高三年级全国普通高考调研测试

数学

全卷满分 150 分，限时 120 分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的考试号填写在答题卡上.

2．作答时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效.

3．考试结束后，请将答题卡交回.

4．请认真阅读考试说明.

★预祝考试顺利★

第 Ⅰ卷（选择题，共 58 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\left\{m^2\middle||m|=1,m\in\mathrm{C}\right\}$，$B=\left\{a+b\mathrm{i}\middle|ab=0\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】通过讨论求得 m^2，$a+b\mathrm{i}$，利用集合交集运算求出 $A\cap B$，从而求出结果.

【详解】因为 $|m|=1$，且 $m\in\mathrm{C}$，则 $m=\pm1$，或 $m=x+y\mathrm{i}$，且 $x^2+y^2=1\ (y\neq0)$，所以 $m^2=1$，或 $m^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，

因为 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$，当 $a\neq0$，$b=0$ 时，$a+b\mathrm{i}=a$，当 $a=0$，$b\neq0$ 时，$a+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}$，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，$a+b\mathrm{i}=0$，

当 $a=1$，且 $b=0$，$m^2=1$，则 $a+b\mathrm{i}=1=m^2$，

当 $a=-1$，且 $b=0$，$x=0,y=\pm1$ 时，$m^2=-1$，则 $a+b\mathrm{i}=m^2=-1$

当 $\begin{cases}x^2-y^2=0\\x^2+y^2=1\\b=2xy\\a=0\end{cases}$，即 $a+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}=m^2=\mathrm{i}$，或 $a+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}=m^2=-\mathrm{i}$，

综上 $A\cap B=\{-1,1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，所以 $A\cap B$ 的元素个数为 4

故选：D

2. 已知 $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$，则点 B 到直线 AC 的距离为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】由坐标运算求出 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{AC}|$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，进而求出 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$，再求得 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影，然后即可求出点 B 到直线 AC 的距离.

【详解】因为 $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+4+4}=3$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\frac{1}{4}+0+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times0+(-2)\times1=-\frac{5}{2}$，

$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影为，$|\overrightarrow{AB}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=3\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\sqrt{5}$，

所以点 B 到直线 AC 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2-(-\sqrt{5})^2}=\sqrt{9-5}=2$.

故选：C.

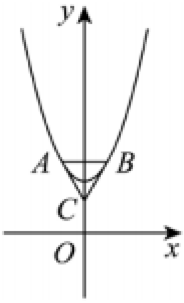
3. 设 $a>0$，函数 $f(x)=2x^2+a$ 与直线 $y=m$ 交于点 A,B．若曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴上方（不含 x 轴）的正三角形 ABC 的两条边相切，则 m 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{3}{8}\right)$　　　　B. $\left(-\infty,\frac{3}{8}\right)$　　　　C. $\left[\frac{3}{8},+\infty\right)$　　　　D. $\left(\frac{3}{8},+\infty\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】先设出各点的坐标，然后根据导数列出方程，最后通过点 C 在 x 轴上方得到取值范围.

【详解】

由于 A,B 都在直线 $y=m$ 上，故 AB 平行于 x 轴，再由 $f(x)$ 是偶函数，可设 $A(-u,2u^2+a)$，$B(u,2u^2+a)$.

据已知可得 BC 是 $y=f(x)$ 的切线，故 $f'(u)=k_{BC}=\tan\angle ABC=\tan 60°=\sqrt{3}$.

所以由 $f'(x)=4x$ 可知 $4u=\sqrt{3}$，故 $u=\frac{\sqrt{3}}{4}$，从而 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{8}+a\right)$.

由于 $k_{BC}=\sqrt{3}$，故 BC 的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{3}{8}+a$，令 $x=0$，得 $y=a-\frac{3}{8}$，所以 $C\left(0,a-\frac{3}{8}\right)$.

从而根据已知条件，点 $C\left(0,a-\frac{3}{8}\right)$ 在 x 轴上方，这就说明命题等价于 $a-\frac{3}{8}>0$.

故所求取值范围是 $a>\frac{3}{8}$.

故选：D.

4. 现有一份由连续正整数（可重复）组成的样本，其容量为 m，满足上四分位数为 28，第 80 百分位数为 30，则 m 的最小值为（　　）

A. 24　　　　B. 25　　　　C. 28　　　　D. 29

【答案】D

【解析】

【分析】根据百分位数定义，结合已知分析各项对应 m 值，可得答案.

【详解】对于 A，若样本容量的最小值为 24，则 $24\times\frac{3}{4}=18$，$24\times 0.8=19.2$，

则第 18,19 个数据的平均数应为 28，第 20 个数据应为 30，

由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是连续的正整数，显然不符合情况，故 A 错误；

对于B，若样本容量的最小值为25，则$25\times\frac{3}{4}=18.75$，$25\times0.8=20$，

则第 19 个数据应为28，第$20,21$个数据均为30，

由$x_1,x_2,\cdots,x_n$是连续的正整数，矛盾，故 B 错误；

对于 C，若样本容量的最小值为 28，则 $28\times\frac{3}{4}=21$，$28\times0.8=22.4$，

则第$21,22$个数据均为28，第 23 个数据应为30，

由$x_1,x_2,\cdots,x_n$是连续的正整数，矛盾，故 C 错误；

对于 D，若样本容量的最小值为 29，则$29\times\frac{3}{4}=21.75$，$29\times0.8=23.2$，

则第 22 个数据应为28，则第 24 个数据应为30，所以第23个数据应该是 29，符合题意，故 D 正确；

故选：D.

5. 在递增数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{\pi}{6}$，$\sin(a_n)=\cos(a_{n+1})$．已知S_n表示$\{a_n\}$前 n 项和的最小值，则

$\sin(S_9)=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C. $-\frac{1}{2}$　　　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意依次确定数列的前 9 项的值，结合三角函数诱导公式，即可得答案.

【详解】由题意在递增数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{\pi}{6}$，$\sin(a_n)=\cos(a_{n+1})$，

则$\cos(a_{n+1})=\sin(a_n)$，故$\cos(a_2)=\sin(a_1)=\frac{1}{2}$，

则$a_2=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$或$a_2=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，结合题意取$a_2=\frac{\pi}{3}$；

又$\cos(a_3)=\sin(a_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$a_3=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$或$a_3=\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

结合题意取$a_3=\frac{11\pi}{6}$；

同理$\cos(a_4)=\sin(a_3)=-\frac{1}{2}$，则$a_4=\frac{2\pi}{3}+2k\tau,k\in Z$或$a_4=\frac{4\pi}{3}+2k\tau,k\in Z$，

结合题意取$a_4=\frac{2\pi}{3}+2\tau$，

同理$\cos\left(a_5\right)=\sin\left(a_4\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$a_5=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$或$a_5=\frac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$，

结合题意取 $a_5=\frac{11\pi}{6}+2\tau$，

同理 $\cos(a_6)=\sin(a_5)=-\frac{1}{2}$，则 $a_6=\frac{2\pi}{3}+2k\tau,k\in Z$ 或 $a_6=\frac{4\pi}{3}+2k\tau,k\in Z$，

结合题意取 $a_6=\frac{2\pi}{3}+4\tau$， 同理可得 $a_7=\frac{11\pi}{6}+4\tau$， $a_8=\frac{2\pi}{3}+6\tau$， $a_9=\frac{11\pi}{6}+6\tau$，

故 $\{a_n\}$ 前 9 项和的最小值 $S_9=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}+\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)+\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi\right)+\left(\frac{2\pi}{3}+4\pi\right)$

$+\left(\frac{11\pi}{6}+4\pi\right)+\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)+\left(\frac{11\pi}{6}+6\pi\right)$

$=\frac{59\pi}{6}+24\pi$，

可得 $\sin(S_9)=-\frac{1}{2}$，

故选：C

6. 在锐角 □ABC 中，已知 $\sin(2A+C)=2\sin C-\sin B$，则 B，C 的大小关系为（　　）

A. $B>C$　　B. $B=C$　　C. $B<C$　　D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件，利用诱导公式及和差角的正弦公式化简，再利用正弦定理边化角及余弦定理推理即得.

【详解】在锐角 □ABC 中，由 $\sin(2A+C)=2\sin C-\sin B$，得 $\sin(\tau+A-B)=2\sin(\tau-A-B)-\sin B$，

则 $\sin(B-A)=2\sin(A+B)-\sin B$，整理得 $\sin B\cos A-\cos B\sin A=2\sin B\cos A+2\cos B\sin A-\sin B$，

于是 $\sin B=\sin B\cos A+3\cos B\sin A$，由正弦定理得 $b=b\cos A+3a\cos B$，

由余弦定理得 $b=b\cdot\frac{b^2+\quad-}{2bc}+a\cdot\frac{+\quad-b^2}{2ac}+2a\cos B=c+2a\cos B$，而 $\cos B>0$，

因此 $b>c$，所以 $B>C$.

故选：A

7. 已知标准椭圆上 P，Q 两点的切线方程分别为 $2x+\sqrt{3}y-1=0$，$2\sqrt{3}x+y-1=0$，则直线 PQ 的斜率为（ _ ）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. 2　　D. -2

【答案】D

【解析】

【分析】设椭圆方程为$mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$，分别联立直线方程，根据判别式联立求解可得$m,n$，然后求出$P,Q$坐标可得斜率.

【详解】设椭圆方程为$mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}2x+\sqrt{3}y-1=0\\mx^2+ny^2=1\end{cases}$消去$x$得$\left(\frac{3}{4}m+n\right)y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}my+\frac{m}{4}-1=0$①，

则$\Delta=\frac{3}{4}m^2-4\left(\frac{3}{4}m+n\right)\left(\frac{m}{4}-1\right)=3m-mn+4n=0$②，

联立$\begin{cases}2\sqrt{3}x+y-1=0\\mx^2+ny^2=1\end{cases}$消去$y$得$(m+12n)x^2-4\sqrt{3}nx+n-1=0$③，

则$\Delta=48n^2-4(m+12n)(n-1)=4m-4mn+48n=0$④，

联立②④解得$m=16,n=4$，

代入①得$16y^2-8\sqrt{3}y+3=0$，解得$y_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，

代入③得$64x^2-16\sqrt{3}x+3=0$，解得$x_2=\frac{\sqrt{3}}{8}$，所以$y_2=\frac{1}{4}$，

所以$k_{PQ}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}}=-2.$

故选：D

8. 若满足$f(x)=ax^3-bx+c\geq 0(c>0)$在$[-c,c]$上恒成立的 a 唯一，则整数 b 的值为（　　）

A. 3　　B. ± 3　　C. 4　　D. ± 4

【答案】A

【解析】

【分析】用特殊值法来进行判断函数恒等问题，不妨设$c=1$，$f(x)=ax^3-bx+1,f'(x)=3ax^2-b$，分类讨论判断$a,b$范围进行求解.

【详解】不妨设$c=1$，$f(x)=ax^3-bx+1,f'(x)=3ax^2-b$，

对于 A，$b=3,f(x)=ax^3-3x+1,f'(x)=3ax^2-3=3(ax^2-1)$，