第 4 章　数列（压轴题专练）

目录：

题型 1：数列的递推公式

1．已知$\{a_n\}$是各项均为正整数的数列，且$a_1=3$，$a_7=8$，对任意$k\in\mathbf{N}^*$，$a_{k+1}=a_k+1$与$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k+2}$有且仅有一个成立，则$a_1+a_2+\cdots+a_7$的最小值为_____.

【答案】20

【分析】由递推关系分析$a_i(i=2,3,4,5,6)$的取值，求$a_1+a_2+\cdots+a_7$的最小值.

【解析】由已知$a_i\in N^*(i=2,3,4,5,6)$，所以$a_i\geq 1(i=2,3,4,5,6)$，

若a_i=$1(i=2,3,4,5,6)$,，因为$a_{i-1}\neq 0$，所以$a_i-a_{i-1}\neq 1$，故$a_{i+1}=2a_i=2$，

所以$a_i+a_{i+1}\geq 3$，

(1)若$a_2=1$，则$a_3=2$，

当$a_4=1$时，$a_5=2$，若$a_6=1$，则$a_7=2$，与条件相矛盾，

当$a_4=1$时，$a_5=2$，若$a_6=2$，则$a_7=4$，与条件相矛盾，

当$a_4=1$时，$a_5=2$，若$a_6=3$，则a_7可以取 8，此时$a_1+a_2+\cdots+a_7$=20，

当$a_4=2$时，$a_5=4$，又$a_6\geq 1$，则$a_1+a_2+\cdots+a_7\geq 21$，

当 $a_4 \geq 3$ 时，$a_5+a_6 \geq 3$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7 \geq 20$，

(2)若 $a_2=2$，则 $a_3=4$，则 $a_4+a_5+a_6 \geq 4$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7 \geq 21$，

(3) 若 $a_2=3$，则 $a_3=6$，则 $a_4+a_5+a_6 \geq 4$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7 \geq 24$，

(4) 若 $a_2 \geq 4$，则 $a_3+a_4+a_5+a_6 \geq 6$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7 \geq 21$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7$ 的最小值为 20.

故答案为：20

2．已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3；　②$\{a_n\}$ 为等比数列；

③$\{a_n\}$ 为递减数列；　　④$\{a_n\}$ 中存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是________.

【答案】①③④

【分析】推导出 $a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}$，求出 a_1、a_2 的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③.

【解析】由题意可知，$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$a_n>0$，

当 $n=1$ 时，$a_1^2=9$，可得 $a_1=3$；

当 $n \geq 2$ 时，由 $S_n=\dfrac{9}{a_n}$ 可得 $S_{n-1}=\dfrac{9}{a_{n-1}}$，两式作差可得 $a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}$，

所以，$\dfrac{9}{a_{n-1}}=\dfrac{9}{a_n}-a_n$，则 $\dfrac{9}{a_2}-a_2=3$，整理可得 $a_2^2+3a_2-9=0$，

因为 $a_2>0$，解得 $a_2=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{2}<3$，①对；

假设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，则 $a_2^2=a_1a_3$，即 $\left(\dfrac{9}{S_2}\right)^2=\dfrac{81}{S_1S_3}$，

所以，$S_2^2=S_1S_3$，可得 $a_1^2(1+q)^2=a_1^2(1+q+q^2)$，解得 $q=0$，不合乎题意，

故数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，②错；

当 $n \geq 2$ 时，$a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}=\dfrac{9(a_{n-1}-a_n)}{a_na_{n-1}}>0$，可得 $a_n<a_{n-1}$，所以，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，③对；

假设对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$a_n\geq\dfrac{1}{100}$，则$S_{100000}\geq100000\times\dfrac{1}{100}=1000$，

所以，$a_{100000}=\dfrac{9}{S_{100000}}\leq\dfrac{9}{1000}<\dfrac{1}{100}$，与假设矛盾，假设不成立，④对.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：本题在推断②④的正误时，利用正面推理较为复杂时，可采用反证法来进行推导.

3．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}(n\in N^*)$.

①存在a_1可以生成的数列$\{a_n\}$是常数数列；

②“数列$\{a_n\}$中存在某一项$a_k=\dfrac{49}{65}$”是“数列$\{a_n\}$为有穷数列”的充要条件；

③若$\{a_n\}$为单调递增数列，则a_1的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(1,2)$；

④只要$a_1\neq\dfrac{3^k-2^{k+1}}{3^k-2^k}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$一定存在；

其中正确命题的序号为________.

【答案】①④

【分析】根据已知中数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}(n\in N^*)$．举出正例$a_1=1$或$a_1=2$，可判断①；举出反例$a_1=\dfrac{1}{5}$，可判断②；举出反例$a_1=-2$，可判断③；构造数列$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$，结合已知可证得数列$\{b_n\}$是以$\dfrac{3}{2}$为公比的等比数列，进而可判断④.

【解析】解：当$a_1=1$时，$a_n=1$恒成立，当$a_1=2$时，$a_n=2$恒成立，故①正确；

当$a_1=\dfrac{1}{5}$时，则$a_2=-1$，由递推公式$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}(n\in N^*)$，可知数列$\{a_n\}$只有这两项，数列$\{a_n\}$为有穷数列，但不存在某一项$a_k=\dfrac{49}{65}$，故②错误；

当$a_1=-2$时，$a_1\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$，此时$a_2=10$，$a_3=\dfrac{38}{11}$，数列不存在单调递增性，故③错误；

$\because a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$

$\therefore a_{n+1}-1=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-1=\dfrac{3a_n-3}{a_n+1}\cdots$①

且$a_{n+1}-2=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-2=\dfrac{2a_n-4}{a_n+1}\cdots$②

①÷②得：$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$

令$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$，则数列$\{b_n\}$是以$\dfrac{3}{2}$为公比的等比数列

则 $b_n=(\frac{3}{2})^{n-1}\cdot b_1$

$$\therefore a_n=\frac{2\cdot(\frac{3}{2})^{n-1}\cdot b_1-1}{(\frac{3}{2})^{n-1}\cdot b_1-1}=2+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n-1}\cdot b_1-1}$$

当 $a_1\neq\frac{3^k-2^{k+1}}{3^k-2^k}$ 时，$2+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n-1}\cdot b_1-1}$ 的极限为 2，否则式子无意义，故④正确

故答案为：①④

【点睛】本题以命题的真假判断与应用为载体，考查了数列的定义及性质，运算强度大，变形复杂，属于难题

题型 2：数列与其他模块知识点结合

4．对于 $n\in\mathbf{N}^*$，将 n 表示为 $n=a_0\times2^k+a_1\times2^{k-1}+a_2\times2^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\times2^1+a_k\times2^0$，当 $i=0$ 时，$a_i=1$.当 $1\le i\le k$ 时，a_i 为 0 或 1.记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为 0 的个数，（例如 $1=1\times2^0$，$4=1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$，故 $I(1)=0$，$I(4)=2$）.若 $\sum\limits_{n=1}^{i}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_i$，则 $\sum\limits_{n=1}^{127}2^{I(n)}=$______.

【答案】1093

【分析】将 n 分为 $n=127$，$64\le n\le126$，$32\le n\le63$，…，$n=1$ 等 7 种情况，由组合数的性质，分析其中 $I(n)$ 的取值情况，与二项式定理结合，可转化为等比数列的前 7 项和，计算可得答案.

【解析】$127=1\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$，

设 $64\le n\le126$，且 n 为整数，

则 $n=1\times2^6+a_1\times2^5+a_2\times2^4+a_3\times2^3+a_4\times2^2+a_5\times2^1+a_6\times2^0$，

a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 中 6 个数都为 0 或 1，

其中没有一个为 1 时，有 C_6^0 种情况，即有 C_6^0 个 $I(n)=6$；

其中有一个为 1 时，有 C_6^1 种情况，即有 C_6^1 个 $I(n)=5$；

其中有 2 个为 1 时，有 C_6^2 种情况，即有 C_6^2 个 $I(n)=4$；

…

故 $\sum\limits_{n=64}^{127}2^{I(n)}=C_6^0\times2^6+C_6^1\times2^5+C_6^2\times2^4+C_6^3\times2^3+C_6^4\times2^2+C_6^5\times2^1+1=(2+1)^6=3^6$，同理可得：$\sum\limits_{n=32}^{63}2^{I(n)}=3^5$，

…

$\sum_{n=2}^{3} 2^{I(n)} = 3^1$，

$2^{I(1)} = 1$，

则 $\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} = 1+3+3^2+\cdots+3^6 = \frac{3^7-1}{3-1} = 1093$.

故答案为:1093.

【点睛】关键点睛：本题比较综合，难度大，得到

$\sum_{n=64}^{127} 2^{I(n)} = C_6^0\times 2^6 + C_6^1\times 2^5 + C_6^2\times 2^4 + C_6^3\times 2^3 + C_6^4\times 2^2 + C_6^5\times 2^1 + 1$ 是解题的关键.

5．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $2a_nS_n = 1+a_n^2$， $b_n = \log_2 \frac{S_{n+2}}{S_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则下列结论正确的是_____.

①$a_n < a_{n+1}$；②$\{S_n^2\}$ 是等差数列；③$S_n \le e^{\sqrt{n}-1}$；④满足 $T_n \ge 3$ 的 n 的最小正整数为 10.

【答案】②③④

【分析】对于②，根据 a_n 与 S_n 的关系得出 $\{S_n^2\}$ 是等差数列；对于①，由 S_n 求出 a_n，再比较大小进行判断；对于③，令 $f(x) = e^x - x - 1(x \ge 0)$，通过导数证明 $e^x \ge x+1$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，令 $x=\sqrt{n}-1$（$n\ge 1$，$n\in \mathbf{N}^*$），再证得不等式成立；对于④，利用裂项相消法求出 T_n，再求出 $T_n \ge 3$ 的 n 的最小正整数.

【解析】对于②，因为 $2a_nS_n = 1+a_n^2$，当 $n=1$ 时，$2a_1S_1 = 1+a_1^2$，解得 $S_1 = 1$，

当 $n\ge 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$，所以 $2(S_n - S_{n-1})S_n = 1+(S_n - S_{n-1})^2$，整理得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$，

所以数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 $S_1^2 = 1$，公差为 1 的等差数列，故②正确.

对于①，$S_n^2 = 1+(n-1)\times 1 = n$，又正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，所以 $S_n = \sqrt{n}$，

当 $n=1$ 时，$S_1 = 1$，当 $n\ge 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$，即 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$，

又当 $n=1$ 时，满足 $a_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，所以 $a_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，

又 $a_{n+1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，因为 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n}+\sqrt{n-1}$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，即 $a_{n+1} < a_n$，故①不正确；

对于③，令 $f(x) = e^x - x - 1(x\ge 0)$，$f'(x) = e^x - 1$，当 $x\ge 0$ 时，$e^x - 1 \ge 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\ge f(0)=0$，即 $e^x - x - 1 \ge 0(x\ge 0)$，

所以 $e^x \ge x+1$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $x=\sqrt{n}-1$（$n\geq1$，$n\in\mathbf{N}^*$），所以 $e^{\sqrt{n}-1}\geq\sqrt{n}$，又 $S_n=\sqrt{n}$，故 $S_n\leq e^{\sqrt{n}-1}$，故③正确；

对于④，因为 $S_n=\sqrt{n}$，所以 $S_{n+2}=\sqrt{n+2}$，

所以 $b_n=\log_2\dfrac{S_{n+2}}{S_n}=\log_2\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}=\log_2\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{1}{2}\left[\log_2(n+2)-\log_2 n\right]$，

所以 $T_n=b_1+b_2+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$=\dfrac{1}{2}\left[\log_2 3-\log_2 1+\log_2 4-\log_2 2+\log_2 5-\log_2 3+\cdots+\log_2(n+1)-\log_2(n-1)+\log_2(n+2)-\log_2 n\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[-1+\log_2(n+1)+\log_2(n+2)\right]=\dfrac{1}{2}\left[-1+\log_2(n+1)(n+2)\right]$，

因为 $T_n\geq3$，即 $\dfrac{1}{2}\left[-1+\log_2(n+1)(n+2)\right]\geq3$，化简整理得 $n^2+3n-126\geq0$，

显然数列 $\{n^2+3n-126\}$ 递增，当 $\boldsymbol{n=9}$ 时，$9^2+3\times9-126=-18<0$；

当 $n=10$ 时，$10^2+3\times10-126=4>0$，所以满足 $T_n\geq3$ 的 n 的最小正整数为 10，故④正确.

故答案为：②③④.

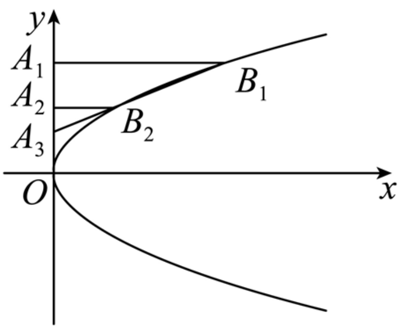
【点睛】给出 S_n 与 a_n 的递推关系，求 a_n，常用思路是：一是利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 转化为 a_n 的递推关系，再求其通项公式；二是转化为 S_n 的递推关系，先求出 S_n 与 n 之间的关系，再求 a_n.

6．如图，已知抛物线 $y^2=x$ 及两点 $A_1(0,y_1)$ 和 $A_2(0,y_2)$，其中 $y_1>y_2>0$.过 A_1、A_2 分别作 y 轴的垂线，交抛物线于 B_1、B_2 两点，直线 B_1B_2 与 y 轴交于点 $A_3(0,y_3)$，此时就称 A_1、A_2 确定了 A_3.依此类推，可由 A_2、A_3 确定 A_4、$\cdots$.记 $A_n(0,y_n)$，$n=1$、2、3、$\cdots$.

给出下列三个结论：

①数列 $\{y_n\}$ 是递减数列；②对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$y_n>0$；③若 $y_1=4$，$y_2=3$，则 $y_5=\dfrac{2}{3}$.

其中，所有正确结论的序号是____.



【答案】①②③.

【分析】根据题意得出数列$\{y_n\}$的递推公式，结合数列$\{y_n\}$的递推公式对题中三个命题进行分析，可得出结论.

【解析】由题意知，$B_{n-1}\left(y_{n-1}^2, y_{n-1}\right)$，$B_{n-2}\left(y_{n-2}^2, y_{n-2}\right)$，

直线$B_{n-1}B_{n-2}$的斜率为$\dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{y_{n-1}^2-y_{n-2}^2}=\dfrac{1}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，

则直线$B_{n-1}B_{n-2}$的方程为$y-y_{n-1}=\dfrac{1}{y_{n-1}+y_{n-2}}\left(x-y_{n-1}^2\right)$，

令$x=0$，则$y-y_{n-1}=\dfrac{-y_{n-1}^2}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，$\therefore y=\dfrac{y_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，即$y_n=\dfrac{y_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}}$，

在等式$y_n=\dfrac{y_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}}$两边取倒数得$\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{y_{n-1}}+\dfrac{1}{y_{n-2}}$.

$\because y_1>0$，$y_2>0$，由此可得出$y_3>0$，$y_4>0$，$\cdots$，命题②正确；

$\because \dfrac{1}{y_n}-\dfrac{1}{y_{n-1}}=\dfrac{1}{y_{n-2}}>0$，则$\dfrac{1}{y_n}>\dfrac{1}{y_{n-1}}$，由②知，对任意的$n\in N^*$，$y_n>0$，

$\therefore y_n<y_{n-1}$，即数列$\{y_n\}$是单调递减数列，命题①正确；

若$y_1=4$，$y_2=3$，则$y_3=\dfrac{12}{7}$，$y_4=\dfrac{12}{11}$，$y_3=\dfrac{2}{3}$，命题③正确.

故答案为：①②③.

【点睛】本题考查数列与解析几何的综合，考查数列基本性质的判断，解题的关键就是求出数列的递推公式，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

7．设$a_1,a_2,\dots,a_{23}$为$1,2,\dots,23$的一个排列，满足$|a_{22}-a_{23}|\ge|a_{21}-a_{23}|\ge|a_{20}-a_{23}|\ge\dots\ge|a_1-a_{23}|$，则这样的排列的个数为______个.

【答案】6142

【分析】根据条件分别对于$k\in\{1,2,\cdots 23\}$与$k\in\{13,14,\cdots 23\}$时得出排列个数.

【解析】对于给定的$k\in\{1,2,\cdots 23\}$，考虑使$a_{23}=k$的满足条件的排列个数N_k，

当$k\in\{1,2,\cdots 12\}$时，对$i=1,2,\cdots k-1$有a_{2i-1},a_{2i}为$k-i,k+i$的排列（若$k=1$，则没有这样的i），且$a_j=j+1(2k-1\le j\le 22)$（若$k=12$，则没有这样的j），因此$N_k=2^{k-1}$，

当$k\in\{13,14,\cdots 23\}$时，类似地有$N_k=2^{23-k}$，

因此，满足条件的排列个数为$\sum\limits_{k=1}^{23}N_k=\sum\limits_{k=1}^{12}2^{k-1}+\sum\limits_{k=13}^{23}2^{23-k}=\left(2^{12}-1\right)+\left(2^{11}-1\right)=6142$

故答案为：6142.

【点睛】本题关键针对$k\in\{1,2,\cdots 23\}$与$k\in\{13,14,\cdots 23\}$分别得出排列个数.

题型 3：数列的极限

8．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+\log_2 n, 1\le n\le 10\\ 2^{a_{10}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-10}, n>10\end{cases}$，且$a_1=0$，$S_n$为$\{a_n\}$的前$n$项和，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$________

【答案】$362918+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7$

【分析】逐项代入可得$a_1,a_2\ldots a_{11}$，再根据等比数列求和与极限求解即可.

【解析】由题，$a_1=0$，$a_2=0+\log_2 1=0$，$a_3=0+\log_2 2=1$，$a_4=1+\log_2 3$，

$a_5=1+\log_2 3+\log_2 4=3+\log_2 3$，$a_6=3+\log_2 3+\log_2 5$，

$a_7=3+\log_2 3+\log_2 5+\log_2 6=4+2\log_2 3+\log_2 5$，

$a_8=4+2\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7$，

$a_9=4+2\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7+\log_2 8=7+2\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7$，

$a_{10}=7+2\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7+\log_2 9=7+4\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7$.

$a_{11}=8+4\log_2 3+2\log_2 5+\log_2 7$.

故$S_{11}=0+0+1+(1+\log_2 3)+(3+\log_2 3)+(3+\log_2 3+\log_2 5)+(4+2\log_2 3+\log_2 5)$

$+(4+2\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7)+(7+2\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7)+(7+4\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7)$

$+(8+4\log_2 3+2\log_2 5+\log_2 7)$

$=38+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7$.

又当$n>10$时，$a_{n+1}=2^{a_{10}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-10}$，故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{S_{11}+2^{a_{10}}\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-11}\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{S_{11}+2^{a_{10}}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-11}\right]\right\}$$

$=S_{11}+2^{a_{10}}$

$=38+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7+2^{7+4\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7}$

$=38+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7+2^7\times 2^{4\log_2 3}\times 2^{\log_2 5}\times 2^{\log_2 7}$

$=38+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7+128\times 81\times 5\times 7$

$=362918+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7$.

故答案为：$362918+17\log_2 3+7\log_2 5+4\log_2 7$

9．已知平面上有$n+2$个点A_1，A_2，$\cdots$，A_n，A_{n+1}，A_{n+2}，$A_1(0,0)$，$A_2(3,0)$，$<\overrightarrow{A_nA_{n+1}},\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}>=\frac{\pi}{3}$且$\left|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}\right|$，记$A_n$的坐标为$(a_n,b_n)$，将$A_n$，$A_{n+1}$，$A_{n+2}$依次顺时针排列，求$\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)=$______

【答案】$\left(\frac{18}{7},\frac{-153\sqrt{3}}{133}\right)$

【分析】利用向量的定义，推导知$\overrightarrow{A_1A_n}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$的向量坐标，然后求出$a_n$，$b_n$的表达式，根据等比数列求和公式以及数列极限的求解方法得到结果..

【解析】因为$\left\langle\overrightarrow{A_nA_{n+1}},\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，且顺时针排列，所以$\angle A_nA_{n+1}A_{n+2}=\frac{2\pi}{3}$，

由题意得A_2，A_8，$a=\sqrt{2}c$，$\cdots$ $A_{6k+2}\cdots$，$(k\geq 0)$都是在上一个点的基础上横坐标增加，纵坐标不变.

A_3，A_9，A_{15}，A_{17}，$\cdots$，$A_{6k+3}\cdots$，$(k\geq 0)$都是在上一个点的基础上横坐标增加，纵坐标减小.

A_4，A_{10}，$a=\sqrt{2}c$，A_{22}，$\cdots$，$A_{6k+4}\cdots$，$(k\geq 0)$都是在上一个点的基础上横坐标减少，纵坐标减小.

A_5，A_{11}，A_{17}，A_{23}，$\cdots$，$A_{6k+5}\cdots$，$(k\geq 0)$都是在上一个点的基础上横坐标减少，纵坐标不变.

A_6，A_{12}，A_{18}，A_{24}，$\cdots$，$A_{6k}\cdots$，$(k\geq 1)$都是在上一个点的基础上横坐标减少，纵坐标增加.

A_1，A_7，A_{13}，A_{19}，$\cdots$，$A_{6k+1}\cdots$，$(k\geq 0)$都是在上一个点的基础上横坐标增加，纵坐标增加.

所以$\overrightarrow{A_1A_n}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$，因为$\left|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}\right|$，$\overrightarrow{A_1A_2}=(3,0)$，

所以$a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=3+2\cos\frac{\pi}{3}-\frac{2^2}{3^1}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{2^3}{3^2}-\frac{2^4}{3^3}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{2^5}{3^4}\cos\frac{\pi}{3}\cdots$

$=3+2\times\frac{1}{2}-\frac{2^2}{3^1}\times\frac{1}{2}-\frac{2^3}{3^2}-\frac{2^4}{3^3}\times\frac{1}{2}+\frac{2^5}{3^4}\times\frac{1}{2}+\frac{2^6}{3^5}+\frac{2^7}{3^6}\times\frac{1}{2}\cdots$

$=\left(2+\frac{28}{81}\right)+\left(2+\frac{28}{81}\right)\times\frac{2^6}{3^6}+\left(2+\frac{28}{81}\right)\times\frac{2^{12}}{3^6}+\cdots+\left(2+\frac{28}{81}\right)\times\frac{2^{6k}}{3^{6k}}+\cdots$，$k\geq 0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{28}{81}\right)\left(1-\dfrac{2^{6k}}{3^{6k}}\right)}{1-\dfrac{2^6}{3^6}} = \dfrac{2+\dfrac{28}{81}}{1-\dfrac{2^6}{3^6}} = \dfrac{18}{7}$.

所以 $b_n = b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n = 0-2\sin\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2^2}{3^1}\sin\dfrac{\pi}{3}-0+\dfrac{2^4}{3^3}\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2^5}{3^4}\sin\dfrac{\pi}{3}\cdots$

$=0-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2^2}{3^1}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0+\dfrac{2^4}{3^3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2^5}{3^4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cdots$

$=-\dfrac{85\sqrt{3}}{81}-\left(\dfrac{85\sqrt{3}}{81}\right)\times\dfrac{2^6}{3^6}-\left(\dfrac{85\sqrt{3}}{81}\right)\times\dfrac{2^{12}}{3^{12}}-\cdots-\left(\dfrac{85\sqrt{3}}{81}\right)\times\dfrac{2^{6k}}{3^{6k}}\cdots$ ，$k\ge 0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{-\dfrac{85\sqrt{3}}{81}\left(1-\dfrac{2^{6k}}{3^{6k}}\right)}{1-\dfrac{2^6}{3^6}} = \dfrac{-\dfrac{85\sqrt{3}}{81}}{1-\dfrac{2^6}{3^6}} = \dfrac{-153\sqrt{3}}{133}$

所以 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = \left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{-153\sqrt{3}}{133}\right)$.

故答案为：$\left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{-153\sqrt{3}}{133}\right)$.

【点睛】关键点睛：需要分别找到 a_n, b_n 横纵坐标的增减规律，然后结合等比数列和数列求极限从而求解.

10．已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，当 $x\in(0,1]$，$f(x)=\ln x$，且 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称．设方程 $f(x)=kx+b$（$k>0$，$b\in R$）的正数解为 x_1，x_2，…，x_n…，且对无穷多个 $n\in N$，总存在实数 M，使得 $|x_{n+1}-x_n|<M$ 成立，则实数 M 的最小值为__________.

【答案】2

【分析】根据函数 $f(x)$ 具有的性质可推出其周期，从而作出其图象，结合方程 $f(x)=kx+b$（$k>0$，$b\in R$）的正数解问题，结合极限的几何意义，数形结合，即可求解答案.

【解析】因为 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，故 $f(0)=0, f(-x)=-f(x)$，

$f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，

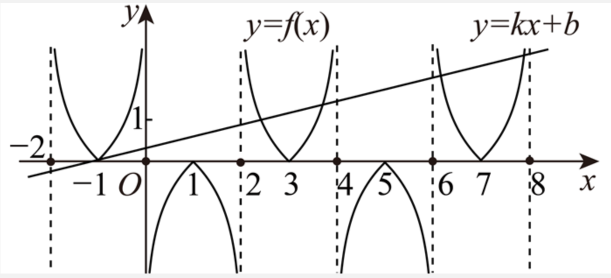
即 $f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，故 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

由此可作出 $f(x)$ 的图象如图，

由于方程 $f(x)=kx+b$（$k>0$，$b\in R$）的正数解为 x_1，x_2，…，x_n…，

且对无穷多个$n\in\mathrm{N}$，总存在实数M，使得$\left|x_{n+1}-x_n\right|<M$成立，

作出$y=kx+b$的大致图象，如图，



由$f\left(x\right)=kx+b$（$k>0$，$b\in\mathrm{R}$）的正数解为x_1，x_2，…，x_n…，

可知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$的几何意义为$f\left(x\right)$的两条渐近线之间的距离，即为2，

即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=2$，

所以对无穷多个$n\in\mathrm{N}$，$\left|x_{n+1}-x_n\right|<2$总成立，

故实数M的最小值为2，

故答案为：2

【点睛】方法点睛：本题涉及到抽象函数的性质问题，因此根据题意推出函数满足的性质，作出其图象，结合方程$f\left(x\right)=kx+b$（$k>0$，$b\in\mathrm{R}$）的正数解的问题，数形结合，结合极限知识，即可求解.

题型4：数列综合

11．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n+1, & n\text{是偶数},\\ a_n-3, & n\text{是奇数},\end{cases}$设$S_n$表示$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和，则使得$S_n+10^6<0$成立的最小的正整数$n$的值为______.

【答案】34

【分析】先通过递推式得当n为偶数时，数列$\left\{a_n-2\right\}$是以-4为首项，以2为公比的等比数列，即可求出数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式，根据通项公式观察到数列$\left\{S_n\right\}$为递减数列，故求出S_n后，以$2^{20}=1048576$为基础，通过一定的估算可得到答案.

【解析】当$n\geq2$，且n为偶数时，$a_n=a_{n-1}-3=2a_{n-2}+1-3=2a_{n-2}-2$，

得$a_n-2=2\left(a_{n-2}-2\right)$，又$a_2=a_1-3=-2$，

所以数列$\left\{a_n-2\right\}$是以-4为首项，以2为公比的等比数列，

所以$a_n-2=-4\times 2^{\frac{n}{2}-1}$，即$a_n=-2^{\frac{n}{2}+1}+2$，

当$n\ge 1$，且n为奇数时，$a_n=a_{n+1}+3=-2^{\frac{n+1}{2}+1}+2+3=-2^{\frac{n+3}{2}}+5$，

所以$a_n=\begin{cases}-2^{\frac{n}{2}+1}+2, & n\text{是偶数}, \\ -2^{\frac{n+3}{2}}+5, & n\text{是奇数},\end{cases}$

明显数列$\{a_n\}$从第二项起$a_n<0$，故数列$\{S_n\}$为递减数列，

当n为偶数时，$S_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_n)=\dfrac{-4\left(1-2^{\frac{n}{2}}\right)}{1-2}+5\times\dfrac{n}{2}+\dfrac{-4\left(1-2^{\frac{n}{2}}\right)}{1-2}+2\times\dfrac{n}{2}$

$=8-2^{\frac{n}{2}+3}+\dfrac{7n}{2}$，

对于$S_n+10^6=8-2^{\frac{n}{2}+3}+\dfrac{7n}{2}+10^6$，由于$2^{20}=\left(2^{10}\right)^2=1024^2=1048576$，

当$n=32$时，$S_{32}+10^6=8-2^{\frac{32}{2}+3}+\dfrac{7\times 32}{2}+10^6>0$，

当$n=34$时，$S_{34}+10^6=8-2^{\frac{34}{2}+3}+\dfrac{7\times 34}{2}+10^6<0$，

又当$n=33$时，$S_{33}+10^6=S_{34}-a_{34}+10^6=8-2^{\frac{34}{2}+3}-\left(-2^{18}+2\right)+\dfrac{7\times 34}{2}+10^6>0$，

故使得$S_n+10^6<0$成立的最小的正整数n的值为34，

故答案为：34.

【点睛】方法点睛：对于通过奇偶来的分段数列，可分奇偶来研究数列的通项公式，先求出偶数项的通项公式后，奇数项的通项公式就好求了.

12．定义$\max\{a,b\}$表示实数a、b中的较大的数，已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a(a>0)$，$a_2=1$，

$a_{n+2}=\dfrac{2\max\{a_{n+1},2\}}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若$a_{2022}=4a$，记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_{2022}$的值为____.

【答案】$\dfrac{86057}{4}/21514.25$

【分析】分$0<a<2$、$a\ge 2$两种情况讨论，结合递推公式分析可知数列$\{a_n\}$是以5为周期的周期数列，根据$a_{2022}=4a$可求得a的值，再利用数列的周期性可求得S_{2022}的值.

【解析】当$0<a<2$时，$a_1=a>0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{2\max\{a_{n+1},2\}}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以 $a_3=\frac{1}{a}\cdot 2\max\{2,1\}=\frac{4}{a}>2$， $a_4=2\max\left\{\frac{4}{a},2\right\}=\frac{8}{a}$，

$a_5=\frac{4}{a}\cdot 2\max\left\{\frac{8}{a},2\right\}=4$， $a_6=\frac{a}{8}\cdot 2\max\{4,2\}=a$， $a_7=\frac{1}{4}\cdot 2\max\{a,2\}=1$，

$a_8=\frac{1}{a}\cdot 2\max\{1,2\}=\frac{4}{a}$， $\cdots$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是以5为周期的周期数列，

因为 $2022=404\times 5+2$，所以 $a_{2022}=4a=1$，解得 $a=\frac{1}{4}$，

所以 $S_{2022}=404\left(a+1+\frac{4}{a}+\frac{8}{a}+4\right)+a+1=\frac{86057}{4}$；

当 $a\geq 2$ 时， $a_1=a>0$， $a_2=1$， $a_{n+2}=\frac{2\max\{a_{n+1},2\}}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以 $a_3=\frac{1}{a}\cdot 2\max\{1,2\}=\frac{4}{a}<2$， $a_4=2\max\left\{\frac{4}{a},2\right\}=4$，

$a_5=\frac{a}{4}\cdot 2\max\{4,2\}=2a\geq 4$， $a_6=\frac{1}{4}\cdot 2\max\{2a,2\}=a>2$，

$a_7=\frac{1}{2a}\cdot 2\max\{a,2\}=1$， $a_8=\frac{1}{a}\cdot 2\max\{1,2\}=\frac{4}{a}$， $\cdots$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以5为周期的周期数列，

因为 $2022=404\times 5+2$，所以 $a_{2022}=a_2=1=4a$，解得 $a=\frac{1}{4}$，不合题意，舍去.

故 $S_{2022}=\frac{86057}{4}$.

故答案为： $\frac{86057}{4}$.

【点睛】关键点点睛：解本题求 S_{2022} 时，由于下标值较大，因此可以考虑利用递推公式分析数列 $\{a_n\}$ 的周期性或归纳出该数列的通项公式，这是解题的关键，再利用数列的求和方法求解即可.

13．已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列．若存在正整数 l，使得对任意的正整数 n，均有 $a_{n+l}\leq a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 为"l 阶弱减数列"．有以下两个命题：①数列 $\{b_n\}$ 为无穷数列且 $b_n=\cos n-\frac{n}{2}$（n 为正整数），则数列 $\{b_n\}$ 是"l 阶弱减数列"的充要条件是 $l\geq 4$；②数列 $\{c_n\}$ 为无穷数列且 $c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$（n 为正整数），若存在 $a\in\mathbf{R}$，使得数列 $\{c_n\}$ 是"2阶弱减数列"，则 $-1\leq q<1$．那么（　）

A．①是真命题，②是假命题　　B．①是假命题，②是真命题

C．①、②都是真命题　　D．①、②都是假命题

【答案】C

【分析】对于①：根据“l阶弱减数列”的定义结合充分必要条件分析判断；对于②：分析可得$2a+q^n+q^{n+1}<0$对一切正整数n恒成立，分$|q|>1$、$q=-1$和$|q|<1$三种情况，分析求解.

【解析】对于①：因为$b_n=\cos n-\frac{n}{2}$，

若该数列$\{b_n\}$为“l弱减数列”，

因为$\frac{5\pi}{6}<3<\pi,\frac{11\pi}{6}<6<2\pi$，则$-1<\cos 3<-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos 6<1$，

可得$b_3-b_6=\left(\cos 3-\frac{3}{2}\right)-\left(\cos 6-\frac{6}{2}\right)=\cos 3-\cos 6+\frac{3}{2}<-\sqrt{3}+\frac{3}{2}<0$，即$b_3<b_6$，

同理可得$b_4<b_6,b_5<b_6$，所以$l\geq 4$；

当$l\geq 4$时，$b_{n+l}-b_n=\left[\cos(n+l)-\frac{n+l}{2}\right]-\left(\cos n-\frac{n}{2}\right)=\cos(n+l)-\cos n-\frac{l}{2}\leq 2-\frac{l}{2}\leq 0$，

所以该数列为“l弱减数列”；

综上所述：数列$\{b_n\}$是“l阶弱减数列”的充要条件是$l\geq 4$，故①是真命题；

对于②：因为$c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$，显然$q\neq 1$，

若存在$a\in\mathbf{R}$使得数列$\{c_n\}$为“2阶弱减数列”，

则$c_{n+2}\leq c_n$，即$a(n+2)+\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\leq an+\frac{1-q^n}{1-q}$，整理得$2a+q^n+q^{n+1}<0$，

所以$2a+q^n+q^{n+1}<0$对一切正整数n恒成立，

若$|q|>1$，当$a=0$时，当$q>1$，则$q^n+q^{n+1}>0$；

当$q<-1,n$为奇数，$q^n+q^{n+1}=q^n(1+q)>0$；

可知$a=0$不合题意，所以$a\neq 0$，

则$q^2>1,1+q^{-1}=\frac{q+1}{q}>0$，

当$n=2m-1,m>\log_{q^2}\frac{2|a|}{1+q^{-1}}$时，

则$q^{n+1}=q^{2m}=(q^2)^m>(q^2)^{\log_{q^2}\frac{2|a|}{1+q^{-1}}}=\frac{2|a|}{1+q^{-1}}$，

可得$2a+q^n+q^{n+1}=2a+q^{n+1}(1+q^{-1})>2a+2|a|\geq 0$，不合题意；

若$q=-1$，取$a<0$，则$2a+q^n+q^{n+1}=2a+q^n(1+q)=2a<0$，符合题意；

若$|q|<1$，则$-1<q^n,q^{n+1}<1$，则$-2<q^n+q^{n+1}<2$，

取$a\le -1$，则$2a+q^n+q^{n+1}<2a+2\le 0$，符合题意；

综上所述：存在$a\in\mathbf{R}$，使得数列$\{c_n\}$是“2阶弱减数列”，则$-1\le q<1$．故②是真命题.

故选：C.

【点睛】方法点睛：对于新定义问题时，可以通过举例或转化法理解新定义，进而根据新定义分析求解.

题型5：存在性问题

14．斐波那契数列又称为黄金分割数列，在现代物理、化学等领域都有应用.斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\ge 3,n\in\mathrm{N}^*)$.给出下列四个结论：

① 存在$m\in\mathrm{N}^*$，使得a_m，a_{m+1}，a_{m+2}成等差数列；

② 存在$m\in\mathrm{N}^*$，使得a_m，a_{m+1}，a_{m+2}成等比数列；

③ 存在常数t，使得对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有a_n，ta_{n+2}，a_{n+4}成等差数列；

④ 存在正整数$i_1,i_2,\cdots,i_m$，且$i_1<i_2<\cdots<i_m$，使得$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}=2023$.

其中所有正确的个数是（　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

【答案】C

【分析】由递推公式得$\{a_n\}$性质后判断，

【解析】对于①，由题意得$a_2=1,a_3=2,a_4=3$，故a_2,a_3,a_4成等差数列，故①正确，

对于②，由递推公式可知a_m，a_{m+1}，a_{m+2}中有两个奇数，1个偶数，不可能成等比数列，故②错误，

对于③，$a_{n+4}=a_{n+3}+a_{n+2}=2a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+2}-a_n$，

故当$t=\dfrac{3}{2}$时，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，a_n，$\dfrac{3}{2}a_{n+2}$，a_{n+4}成等差数列；故③正确，

对于④，依次写出数列中的项为$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,\cdots$，

可得$2023=1597+377+34+13+2$，故④正确，

故选：C

15．已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n-6)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$，则（　）

A．当$a_1=3$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M\leqslant 0$，使得$a_n>M$恒成立

B．当$a_1=5$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M\le 6$，使得$a_n<M$恒成立

C．当$a_1=7$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立

D．当$a_1=9$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M>0$，使得$a_n<M$恒成立

【答案】B

【分析】法 1：利用数列归纳法可判断 ACD 正误，利用递推可判断数列的性质，故可判断 B 的正误.

法 2：构造$f(x)=\frac{1}{4}(x-6)^3+6-x$，利用导数求得$f(x)$的正负情况，再利用数学归纳法判断得各选项$a_n$所在区间，从而判断$\{a_n\}$的单调性；对于 A，构造$h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47(x\le 3)$，判断得$a_{n+1}<a_n-1$，进而取$m=-[M]+4$推得$a_n>M$不恒成立；对于 B，证明$a_n$所在区间同时证得后续结论；对于 C，记

$m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取$m=[m_0]+1$推得$a_n>M$不恒成立；对于 D，构造

$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49(x\ge 9)$，判断得$a_{n+1}>a_n+1$，进而取$m=[M]+1$推得$a_n<M$不恒成立.

【解析】法 1：因为$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，故$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3$，

对于 A ，若$a_1=3$，可用数学归纳法证明：$a_n-6\le -3$即$a_n\le 3$，

证明：当$n=1$时，$a_1-6=-3\le -3$，此时不等关系$a_n\le 3$成立；

设当$n=k$时，$a_k-6\le -3$成立，

则$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-54,-\frac{27}{4}\right)$，故$a_{k+1}-6\le -3$成立，

由数学归纳法可得$a_n\le 3$成立.

而$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\ge\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}>0$，$a_n-6<0$，故$a_{n+1}-a_n<0$，故$a_{n+1}<a_n$，

故$\{a_n\}$为减数列，注意$a_{k+1}-6\le -3<0$

故$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{9}{4}(a_n-6)$，结合$a_{n+1}-6<0$，

所以$6-a_{n+1}\ge\frac{9}{4}(6-a_n)$，故$6-a_{n+1}\ge 3\left(\frac{9}{4}\right)^n$，故$a_{n+1}\le 6-3\left(\frac{9}{4}\right)^n$，

若存在常数 $M\leqslant 0$，使得 $a_n>M$ 恒成立，则 $6-3\left(\frac{9}{4}\right)^n>M$，

故 $\frac{6-M}{3}>\left(\frac{9}{4}\right)^n$，故 $n<\log_{\frac{9}{4}}\frac{6-M}{3}$，故 $a_n>M$ 恒成立仅对部分 n 成立，

故 A 不成立.

对于 B，若 $a_1=5$, 可用数学归纳法证明：$-1\leq a_n-6<0$ 即 $5\leq a_n<6$，

证明：当 $n=1$ 时，$-1\leq a_1-6=-1\leq 0$，此时不等关系 $5\leq a_n<6$ 成立；

设当 $n=k$ 时，$5\leq a_k<6$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，故 $-1\leq a_{k+1}-6<0$ 成立即

由数学归纳法可得 $5\leq a_{k+1}<6$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1<0$，$a_n-6<0$，故 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 为增数列，

若 $M=6$，则 $a_n<6$ 恒成立，故 B 正确.

对于 C，当 $a_1=7$ 时， 可用数学归纳法证明：$0<a_n-6\leq 1$ 即 $6<a_n\leq 7$，

证明：当 $n=1$ 时，$0<a_1-6\leq 1$，此时不等关系成立；

设当 $n=k$ 时，$6<a_k\leq 7$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，故 $0<a_{k+1}-6\leq 1$ 成立即 $6<a_{k+1}\leq 7$

由数学归纳法可得 $6<a_n\leq 7$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]<0$，故 $a_{n+1}<a_n$，故 $\{a_n\}$ 为减数列，

又 $a_{n+1}-6=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\leq\frac{1}{4}(a_n-6)$, 结合 $a_{n+1}-6>0$ 可得: $a_{n+1}-6\leq(a_1-6)\left(\frac{1}{4}\right)^n$, 所以 $a_{n+1}\leq 6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

若 $a_{n+1}\leq 6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，若存在常数 $M>6$，使得 $a_n>M$ 恒成立，

则 $M-6\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 恒成立，故 $n\leq\log_{\frac{1}{4}}(M-6)$，$n$ 的个数有限，矛盾，故 C 错误.

对于 D，当 $a_1=9$ 时， 可用数学归纳法证明： $a_n-6\ge 3$ 即 $a_n\ge 9$，

证明：当 $n=1$ 时， $a_1-6=3\ge 3$，此时不等关系成立；

设当 $n=k$ 时， $a_k\ge 9$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3\ge\frac{27}{4}>3$，故 $a_{k+1}\ge 9$ 成立

由数学归纳法可得 $a_n\ge 9$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\left(a_n-6\right)\left[\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^2-1\right]>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故 $\left\{a_n\right\}$ 为增数列，

又 $a_{n+1}-6=\left(a_n-6\right)\times\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^2>\frac{9}{4}\left(a_n-6\right)$，结合 $a_n-6>0$ 可得： $a_{n+1}-6>\left(a_1-6\right)\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，所以

$a_{n+1}\ge 6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

若存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立，则 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

故 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故 $n<\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{M-6}{3}\right)+1$，这与 n 的个数有限矛盾，故 D 错误.

故选：B.

法 2：因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6-a_n=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-48$，

令 $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48$，则 $f'\left(x\right)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

令 $f'\left(x\right)>0$，得 $0<x<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

令 $f'\left(x\right)<0$，得 $6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(6+\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(6-\frac{2\sqrt{3}}{3},6+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，

令 $f\left(x\right)=0$，则 $\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48=0$，即 $\frac{1}{4}\left(x-4\right)\left(x-6\right)\left(x-8\right)=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$ 或 $x=8$，

注意到 $4<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<5$， $7<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}<8$，

所以结合 $f\left(x\right)$ 的单调性可知在 $\left(-\infty,4\right)$ 和 $\left(6,8\right)$ 上 $f\left(x\right)<0$，在 $\left(4,6\right)$ 和 $\left(8,+\infty\right)$ 上 $f\left(x\right)>0$，

对于 A，因为 $a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6$，则 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/185210013024011333