点 A 作 $AG\parallel BC$，交 DF 的延长线于点 G，则有 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AG}{BD}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CD}{AG}$，

$\therefore\triangle AGF\backsim\triangle BDF,\triangle AGE\backsim\triangle CDE$，$\therefore\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AG}{BD}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CD}{AG}=1$．

请用上述定理的证明方法解决以下问题：

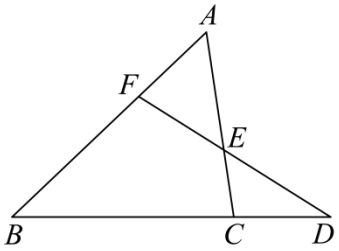


图1

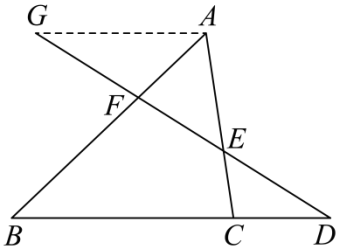


图2

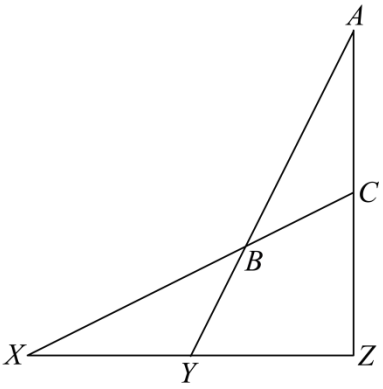


图3

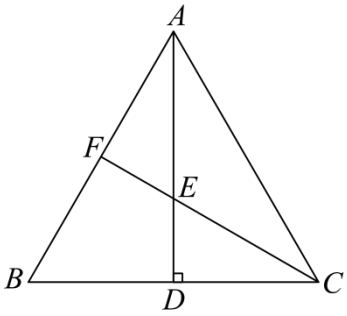


图4

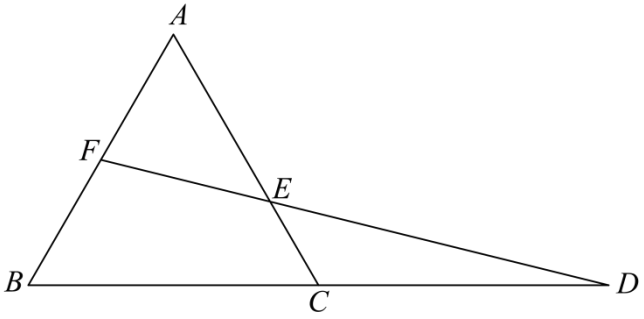


图5

（1）如图 3，$\triangle ABC$ 三边 CB,AB,AC 的延长线分别交直线 l 于 X,Y,Z 三点，证明：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YB}=1$．

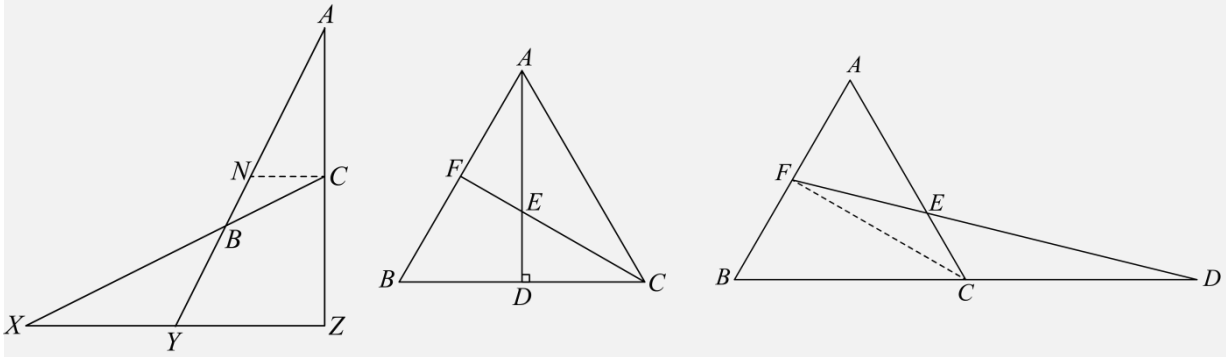
请用上述定理的证明方法或结论解决以下问题：（2）如图 4，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，点 D 为 BC 的中点，点 F 在 AB 上，且 $BF=2AF$，CF 与 AD 交于点 E，试求 AE 的长．（3）如图 5，$\triangle ABC$ 的面积为 4，F 为 AB 中点，延长 BC 至 D，使 $CD=BC$，连接 FD 交 AC 于 E，求四边形 $BCEF$ 的面积．

【答案】（1）详见解析；（2）$AE=\frac{3}{4}\sqrt{3}$；（3）$\frac{8}{3}$

【分析】(1) 过点 C 作 $CN\parallel XZ$ 交 AY 于点 N，根据平行线分线段成比例定理列出比例，化简计算即可．(2) 根据定理，勾股定理，等边三角形的性质解答即可．(3) 根据定理，计算比值，后解答即可．

【详解】（1）证明：如图，过点 C 作 $CN\parallel XZ$ 交 AY 于点 N，

则 $\frac{BX}{XC}=\frac{BY}{YN},\frac{CZ}{ZA}=\frac{YN}{AY}$．故：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YB}=\frac{BY}{YN}\cdot\frac{YN}{AY}\cdot\frac{AY}{YB}=1$．



（2）解：如图，根据梅涅劳斯定理得：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{DE}{EA}=1$．

又∵ $BF=2AF$，∴∴$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2},\frac{BC}{CD}=2$，∴ $DE=AE$．在等边 $\triangle ABC$ 中，∵ $AB=3$，点 D 为 BC 的中点，

∴ $AD\perp BC,BD=CD=\frac{3}{2}$．∴由勾股定理知：$AD=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ∴ $AE=\frac{3}{4}\sqrt{3}$．

（3）解：∵线段 DEF 是 $\triangle ABC$ 的梅氏线，

∴由梅涅劳斯定理得，$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，即 $\frac{1}{1}\times\frac{2}{1}\times\frac{CE}{EA}=1$，则 $\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$．如图，连接 FC，

$S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},S_{\triangle CEF}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，于是 $S_{四边形BCFF}=S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times4=\frac{8}{3}$．

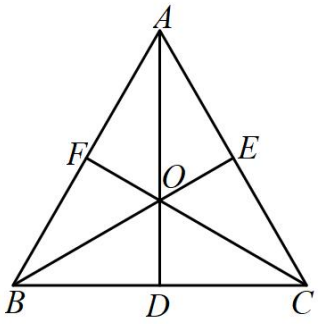
【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，勾股定理，等边三角形的性质，三角形面积的计算，熟练掌握定理是解题的关键．

模型 2.塞瓦（定理）模型

模型解读

塞瓦（定理）模型：塞瓦定理是指在△ABC 内任取一点 O，延长 AO、BO、CO 分别交对边于 D、E、F，如图 3，则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。

注意：塞瓦（定理）的特征是三线共点，我们用塞瓦（定理）解决的大部分问题，也可添加辅助线后用平行线分线段成比例和相似来解决。



塞瓦（定理）模型：塞瓦定理是指在△ABC 内任取一点 O，延长 AO、BO、CO 分别交对边于 D、E、F，如图 3，则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。

塞瓦（定理）证明：法 1：可利用梅涅劳斯定理证明：在△ADC 中，割线 BOE $\therefore\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$①

在△ABD 中，割线 COF，$\therefore\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$②，由②÷①：即得：$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$。

法 2：$\because\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COD}}$；$\therefore\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ACD}-S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}$①；同理：$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}$②；$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}$③；

由①×②×③得：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}\cdot\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}\cdot\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}=1$。

塞瓦定理的逆定理：如果有三点 F、D、E 分别在△ABC 的三边 AB、BC、CA 上，且满足 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，那么 AD、BE、CF 三线交于一点。

塞瓦定理的逆定理证明：设 AD、BE 交于点 O，联结 CO 并延长交 AB 于 F'；

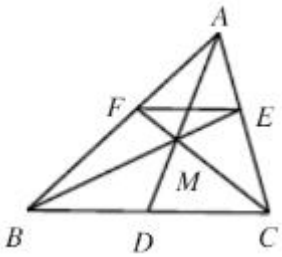
根据塞瓦定理：$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。$\therefore\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$，$\therefore\frac{AB}{F'B}=\frac{AB}{FB}$，

$\therefore F'B=FB$，$\therefore F'$ 与 F 重合，即证。

注意：利用塞瓦定理的逆定理可判定三线共点，如证明三角形三条中线交于一点；三角形三条角平分线必交于一点；三角形三条高线交于一点等。

模型运用

例 1. 如图，设 M 为$\triangle ABC$ 内的一点，BM 与 AC 交于点 E，CM 与 AB 交于点 F，若 AM 通过 BC 的中点，求证：$EF//BC$。



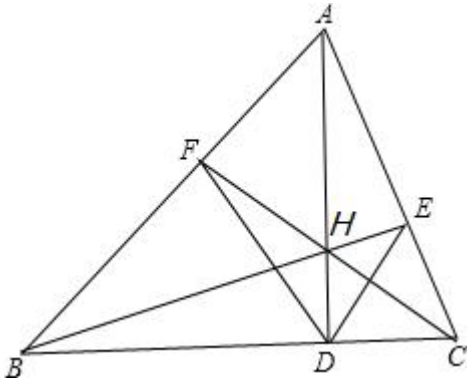
【详解】证明：在 $\triangle ABC$ 中，$\because$ 点 D 为边 BC 的中点，$\therefore BD=CD$.

对$\triangle ABC$ 和点 M 应用赛瓦定理可得：$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$.

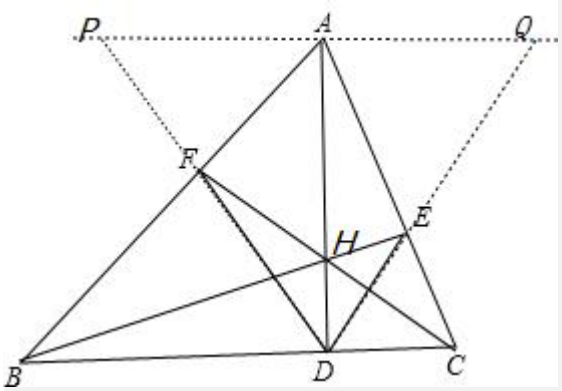
$\therefore \frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$，$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{AE}{CE}$. 即 $EF//BC$;

点评：本题考查了赛瓦定理，要熟练掌握定理的内容，是解此题的关键.

例 2. 如图，在锐角$\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高线，H 是线段 AD 内任一点，BH 和 CH 的延长线分别交 AC、AB 于 E、F，求证：$\angle EDH=\angle FDH$。



【详解】证明：过点 A 作 $PQ//BC$，与 DF，DE 的延长线分别交于点 P、Q，则 $DA\perp PQ$。



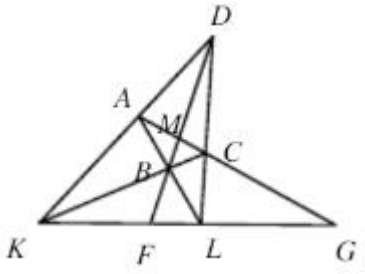
对$\triangle ABC$ 和点 H 应用赛瓦定理可得：$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$.

∵$PQ//BC$，∴$\frac{AF}{BF}=\frac{AP}{BD},\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AQ}$,∴$\frac{AP}{BD}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CD}{AQ}=1$,∴$AP=AQ$

根据垂直平分线，∴$PD=QD$，∴$\triangle PQD$ 是等腰三角形，∴$\angle EDH=\angle FDH$。

点评：本题考查了赛瓦定理，要熟练掌握定理的内容，是解此题的关键.

例 3.如图，四边形 $ABCD$ 的对边 AB 和 CD，AD、BC 分别相交于 L、K，对角线 AC 与 BD 交于点 M，直线 KL 与 BD，AC 分别交于 F、G，求证：$\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG}$.



对$\triangle DKL$ 和点 B 应用赛瓦定理可得：$\frac{DA}{AK}\times\frac{KF}{FL}\times\frac{LC}{CD}=1$．①

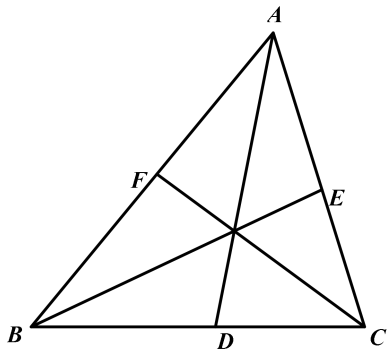
对 $\triangle DKL$ 和截线 ACG，由梅氏定理得：$\frac{DA}{AK}\cdot\frac{KG}{GL}\cdot\frac{LC}{CD}=1$②

由①②得：$\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{LG}$

点评：本题考查了赛瓦定理，要熟练掌握定理的内容，是解此题的关键.

例 4.已知：ΔABC 内角平分线 AD 、 BE 、 CF 与对边分别交于点 D 、 E 、 F 。

求证：三角形三条内角平分线交于一点。（用塞瓦定理的逆定理证明）



证明：由角平分线定理知 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC},\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{FB},\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{EA}$.

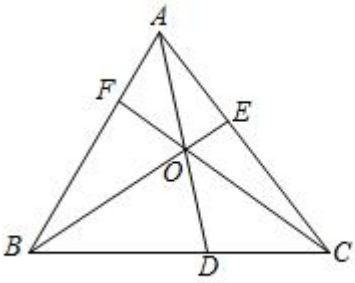
因此 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$. 由塞瓦定理逆定理得 AD、BE、CF 交于一点。

例 5.（2022·山西晋中·统考一模）请阅读下列材料，并完成相应任务：

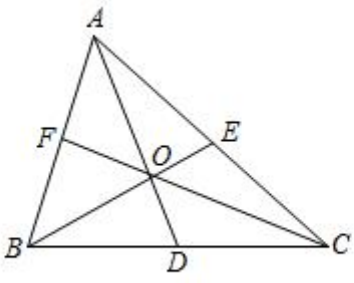
塞瓦定理：塞瓦定理载于 1678 年发表的《直线论》，是意大利数学家塞瓦的重大发现．塞瓦是意大利伟大的水利工程师，数学家.

定理内容：如图 1，塞瓦定理是指在 $\triangle ABC$ 内任取一点 O，延长 AO，BO，CO 分别交对边于 D，E，F，则 $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$.

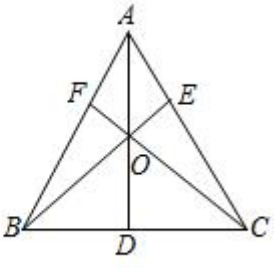
数学意义：使用塞瓦定理可以进行直线形中线段长度比例的计算，其逆定理还可以用来进行三点共线、三线共点等问题的判定方法，是平面几何学以及射影几何学中的一项基本定理，具有重要的作用.



(图1)



(图2)



(图3)

任务解决：(1)如图 2，当点 D，E 分别为边 BC，AC 的中点时，求证：点 F 为 AB 的中点；(2)若 $\triangle ABC$ 为等边三角形（图 3），$AB=12$，$AE=4$，点 D 是 BC 边的中点，求 BF 的长，并直接写出 $\triangle BOF$ 的面积.

【答案】(1)证明见解析(2) $BF=8$；$\triangle BOF$ 的面积为 $6\sqrt{3}$

【分析】（1）根据塞瓦定和中点的性质即可求解；

（2）根据塞瓦定和等边三角形的性质即可求出 BF，然后过点 F 作 $FG\perp BC$ 于 G，证明 $\triangle COD\sim\triangle CFG$，可求出 OD，从而求出 $\triangle BOC$ 的面积，然后根据 $\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$ 可求 $\triangle BCF$ 的面积，从而得解.

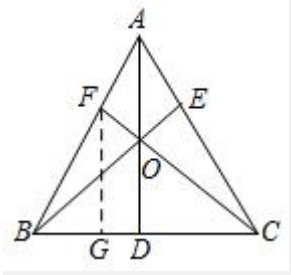
【详解】（1）证明：在 $\triangle ABC$ 中，∵点 D，E 分别为边 BC，AC 的中点，∴ $BD=CD$，$CE=AE$.

由赛瓦定理可得：$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$. ∴ $\frac{AF}{BF}=1$，∴ $AF=BF$. 即点 F 为 AB 的中点；

（2）解：∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，$AB=12$，∴ $BC=AC=12$

∵点 D 是 BC 边的中点，∴ $BD=DC=6$，

∵ $AE=4$，∴ $CE=8$. 由赛瓦定理可得：$BF=8$；过点 F 作 $FG\perp BC$ 于 G，



∴ $BG=BF\cdot\cos 60°=4$，$FG=BF\cdot\sin 60°=4\sqrt{3}$，∴$CG=BC-BG=8$，

∵$AB=AC$，$BD=CD$，∴$AD\perp BC$，∴ $AD\parallel FG$，∴ $\triangle COD\sim\triangle CFG$，

∴ $\frac{OD}{FG}=\frac{CD}{CG}$，即 $\frac{OD}{4\sqrt{3}}=\frac{6}{8}$，∴ $OD=3\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}BC\cdot OD=18\sqrt{3}$，

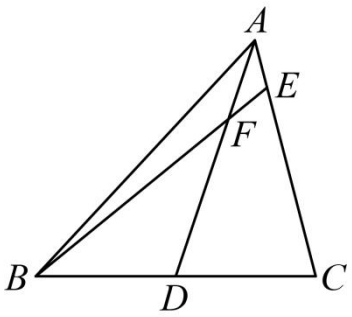
∵AB=12，BF=8，∴AF=AB-BF=4，∴$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$，∴$\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\frac{1}{2}$

又$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2=36\sqrt{3}$，∴$S_{\triangle BCF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=24\sqrt{3}$，∴$S_{\triangle BOF}=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle BOC}=6\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质、中点的性质、等边三角形的性质，读懂题意，学会运用塞瓦定理是解题的关键.

习题练模型

1.（2024·内蒙古赤峰·二模）如图，AD是∨ABC的中线，点E在AC上，BE交AD于点F，若$\frac{AF}{FD}=\frac{1}{4}$，则$\frac{AE}{AC}$为（　）



A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．$\frac{1}{10}$　　D．$\frac{1}{11}$

【答案】B

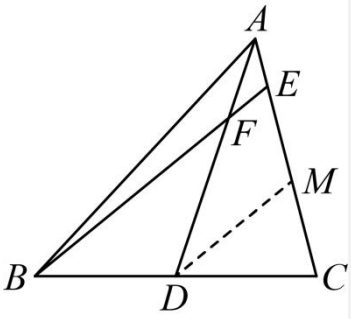
【分析】法 1：这道题是梅氏定理的直接应用，难点在于找梅氏线：直线 EFB。

法 2：本题考查了构造平行线并利用平行线分线段成比例进行解决问题，正确构造平行线是解题的关键．过点 D 作 $DM \parallel BE$ 交 AC 于点 M，利用 $BD=CD$，得 $EM=CM$，再利用平行线分线段成比例可得 $\frac{AE}{EM}=\frac{1}{4}$，再利用比例的性质即可求解．

【详解】法 1：∵直线 EFB 是$\triangle ADC$ 的梅氏线，∴ $\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。

∵ AD 是$\triangle ABC$ 的中线，∴ $\frac{DB}{BC}=\frac{1}{2}$，∵ $\frac{AF}{FD}=\frac{1}{4}$，∴ $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，$\frac{AE}{EC}=\frac{1}{8}$，∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{9}$，故选：B．

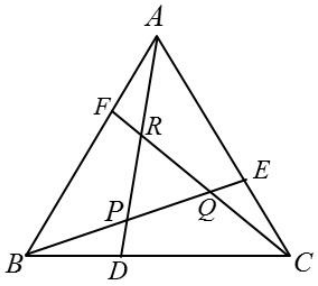
法 2：过点 D 作 $DM \parallel BE$ 交 AC 于点 M，如图，



∵ AD 是$\triangle ABC$ 的中线，∴ $BD=CD$，∵ $DM \parallel BE$，∴ $EM=CM$，

∵ $DM \parallel BE$，∴ $\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EM}=\frac{1}{4}$，∴ $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{8}$，∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{9}$，故选：B．

2．（23-24 上·上海闵行·九年级校考期中）如图，D、E、F 内分正 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、AC 均为1:2两部分，AD、BE、CF 相交成的 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的（　）



A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．$\frac{1}{8}$　　D．$\frac{1}{7}$

【答案】D

【分析】法 1：利用梅氏定理和等积模型求解即可。

法 2：如图，过 D 作 $DH//AC$，交 BE 于 H，设等边三角形 ABC 的边长为：$3a$，结合题意可得：

$BD=AF=CE=a, CD=BF=AE=2a$　证明 $\triangle BDH\backsim\triangle BCE$，$\triangle PDH\backsim\triangle PAE$，证明 $\frac{PD}{AP}=\frac{1}{6}$，$\frac{EQ}{BQ}=\frac{FR}{RC}=\frac{1}{6}$，

设等边三角形 ABC 的面积为：$3m$，可得 $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle CBF}-S_{\triangle BPD}-S_{四边形BPRF}-S_{四边形PDCQ}=\frac{3m}{7}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$，从而可得答案.

【解析】法 1：$\because \frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{BC}{CD}=\frac{3}{2}$，对 $\triangle ABD$ 和截线 CRF，由梅氏定理得：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DR}{RA}=1$，

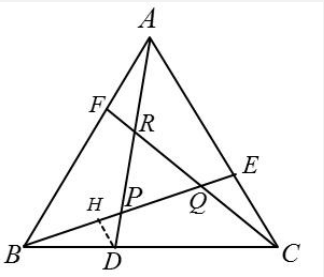
即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{DR}{RA}=1$，$\therefore \frac{DR}{RA}=\frac{4}{3}$，$\therefore \frac{AR}{AD}=\frac{3}{7}$，$\therefore \frac{S_{\triangle ARC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{3}{7}$.

$\because \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DC}{BC}=\frac{2}{3}$，$\therefore \frac{S_{\triangle ARC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{S_{\triangle ARC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$,同理：$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{7}$，$\frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{7}$，

故 $\frac{S_{\Delta QRP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta ABC}-S_{\Delta QBC}-S_{\Delta ARC}-S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}=1-\frac{S_{\Delta QBC}}{S_{\Delta ABC}}-\frac{S_{\Delta ARC}}{S_{\Delta ABC}}-\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{7}$.

法 2：如图，过 D 作 $DH//AC$，交 BE 于 H，设等边三角形 ABC 的边长为：$3a$，

结合题意可得：$BD=AF=CE=a, CD=BF=AE=2a$



$\because DH//AC$，$\therefore \triangle BDH\backsim\triangle BCE$，$\triangle PDH\backsim\triangle PAE$，

$\therefore \frac{BD}{BC}=\frac{DH}{CE}, \frac{DH}{AE}=\frac{PD}{AP}$，$\therefore DH=\frac{a}{3}, \frac{PD}{AP}=\frac{\frac{a}{3}}{2a}=\frac{1}{6}$，同理：$\frac{EQ}{BQ}=\frac{FR}{RC}=\frac{1}{6}$，

设等边三角形 ABC 的面积为：$3m$，$\therefore S_{\triangle BCF}=2m, S_{\triangle BCE}=m$，

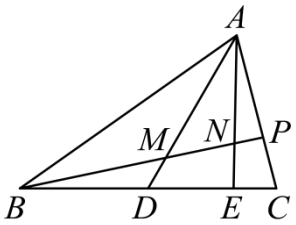
$S_{\triangle AFR}=\frac{1}{7}S_{\triangle ACF}=\frac{1}{7}m, S_{\triangle ABP}=\frac{6}{7}m$，$S_{四边形BPRF}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle AFR}=\frac{5}{7}m=S_{四边形DPQ}$，

$\therefore S_{\triangle PQR}=S_{\triangle CBF}-S_{\triangle BPD}-S_{四边形BPRF}-S_{四边形PDCQ}=\frac{3m}{7}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore$ $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{7}$. 故选 D

【点睛】本题考查的是等边三角形的性质，相似三角形的判定与性质，三角形的面积问题，掌握“作出适当的辅助线构建相似三角形”是解题的关键.

3.（24-25 九年级上·上海·假期作业）如图，$\triangle ABC$ 中，D,E 是 BC 边上的点，且 $BD:DE:EC=3:2:1$，P 是 AC 边上的点，且 $AP:PC=2:1$，BP 分别交 AD,AE 于 M,N，则 $BM:MN:NP$ 等于（　　）

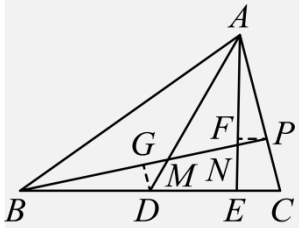


A．3:2:1　　B．5:3:1　　C．25:12:5　　D．51:24:10

【答案】D

【分析】本题考查的是平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定及性质，作 $PF\parallel BC$ 交 AE 于点 F，作 $DG\parallel AC$ 交 BP 于点 G，设 $EC=a$，则 $BD=3a$，$DE=2a$，设 $PC=b$，则 $AP=2b$，根据平行线分线段成比例定理，推导出 BM,MN,NP 与 BP 之间的数量关系，即可求解．

【详解】解：作 $PF\parallel BC$ 交 AE 于点 F，作 $DG\parallel AC$ 交 BP 于点 G，



$\because BD:DE:EC=3:2:1$，$\therefore$ 设 $EC=a$，则 $BD=3a$，$DE=2a$，同理，设 $PC=b$，则 $AP=2b$，

$\because PF\parallel BC$，$\therefore \triangle APF\backsim\triangle ACE$，$\triangle PFN\backsim\triangle BEN$，$\therefore \dfrac{PF}{EC}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{2b}{3b}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{NP}{NB}=\dfrac{PF}{BE}$，

$\therefore PF=\dfrac{2}{3}EC=\dfrac{2}{3}a$，则 $\dfrac{NP}{NB}=\dfrac{\frac{2}{3}a}{3a+2a}=\dfrac{2}{15}$，$\therefore \dfrac{NP}{BP}=\dfrac{NP}{NP+NB}=\dfrac{2}{17}$，则 $NP=\dfrac{2}{17}BP$，

$\because DG\parallel AC$，$BD=DC=3a$，$\therefore BG=\dfrac{1}{2}BP$，$DG=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{1}{2}b$，

$\because DG\parallel AC$，$\therefore \dfrac{GM}{MP}=\dfrac{DG}{AP}=\dfrac{\frac{1}{2}b}{2b}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore \dfrac{GM}{GP}=\dfrac{1}{5}$，$\therefore GM=\dfrac{1}{5}GP=\dfrac{1}{10}BP$，

$\therefore MN=BP-BG-GM-NP=BP-\dfrac{1}{2}BP-\dfrac{1}{10}BP-\dfrac{2}{17}BP=\dfrac{24}{85}BP$，

$BM=BG+DM=\dfrac{1}{2}BP+\dfrac{1}{10}BP=\dfrac{3}{5}BF$，$\therefore BM:MN:NP=\dfrac{3}{5}:\dfrac{24}{85}:\dfrac{2}{17}=51:24:10$，故选 D．

4．（2024 广东校考一模）如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，⊙O 的切线 BD 交 AC 的延长线于点 D，E 为 BD 的中点，CE 交 AB 的延长线于点 F．若 $AC=4$，$OB=BF$，则 BD 的长为_____．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/185122040243012114