

专题 02 数列大题综合（新高考广东专用）

一、解答题

1. (2023·广东韶关·统考模拟预测) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_{n+1} = S_n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^n(a_n + n)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $T_{2n} = \frac{4^n - 1}{3} + n$

【分析】 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$, 作差求出公比 q ,

即可得出答案;

(2) 由(1)得 $b_n = (-1)^n(2^{n-1} + n)$, 可得 $b_{2n} + b_{2n-1} = 4^{n-1} + 1$, 利用分组求和法计算可得.

【详解】 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{Q } a_{n+1} = S_n + 1 \quad \textcircled{1}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$\therefore$ 当 $n=1$ 时, 有 $a_2 = S_1 + 1 = a_1 q$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_{n-1} + 1 \quad \textcircled{2}$,

由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得 $a_{n+1} - a_n = S_n + 1 - (S_{n-1} + 1)$, 即 $a_{n+1} - a_n = a_n$,

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \quad \therefore q = 2,$$

$$\therefore a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1};$$

(2) 由(1)得 $a_n = 2^{n-1}$, 则 $b_n = (-1)^n(a_n + n) = (-1)^n(2^{n-1} + n)$,

$$\therefore b_{2n} = 2^{2n-1} + 2n, \quad b_{2n-1} = -(2^{2n-2} + 2n - 1),$$

$$\therefore b_{2n} + b_{2n-1} = 4^{n-1} + 1,$$

$$\therefore T_{2n} = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{2n-1} + b_{2n}) = (1 + 4 + \dots + 4^{n-1}) + n = \frac{4^n - 1}{3} + n.$$

2. (2023·广东广州·统考一模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且

$$S_6 = 4S_3, a_{2n} = 2a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^{n-1}a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$

(2) $T_n = (2n - 3) \cdot 2^n + 3$

【分析】 (1) 根据已知条件求得数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差, 从而求得 a_n .

(2) 利用错位相减求和法求得 T_n .

【详解】 (1) 设等差数列的公差为 d ,

依题意, $S_6 = 4S_3, a_{2n} = 2a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_2 = 2a_1 + 1$

所以 $\begin{cases} 6a_1 + 15d = 4(3a_1 + 3d) \\ a_1 + d = 2a_1 + 1 \end{cases}$, 解得 $a_1 = 1, d = 2$, 所以 $a_n = 2n - 1$.

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n - 1) \cdot 2^{n-1}$,

所以 $T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + \dots + (2n - 1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + (2n - 1) \times 2^n$,

两式相减得 $-T_n = 1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - (2n - 1) \times 2^n$

$= 1 + \frac{4 \times (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (2n - 1) \times 2^n = (3 - 2n) \cdot 2^n - 3$,

所以 $T_n = (2n - 3) \cdot 2^n + 3$.

3. (2023·广东深圳·红岭中学校考模拟预测) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $3a_1, a_3, 5a_2$ 成等差数列, $S_4 + 5 = 5a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n \cdot \log_3 a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$

(2) $T_n = \frac{2n-1}{4} \times 3^n + \frac{1}{4}$

【分析】(1) 利用 $3a_1, a_3, 5a_2$ 成等差数列以及 $S_4 + 5 = 5a_3$ 求出首项和公比，再利用等比数列的通项公式写出即可；

(2) 由 (1) 将数列 $\{a_n\}$ 的通项公式代入 $b_n = a_n \cdot \log_3 a_{n+1}$ 中化简，再利用错位相减法求和即可。

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

因为 $3a_1, a_3, 5a_2$ 成等差数列，

$$\text{所以 } 3a_1 + 5a_1q = 2a_1q^2,$$

$$\text{即 } 3 + 5q = 2q^2,$$

$$\text{解得 } q = 3 \text{ 或 } q = -\frac{1}{2},$$

因为 $\{a_n\}$ 各项均为正数，

$$\text{所以 } q > 0,$$

$$\text{所以 } q = 3,$$

$$\text{由 } S_4 + 5 = 5a_3,$$

$$\text{得 } \frac{a_1(3^4 - 1)}{3 - 1} + 5 = 5 \times 3^2 a_1,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1,$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 3^{n-1} = 3^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } b_n = n \times 3^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + n \times 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } 3T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + n \times 3^n,$$

$$\text{两式相减可得 } -2T_n = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-1} - n \times 3^n = \frac{1-3^n}{1-3} - n \times 3^n,$$

$$\text{整理可得 } T_n = \frac{2n-1}{4} \times 3^n + \frac{1}{4}.$$

4. (2023·广东佛山·统考二模) 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ，

$$\text{满足 } 2S_n = a_{n+2} - 6,$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记 b_m 为数列 $\{S_n\}$ 在区间 (a_m, a_{m+2}) 中最大的项, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 3 \times 2^{n-1}$;

(2) $T_n = 3 \times 2^{n+2} - 12 - 3n$.

【分析】(1) 由题可得 $2a_2 = a_4 - a_3$, 然后利用等比数列的基本量运算即得;

(2) 根据条件可得 $S_n = 3 \times 2^n - 3 = a_{n+1} - 3 < a_{n+1}$, 进而可得 $b_m = S_{m+1} = 3 \times 2^{m+1} - 3$, 然后利用分组求和法即得.

【详解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 又 $2S_n = a_{n+2} - 6$,

当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_3 - 6$, 当 $n=2$ 时, $2S_2 = a_4 - 6$,

两式相减可得, $2a_2 = a_4 - a_3$, 所以 $2 = q^2 - q$,

所以 $q = 2$ 或 $q = -1$ (舍去),

所以 $2S_1 = a_3 - 6 = 4a_1 - 6$, 即 $a_1 = 3$,

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$;

(2) 由 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$, $2S_n = a_{n+2} - 6$, 可得 $S_n = \frac{1}{2}(a_{n+2} - 6) = \frac{1}{2}(3 \times 2^{n+1} - 6) = 3 \times 2^n - 3$,

所以 $S_n = a_{n+1} - 3 < a_{n+1}$, 又 $a_n > 0$,

所以 $S_n \geq a_n$, 当且仅当 $n=1$ 时等号成立,

所以 $a_m \leq S_m < S_{m+1} < a_{m+2} < S_{m+2}$,

所以 $b_m = S_{m+1} = 3 \times 2^{m+1} - 3$,

所以 $T_n = 3(2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1}) - 3n = 3 \times \frac{2^2 - 2^{n+2}}{1-2} - 3n = 3 \times 2^{n+2} - 12 - 3n$.

即 $T_n = 3 \times 2^{n+2} - 12 - 3n$.

5. (2023·广东广州·统考模拟预测) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知

$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n > 0, a_n^2 + 1 = 2a_n S_n$.

(1) 求 a_n ;

(2) 求证: $a_{n+1} < a_n$.

【答案】(1) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

(2)证明见解析

【分析】(1) 当 $n \geq 2$ ，将 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入已知式化简可证得数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为

$S_1^2 = 1$ ，公差为 1 的等差数列，即可求出 S_n ，再根据 a_n, S_n 的关系式求出 a_n ；

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$ ，对其分母有理化可证得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ，即可得出答案.

【详解】(1) 由题意知， $a_1^2 + 1 = 2a_1S_1 = 2a_1^2$ ，

又 $a_1 > 0$ ，得 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时，由 $a_n^2 + 1 = 2a_nS_n$ ，得 $(S_n - S_{n-1})^2 + 1 = 2(S_n - S_{n-1})S_n$ ，得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$.

则数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 $S_1^2 = 1$ ，公差为 1 的等差数列.

所以 $S_n^2 = 1 + (n-1) = n$.

又 $S_n > 0$ ，则 $S_n = \sqrt{n}$.

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ，

又 $a_1 = 1$ 满足上式，

所以 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

(2) 证明：由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}$
 $= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1$

又 $a_n > 0$ ，所以 $a_{n+1} < a_n$.

6. (2023·广东广州·统考三模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$ ，其前 n 项和为 S_n ，且满足

$$S_n + S_{n-1} = (n+1)(n+2) (n \geq 2).$$

(1) 求 S_{21} ；

(2) 设 $c_n = \frac{(-1)^n n}{S_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的最大项.

【答案】(1) $S_{21} = 262$

(2) 数列 $\{c_n\}$ 的第二项和第四项都为其最大项, 且 $c_2 = c_4 = \frac{1}{5}$.

【分析】(1) 结合 S_n 与 a_n 的关系, 由条件可得 $a_{n+1} + a_n = 2n + 4 (n \geq 2)$, 利用分组求和法结合等差数列求和公式可求 S_{21} .

(2) 由条件求 a_2 , 结合 $a_{n+1} + a_n = 2n + 4 (n \geq 2)$, 证明 $a_{n+2} - a_n = 2 (n \geq 2)$, 再求出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 由此确定 c_n , 讨论 n 知最大项为偶数项, 利用导数分析数列的单调性, 由此确定其最大项.

【详解】(1) 因为 $S_n + S_{n-1} = (n+1)(n+2) (n \geq 2)$,

所以 $S_{n+1} + S_n = (n+2)(n+3) (n \geq 1)$,

所以 $S_{n+1} - S_{n-1} = 2n + 4 (n \geq 2)$, 故 $a_{n+1} + a_n = 2n + 4 (n \geq 2)$,

所以 $a_2 + a_3 = 8$, $a_4 + a_5 = 12$, $a_6 + a_7 = 16$, $\cdots$, $a_{20} + a_{21} = 44$,

所以 $S_{21} = 2 + 8 + 12 + 16 + \cdots + 44 = 2 + \frac{(8+44) \times 10}{2} = 262$;

(2) 因为 $S_n + S_{n-1} = (n+1)(n+2) (n \geq 2)$,

所以 $S_2 + S_1 = 12$, 又 $a_1 = 2$, 所以 $a_2 = 8$,

由 (1) $a_{n+1} + a_n = 2n + 4 (n \geq 2)$,

所以 $a_{n+2} + a_{n+1} = 2n + 6 (n \geq 1)$, $a_3 + a_2 = 8$,

所以 $a_{n+2} - a_n = 2 (n \geq 2)$, $a_3 = 0$

所以 $a_{2n} = 8 + (n-1)2 = 2n + 6$, $a_{2n-1} = 0 + (n-2) \times 2 = 2n - 4 (n \geq 2)$,

所以 $S_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{2n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2n-2} + a_{2n-1})$,

所以 $S_{2n-1} = 2 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n^2 + 2n - 2$, 又 $S_1 = 2$,

所以 $S_{2n-1} = 2n^2 + 2n - 2$,

又 $S_{2n} + S_{2n-1} = (2n+1)(2n+2)$, 所以 $S_{2n} = 2n^2 + 4n + 4$,

所以当 n 为奇数时, $S_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n - \frac{1}{2}$,

当 n 为偶数时, $S_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n + 4$,

所以当 n 为奇数时, $c_n = \frac{-n}{\frac{1}{2}n^2 + 2n - \frac{1}{2}} < 0$,

当 n 为偶数时, $c_n = \frac{n}{\frac{1}{2}n^2 + 2n + 4} > 0$,

所以数列 $\{c_n\}$ 的最大项一定为偶数项,

当 n 为偶数时, $c_n = \frac{n}{\frac{1}{2}n^2 + 2n + 4} = \frac{2}{n + 4 + \frac{8}{n}}$,

设 $y = x + \frac{8}{x} + 4 (x > 0)$, 则 $y' = \frac{x^2 - 8}{x^2}$,

当 $x > 2\sqrt{2}$ 时, $y' > 0$, 函数 $y = x + \frac{8}{x} + 4$ 在 $(2\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增,

当 $0 < x < 2\sqrt{2}$ 时, $y' < 0$, 函数 $y = x + \frac{8}{x} + 4$ 在 $(0, 2\sqrt{2})$ 上单调递减,

所以 $n \geq 4$, 且 n 为偶数时, 数列 $\left\{n + 4 + \frac{8}{n}\right\}$ 单调递增, $n + 4 + \frac{8}{n} > 0$

所以 $n \geq 4$, 且 n 为偶数时, c_n 单调递减,

又 $c_2 = \frac{1}{5}$, $c_4 = \frac{1}{5}$,

所以数列 $\{c_n\}$ 的第二项和第四项都为最大项, 且 $c_2 = c_4 = \frac{1}{5}$.

7. (2023·广东深圳·校考一模) 已知函数 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{5}$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$.

(1) 求证 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列, 并求 a_n .

(2) 对于实数 x , $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $\left[\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{100}{a_{100}}\right]$ 的值.

【答案】(1) 证明见解析, $a_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$

(2) 5051

【分析】(1) 由已知可推得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3a_n}$, 变形可得 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$, 即可得出证明.

由已知 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}$, 进而得出 $\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3^n}$, 整理即可得出答案;

(2) 分组求和得出 $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{100}{a_{100}} = 2 \times \left(\frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{100}{3^{100}} \right) + \frac{100 \times (100 + 1)}{2}$. 根据错

位相减法求 $T = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}}$ ，得出 $T = \frac{3}{4} - \frac{203}{4 \times 3^{100}}$ ，即可得出

$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{100}{a^{100}} = 5051.5 - \frac{203}{2 \times 3^{100}}$ ，然后根据 $0 < \frac{203}{3^{100}} < 1$ ，即可得出答案.

【详解】(1) 因为 $a_1 = \frac{3}{5}$ ， $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$ ，

所以 $a_n \neq 0$ ，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{3a_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3a_n}$ ，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$.

又因为 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}$ ，

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$ ，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{2}{3^n}$ ，

所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^n} + 1$ ，所以 $a_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$ 。

(2) 因为 $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^n} + 1$ ，

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{100}{a_{100}} = \frac{2}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{200}{3^{100}} + 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$

$= 2 \times \left(\frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} \right) + \frac{100 \times (100 + 1)}{2}$ 。

设 $T = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}}$ ，

所以 $\frac{1}{3}T = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{100}{3^{101}}$ ，

所以 $\frac{2}{3}T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$

$= \frac{\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{100}{3^{101}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) - \frac{100}{3^{101}}$ ，

所以 $T = \frac{3}{4} - \frac{203}{4 \times 3^{100}}$ ，

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{100}{a^{100}} = 5050 + \frac{3}{2} - \frac{203}{2 \times 3^{100}} = 5051.5 - \frac{203}{2 \times 3^{100}}$ 。

因为 $0 < \frac{203}{3^{100}} < 1$ ，

所以 $0 < \frac{203}{2 \times 3^{100}} < \frac{1}{2}$ ，

所以 $5051 < 5051.5 - \frac{203}{2 \times 3^{100}} < 5051.5$,

所以 $\left[\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{100}{a_{100}} \right] = 5051$.

8. (2023·广东佛山·校考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,

数列 $\{b_n\}$ 为单调递增的等比数列, 且有 $b_1 + b_4 = 9$, $b_2 \cdot b_3 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_{2n-1}$, 设 $\{c_n b_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n , 求 T_n 的值.

【答案】(1) $a_n = n$; $b_n = 2^{n-1}$

(2) $T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$

【分析】(1) 根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 作差求出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 根据下标和性质得到

$b_1 \cdot b_4 = 8$, 即可求出 b_1, b_4 , 从而求出公比 q , 即可求出 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 由 (1) 可得 $c_n = 2n-1$, 则 $c_n b_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 利用错位相减法求和即可.

【详解】(1) 因为 $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)$, 所以

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \left[\frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) \right] = n,$$

经检验 $n=1$ 时 $a_n = n$ 也成立, 所以 $a_n = n$;

因为 $\{b_n\}$ 为等比数列, 所以 $b_2 \cdot b_3 = b_1 \cdot b_4 = 8$, 结合 $b_1 + b_4 = 9$, 可得 $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_4 = 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b_1 = 8 \\ b_4 = 1 \end{cases}$,

因为数列 $\{b_n\}$ 单调递增, 所以 $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_4 = 8 \end{cases}$, 所以 $q^3 = \frac{b_4}{b_1} = 8$, 则 $q = 2$;

即数列 $\{b_n\}$ 为首项 $b_1 = 1, q = 2$ 的等比数列, 即可得 $b_n = 2^{n-1}$.

(2) 因为数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_{2n-1}$, 可得 $c_n = 2n-1$,

所以 $c_n b_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$,

数列 $\{c_n b_n\}$ 的前 n 项的和为 $T_n = 1 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$,

$$2T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \cdot 2^n,$$

将上面两式相减可得 $-T_n = 1 + 2 \times (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n$

$$= 1 + 2 \times \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^n,$$

化简可得 $-T_n = (3-2n) \cdot 2^n - 3$,

所以 $T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$.

9. (2023·广东深圳·深圳中学校考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 3$,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(1) 求 S_2 , S_3 及 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n \leq \lambda(a_n-1)$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

【答案】(1) $S_2 = 12$, $S_3 = 39$, $a_n = 3^n (n \in \mathbb{N}^*)$

(2) $\frac{9}{32}$

【分析】(1) 根据递推公式和 a_1 的值, 即可求出 S_2 , S_3 及 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 得出数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 由不等式的恒成立, 还可求出 λ 的最小值.

【详解】(1) 由题意, $n \in \mathbb{N}^*$

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \dots \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot S_1 = \frac{3(3^n-1)}{2},$$

当 $n=1$ 时上式也符合,

$$\therefore S_n = \frac{3(3^n-1)}{2} (n \in \mathbb{N}^*), \quad S_2 = \frac{3 \times (3^2-1)}{2} = 12, \quad S_3 = \frac{3 \times (3^3-1)}{2} = 39.$$

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n$; 当 $n=1$ 时, 上式也符合.

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 由题意及 (1) 得, $n \in \mathbf{N}^*$,

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 3^n$,

数列 $\{b_n\}$ 中, $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} = \frac{3^{n+1}}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right)$,

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right) = \frac{9(3^n - 1)}{4(3^{n+1} - 1)}$.

$\therefore T_n \leq \lambda(a_n - 1)$,

$\therefore \lambda \geq \frac{9}{4(3^{n+1} - 1)}$.

$\therefore \frac{9}{4(3^{n+1} - 1)} \leq \frac{9}{4(3^{1+1} - 1)} = \frac{9}{32}$.

$\therefore \frac{9}{4(3^{n+1} - 1)}$ 的最大值为 $\frac{9}{32}$, $\lambda \geq \frac{9}{32}$.

$\therefore \lambda$ 的最小值为 $\frac{9}{32}$.

10. (2023·广东深圳·统考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项成等差数列, 偶数项成等

比数列, 且公差和公比都是 2, 若对满足 $m+n \leq 5$ 的任意正整数 m, n , 均有

$a_m + a_n = a_{m+n}$ 成立.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} n, & n = 2k-1 \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$

(2) $T_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

【分析】(1) 由题意分别令 $m=n=1$, 或 $m=1, n=2$, 根据数列 $\{a_n\}$ 的奇数项成等差数列, 偶数项成等比数列, 且公差和公比都是 2 即可求出首项, 写出通项公式即可;

(2) 利用错位相减法即可求出数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【详解】(1) 对满足 $m+n \leq 5$ 的任意正整数 m, n ,

均有 $a_m + a_n = a_{m+n}$ 成立,

令 $m = n = 1$, 则 $a_1 + a_1 = a_2$ 即 $a_2 = 2a_1$,

令 $m = 1$, $n = 2$, 得 $a_1 + a_2 = a_3$,

$$\text{Q } a_3 = a_1 + 2,$$

$$\therefore 3a_1 = a_1 + 2,$$

解得 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

由题意数列 $\{a_n\}$ 的奇数项成等差数列, 偶数项成等比数列, 且公差和公比都是 2,

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 + 2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right), & n = 2k - 1 \\ 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}, & n = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^*), \text{ 即 } a_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1 \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^*),$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2 \times \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - (2n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\therefore T_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

11. (2023·广东深圳·统考模拟预测) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 10$, $a_5 - 2a_2 = 6$.

(1) 求 a_n ;

$$(2) \text{ 数列 } \{b_n\} \text{ 满足 } b_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2} a_{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, T_n \text{ 为数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, 求 } T_{2n}.$$

【答案】(1) $a_n = 4n - 2$

$$(2) T_{2n} = 2n^2 - 2n + \frac{4^n - 1}{3}$$

【分析】(1) 根据条件建立方程组, 即可求出等差数列的首项和公差, 即可求 a_n ;

(2) 利用分组求和及等差数列、等比数列的求和公式即可求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $a_3=10$, $a_5-2a_2=6$. 则 $\begin{cases} a_1+2d=10 \\ (a_1+4d)-2(a_1+d)=6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1=2 \\ d=4 \end{cases}$,

所以 $a_n=2+4(n-1)=4n-2$.

(2) 由(1)可得 $b_n=\begin{cases} 2^{n-1}, n \text{ 为奇数} \\ 2n-3, n \text{ 为偶数} \end{cases}$,

则 $T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$= (1+2^2+\cdots+2^{2n-2})+[1+5+\cdots+(4n-3)]$

$= \frac{1-4^n}{1-4} + \frac{n(4n-2)}{2} = 2n^2-n+\frac{4^n-1}{3},$

所以 $T_{2n}=2n^2-2n+\frac{4^n-1}{3}$.

12. (2023·广东肇庆·统考二模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数.若分别从下表的第

一、二、三列中各取一个数,依次作为 a_1, a_2, a_3 ,且 a_1, a_2, a_3 中任何两个数都不在同一行.

	第一列	第二列	第三列
第一行	4	5	11
第二行	3	10	9
第三行	8	7	6

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=\frac{16}{(a_n+1)(a_{n+1}+5)}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .求证: $T_n < \frac{3}{4}$.

【答案】(1) $a_n=4n-1(n \in \mathbb{N}^*)$

(2)证明见解析

【分析】(1) 由等差数列的性质和定义即可求出;

(2) 求出 b_n , 利用裂项相消法求出 T_n , 即可证明.

【详解】(1) 由题可得 $a_1=3, a_2=7, a_3=11$,

故 $a_n=3+4(n-1)=4n-1(n \in \mathbb{N}^*)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/185142130004012020>