

微专题 18 对数平均不等式治偏

知识梳理

一、极值点偏移

这几年极值点偏移的题目出现的频率非常高, 什么是极值点偏移呢? 请先看一下极值点不偏移的例子, 例如函数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 有唯一的极值点 $x_0 = 2$, 且为极小值点, $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 则 $f(x)$ 的极值点没有发生偏移, 如图 1.

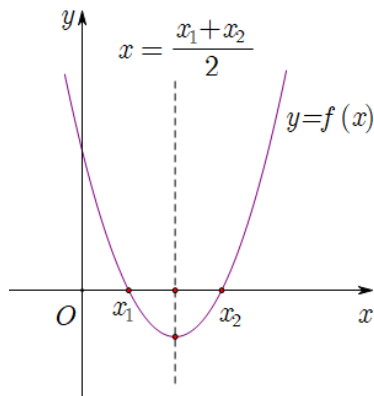


图 1

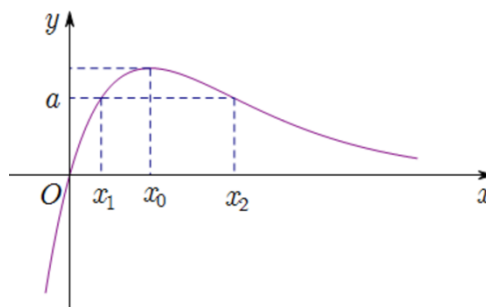


图 2

再看一个极值点偏移的例子, 例如函数 $g(x) = \frac{x}{e^x}$ 有唯一的极值点 $x_0 = 1$, 且为极大值点, 其图象如图 2, 在极值点的左侧函数值增长较快, 在极值点的右侧函数值减小较慢, 则必存在以 x_0 为中点的开区间 $(x_0 - a, x_0 + a)$ ($a > 0$), 使得对该区间内任意满足 $f(x_1) = f(x_2)$ 的点 x_1, x_2 来说, 总有 $x_0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 我们称这种情况为极值点向左偏移.

极值点向左偏移也可以这样描述:

若 x_0 是极大值点, 则 $f(x_0 - t) < f(x_0 + t)$ ($t > 0$),

若 x_0 是极小值点, 则 $f(x_0 - t) > f(x_0 + t)$ ($t > 0$).

这个描述方法很重要, 它是对称化构造函数解题的理论依据.

类似地, 如果函数 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0 > \frac{x_1 + x_2}{2}$, 那么我们称为极值点向右偏移.

一个函数可能有多个极值点, 可能每一个极值点都偏移. 以下是极值点偏移的四种典型模型:

左快右慢 (极值点左偏 $\Leftrightarrow x_0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$), 如图 3, 图 4.

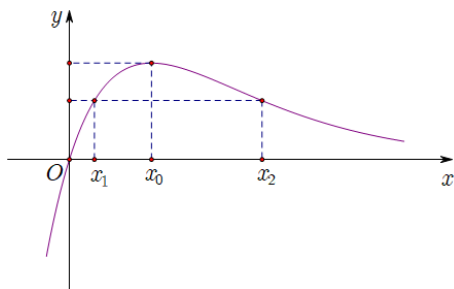


图 3

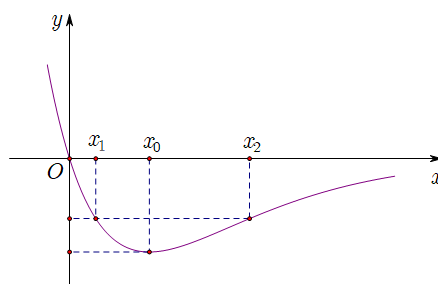


图 4

左慢右快 (极值点右偏 $\Leftrightarrow x_0 > \frac{x_1 + x_2}{2}$), 如图 5, 图 6.

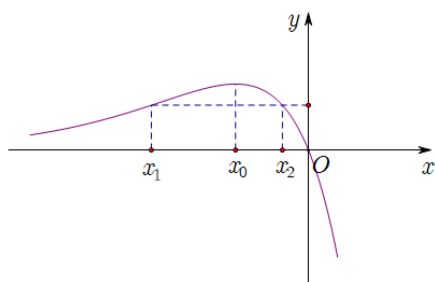


图 5

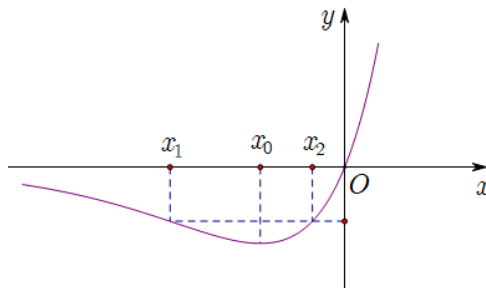


图 6

二、对数平均不等式

设 $b > a > 0$, 则 $a < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$, 其中 $\frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ 叫做

对数平均数, $\frac{a+b}{2}$ 叫做算术平均数, $\sqrt{ab}$ 叫做几何平均数, $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 叫做调和平均数, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

叫做平方平均数. 我们把不等式 $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$ 叫做“对数平均不等式”. 简记作

$G(a, b) < L(a, b) < A(a, b)$.

证明: (1) 先证 $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

要证 $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$, 只需证 $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, 即 $\ln \frac{b}{a} < \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$.

记 $t = \sqrt{\frac{b}{a}}$, 则 $2 \ln t < t - \frac{1}{t}$ ($t > 1$). 令 $f(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t}$ ($t > 1$),

$$f'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{t^2} = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0,$$

所以 $f(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 递减, 而 $f(1) = 0$, 因此当 $t > 1$ 时, $f(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t} < 0$ 恒成立,

即 $\ln \frac{b}{a} < \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$ 恒成立.

(2) 再证 $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.

要证 $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$, 只需证 $\ln b - \ln a < \frac{2(b-a)}{a+b}$, 即 $\ln \frac{b}{a} < \frac{2(\frac{b}{a} - 1)}{1 + \frac{b}{a}}$.

令 $t = \frac{b}{a}$ ($t > 1$), 则有 $\ln t < \frac{2(t-1)}{1+t}$ ($t > 1$), 设 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{1+t}$ ($t > 1$),

则 $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增, 而 $g(1) = 0$,

因此当 $t > 1$ 时, $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{1+t} > 0$ 恒成立, 即 $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.

几何意义: 首先, 将对数平均不等式变形为: $\frac{2}{a+b} < \frac{\ln a - \ln b}{a-b} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$,

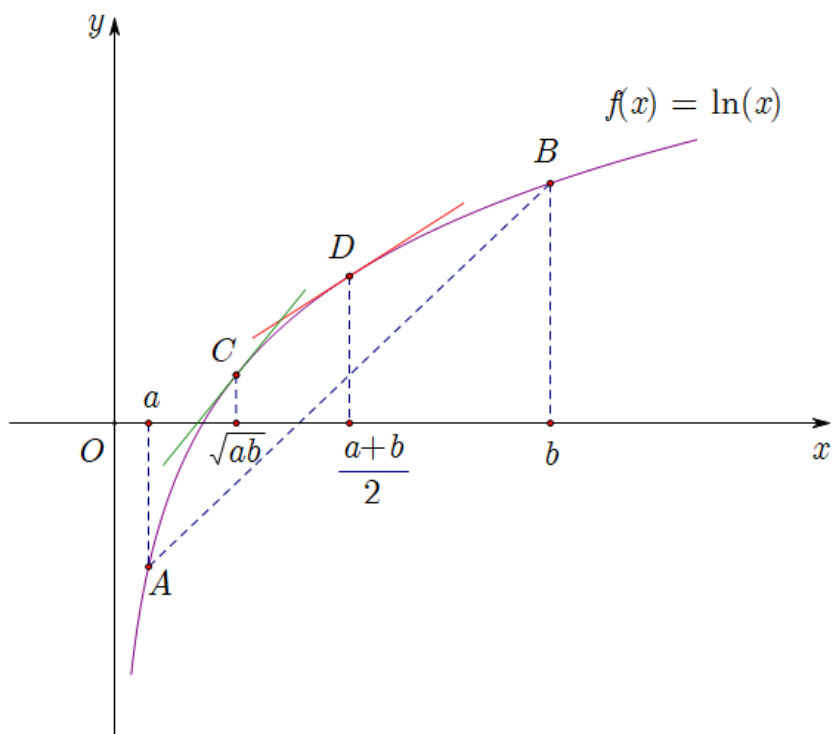


图 7

$\frac{\ln a - \ln b}{a - b}$ 表示经过曲线 $y = \ln x$ 上两点 $A(a, \ln a)$ 和 $B(b, \ln b)$ 的直线的斜率, $\frac{2}{a+b}$ 表示曲

线 $y = \ln x$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处切线的斜率, $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 表示曲线 $y = \ln x$ 在 $x = \sqrt{ab}$ 处切线的斜率.

例题讲解

一、不含参数的极值点偏移问题

例 1 (2010 天津卷·理科) 已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbb{R})$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$.

证明: $x_1 + x_2 > 2$.

证法一: (构造对称差函数) 先求出极值点 x_0 , 再构造对称差函数 $F(x) = f(x_0 + x) - f(x_0 - x)$.

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减,

$x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(0) = 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$,

函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 1$ 处取得极大值 $f(1)$, 且 $f(1) = \frac{1}{e}$, 如图所示.

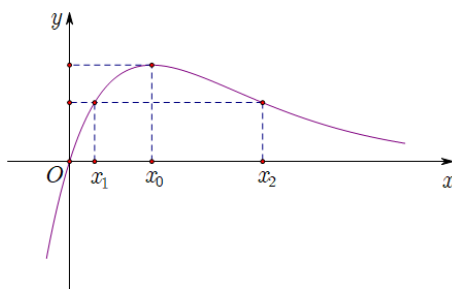


图 8

由 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则必有 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

令 $F(x) = f(1+x) - f(1-x), x \in (0, 1]$, 则 $F'(x) = \frac{x}{e^{x+1}}(e^{2x} - 1) > 0$,

$\therefore F(x)$ 在 $x \in (0, 1]$ 上单调递增, $F(x) > F(0) = 0$,

即 $f(1+x) > f(1-x)$ 对 $x \in (0, 1]$ 恒成立,

由 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 得 $1 - x_1 \in (0, 1]$,

所以 $f(2-x_1) = f(1+(1-x_1)) > f(1-(1-x_1)) = f(x_1) = f(x_2)$, 即 $f(2-x_1) > f(x_2)$,

又因为 $2-x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $2-x_1 < x_2$, 所以 $x_1 + x_2 > 2$.

证法二: (构造差函数, 对称构造的变形升级, 学生更容易操作)

欲证 $x_1 + x_2 > 2$, 只需证 $x_2 > 2 - x_1$,

由解法一知 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 故 $2 - x_1, x_2 \in (1, +\infty)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 只需证 $f(x_2) \leq f(2-x_1)$,

又因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 故也即证 $f(x_1) \leq f(2-x_1)$

构造函数 $H(x) = f(x) - f(2-x), x \in (0, 1)$, 则等价于证明 $H(x) < 0$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立.

由 $H'(x) = f'(x) - f'(2-x) = \frac{1-x}{e^x}(1-e^{2x-2}) > 0$, 得 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以 $H(x) < H(1) = 0$, 所以原不等式成立.

证法三: (对数平均不等式)

因为 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbb{R})$, $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$, $\frac{x_2}{x_1} = e^{x_2-x_1}$.

两边同时取自然对数, 得 $\ln x_2 - \ln x_1 = x_2 - x_1$, 即 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = 1$,

由对数平均不等式得: $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = 1$, 所以 $x_1 + x_2 > 2$.

点评: 方法一、二都是根据极值点偏移构造对称差函数, 方法三则利用对数平均不等式直接秒杀,

1、构造对称差函数的解题模板:

- (1) 求出函数 $f(x)$ 的极值点 x_0 ;
- (2) 构造一元对称差函数: $F(x) = f(x_0 + x) - f(x_0 - x)$;
- (3) 确定函数 $F(x)$ 的单调性;
- (4) 结合 $F(0) = 0$, 判断 $F(x)$ 的符号, 从而确定 $f(x_0 + x)$ 、 $f(x_0 - x)$ 的大小关系.

2、对数平均不等式的解题模板:

- (1) 根据 $f(x_1) = f(x_2)$ 建立等式;
- (2) 如果等式含有参数, 则消参; 有指数式则两边取对数, 转化为对数式;
- (3) 通过恒等变换转化为对数平均问题, 利用对数平均不等式求解.

特别注意: 对数平均不等式在高考中不能直接用, 在解答题中用时需要证明, 以免扣分. 解答极值点偏移问题的通法还是对称构造, 但是通法并不一定是最简便的方法, 你只要会证明对数平均不等式, 便可笑傲考场.

二、含参数的极值点偏移问题

例 2 (2016 年全国课标卷 I 理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

- (I) 求 a 的取值范围;
- (II) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明 $x_1 + x_2 < 2$.

解: (I) $a > 0$, 过程略.

(II) 证法一: (反证法+对数平均不等式)

同证法一得
$$\begin{cases} (2-x_1)e^{x_1} = a(x_1-1)^2 \\ (2-x_2)e^{x_2} = a(x_2-1)^2 \end{cases}$$

两式相减得 $(2-x_1)e^{x_1} - (2-x_2)e^{x_2} = a(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)$, $(a > 0)$.

假设 $x_1+x_2 \geq 2$, 那么 $(2-x_1)e^{x_1} - (2-x_2)e^{x_2} \leq 0$, $\therefore (2-x_1)e^{x_1} \leq (2-x_1)e^{x_1}$,

取自然对数得 $\ln(2-x_1) + x_1 \leq \ln(2-x_2) + x_2$, 则 $\frac{x_2-x_1}{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)} \geq 1$. ①

由对数平均不等式得:

$$\frac{x_2-x_1}{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)} = \frac{(2-x_1) - (2-x_2)}{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)} < \frac{(2-x_1) + (2-x_2)}{2} = 2 - \frac{x_1+x_2}{2} \leq 1,$$

与①式相矛盾.

所以故 $x_1+x_2 < 2$.

证法二: (对数平均不等式)

由 (I) 可知, $x_1 < 1 < x_2 < 2$.

$$f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2 = 0 \implies a = \frac{(2-x_1)e^{x_1}}{(x_1-1)^2} = \frac{(2-x_2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2},$$

$$\text{上式两边取自然对数得 } \ln \frac{(2-x_1)}{(x_1-1)^2} + x_1 = \ln \frac{(2-x_2)}{(x_2-1)^2} + x_2,$$

$$\text{整理得 } [\ln(x_1-1)^2 - \ln(x_2-1)^2] - [\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)] = x_1 - x_2,$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 &= \frac{\ln(x_1-1)^2 - \ln(x_2-1)^2}{x_1 - x_2} - \frac{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= [(x_1-1) + (x_2-1)] \frac{\ln(x_1-1)^2 - \ln(x_2-1)^2}{(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2} + \frac{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)}{(2-x_1) - (2-x_2)} \\ \text{即 } 1 &= [(x_1-1) + (x_2-1)] \frac{\ln(x_1-1)^2 - \ln(x_2-1)^2}{(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2} + \frac{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)}{(2-x_1) - (2-x_2)} \end{aligned} \quad ①$$

由对数平均不等式得

$$\frac{\ln(x_1-1)^2 - \ln(x_2-1)^2}{(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2} > \frac{2}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2},$$

$$\frac{\ln(2-x_1) - \ln(2-x_2)}{(2-x_1) - (2-x_2)} > \frac{2}{(2-x_1) + (2-x_2)},$$

代入①式, 再两边减去 1, 得,

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{2(x_1+x_2-2)}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2} + \frac{x_1+x_2-2}{4-(x_1+x_2)} \\ &= (x_1+x_2-2) \left[\frac{2}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2} + \frac{1}{4-(x_1+x_2)} \right], \end{aligned}$$

因为 $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 > 0$, $4-(x_1+x_2) > 0$, 所以 $x_1+x_2 < 2$.

点评: 含参数的极值点偏移问题, 可以通过 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 消去参数, 构造出对数平均值, 再利用对数平均不等式将问题解决. 遇到 $x_1 + x_2 < a$ 或者 $x_1 \cdot x_2 > b$ 时, 属于对数平均不等式反向, 这就需要将两式相减先构造对数平均不等式, 再相加实现和积互换, 从而达到证明反向不等式.

下面再附一个有问题的解法, 以后有时间再看看能不能修补:

证法一: 由 (I) 可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(1) = -e < 0$.

设 $x_1 < 1 < x_2 < 2$, 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 得

$$\begin{cases} (x_1 - 2)e^{x_1} + a(x_1 - 1)^2 = 0 \\ (x_2 - 2)e^{x_2} + a(x_2 - 1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{(2 - x_1)e^{x_1}}{(x_1 - 1)^2} = a \\ \frac{(2 - x_2)e^{x_2}}{(x_2 - 1)^2} = a \end{cases} \iff \frac{(2 - x_1)e^{x_1}}{(x_1 - 1)^2} = \frac{(2 - x_2)e^{x_2}}{(x_2 - 1)^2},$$

两边取自然对数, 得

$$\begin{aligned} \ln(2 - x_1) + x_1 - \ln(x_1 - 1)^2 &= \ln(2 - x_2) + x_2 - \ln(x_2 - 1)^2 \\ \iff \ln(2 - x_1) - \ln(2 - x_2) - \ln(1 - x_1)^2 + \ln(1 - x_2)^2 &= x_2 - x_1 \\ \iff \frac{\ln(2 - x_1) - \ln(2 - x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{\ln\left(\frac{x_2 - 1}{x_1 - 1}\right)^2}{x_2 - x_1} &= 1, \end{aligned}$$

$$\text{由对数平均不等式得 } \frac{\ln(2 - x_1) - \ln(2 - x_2)}{x_2 - x_1} > \frac{2}{4 - (x_1 + x_2)},$$

$$\text{又 } \frac{\ln\left(\frac{x_2 - 1}{x_1 - 1}\right)^2}{x_2 - x_1} > 0, \text{ ???, 所以 } 1 > \frac{2}{4 - (x_1 + x_2)}, \text{ 故 } x_1 + x_2 < 2.$$

三、中点导数问题——点差法

例 3 (2011 年辽宁卷理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (2 - a)x$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设 $a > 0$, 证明: 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$;

(III) 若函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0 , 证明: $f'(x_0) < 0$.

解: (I) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (2 - a) = -\frac{(2x + 1)(ax - 1)}{x} (x > 0)$,

(i) 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上是减函数.

(ii) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

(II) **证法一:** 设函数 $g(x) = f\left(\frac{1}{a} + x\right) - f\left(\frac{1}{a} - x\right) = \ln(1+ax) - \ln(1-ax) - 2ax$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{a}{1+ax} + \frac{a}{1-ax} - 2a = \frac{2a^3x^2}{1-a^2x^2},$$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 而 $g(0) = 0$, $\therefore g(x) > g(0) = 0$,

故当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$.

证法二: (对数平均不等式)

不妨令 $g(x) = f\left(\frac{1}{a} + x\right) - f\left(\frac{1}{a} - x\right)$, 即 $g(x) = \ln(1+ax) - \ln(1-ax) - 2ax$,

由对数均值不等式, 得 $\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_2 + x_1}{2} (x_2 \neq x_1)$,

$$\text{所以 } \frac{(1+ax) - (1-ax)}{\ln(1+ax) - \ln(1-ax)} = \frac{2ax}{\ln(1+ax) - \ln(1-ax)} < \frac{(1+ax) + (1-ax)}{2} = 1,$$

又易知: $\ln(1+ax) > \ln(1-ax) \Rightarrow \ln(1+ax) - \ln(1-ax) > 0$,

故 $2ax < \ln(1+ax) - \ln(1-ax)$, 即 $g(x) > 0$, 即 $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$.

(III) **证法一:** (构造差函数)

由 (1), 不妨设 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, 则 $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$.

由 (2) 知 $f\left(\frac{2}{a} - x_1\right) = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - x_1\right) > f\left(\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a} - x_1\right)\right) = f(x_1) = f(x_2) = 0$,

又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, $\therefore \frac{2}{a} - x_1 < x_2$, 于是 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{1}{a}$,

由 (1) 知 $f'(x_0) < 0$.

证法二: (对数平均不等式)

由 (1) 知, $a > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上是减函数.

设 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, 则 $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$. 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 得

$$\begin{aligned} \ln x_1 - ax_1^2 + (2-a)x_1 &= \ln x_2 - ax_2^2 + (2-a)x_2 = 0 \\ \Leftrightarrow \ln x_1 - \ln x_2 + 2(x_1 - x_2) &= a(x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\ln x_1 - \ln x_2 + 2(x_1 - x_2)}{x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2 + 2(x_1 - x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{x_1+x_2+1}{\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + 2} \Leftrightarrow \frac{2}{x_1+x_2} < \frac{\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + 2}{x_1+x_2+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x_1+x_2} < \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

由对数平均不等式, 上式显然成立, 问题得证.

点评: 由 $f(x)$ 的单调性可知, $f'(x_0) < 0$ 等价于 x_0 在极值点 $\frac{1}{a}$ 的右侧, 即极值点左偏.

已知 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ ($x_2 > x_1$), 证明 $f'(x_0) < 0$ 或者 $f'(x_0) > 0$ 时, 利用分析法执果索因, 将式子证明转交给对数平均不等式, 方法类似圆锥曲线点差法 (作差, 同除, 取中点); 当出现 $f'\left(\frac{x_1+2x_2}{3}\right) < 0$ 、 $f'\left(\frac{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2}{3}\right) < 0$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$) 之类型题时, 要转化为 $f'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) < f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$, 也属于对数点差法系列.

四、几何平均型的偏移

例 4 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, a 为常数, 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 试证明: $x_1 \cdot x_2 > e^2$.

证法一: (分离参数, 构造差函数)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} - a = 0,$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{\ln x}{x} - a, \text{ 则 } x_1, x_2 \text{ 是 } g(x) = \frac{\ln x}{x} - a \text{ 的两个零点, } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow g'(e) = 0.$$

当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以 $0 < x_1 < e < x_2$.

要证 $x_1 x_2 > e^2$, 即证 $x_2 > \frac{e^2}{x_1}$, 故构造函数 $F(x) = g(x) - g\left(\frac{e^2}{x}\right)$, $x \in (0, e)$,

$$\text{则 } F'(x) = \frac{(1 - \ln x)(e^2 - x^2)}{x^2 e^2} > 0, \text{ } F(x) \text{ 在 } (0, e) \text{ 上递增, } F(x) < F(e) = 0,$$

$$\text{即 } g(x) < g\left(\frac{e^2}{x}\right).$$

$$\text{令 } x = x_1, \text{ 则 } g(x_2) = g(x_1) < g\left(\frac{e^2}{x_1}\right),$$

因为 $x_2, \frac{e^2}{x_1} \in (e, +\infty)$, 且 $g(x)$ 在 $x \in (e, +\infty)$ 上递减,

所以 $x_2 > \frac{e^2}{x_1}$, 即 $x_1 x_2 > e^2$.

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/185240023313011320>