

## 专题 17 特殊平行四边形中最常考的五种几何模型（解析版）

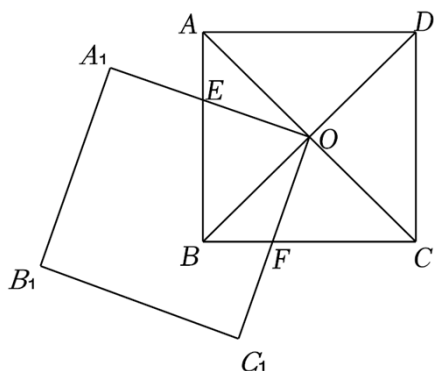
### 类型一 对角互补模型

1. （2022 春•江岸区校级月考）如图，正方形  $ABCD$  的对角线相交于点  $O$ ，点  $O$  又是正方形  $A_1B_1C_1O$  的一个顶点，且这两个正方形的边长相等.  $OA_1$  与  $OC_1$  分别交  $AB$ ,  $BC$  于点  $E$ ,  $F$ .

（1）求证： $OE=OF$ ；

（2）若  $BE=a$ ,  $BF=b$ ，请直接写出四边形  $EBFO$  的面积为 \_\_\_\_\_（用含有  $a$ ,  $b$  的式子表示）；

（3）已知  $AE=2$ ,  $CF=3$ ，求  $A_1E$  的长.



**思路引领：**（1）由“ASA”可证  $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ ，可得  $OE=OF$ ；

（2）由全等三角形的性质可得  $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle BOF}$ ,  $AE=BF$ ，由正方形的面积公式可求解；

（3）由等腰直角三角形的性质可求  $EO$ ，即可求解.

（1）证明：∵ 四边形  $ABCD$  是正方形，

$$\therefore AO=BO, \angle AOB=90^\circ, \angle OAB=\angle OBC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE + \angle EOB = 90^\circ, \angle BOF + \angle EOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOF.$$

在  $\triangle AOE$  和  $\triangle BOF$  中，

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OBF \\ OA = OB \\ \angle AOE = \angle BOF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OE=OF;$$

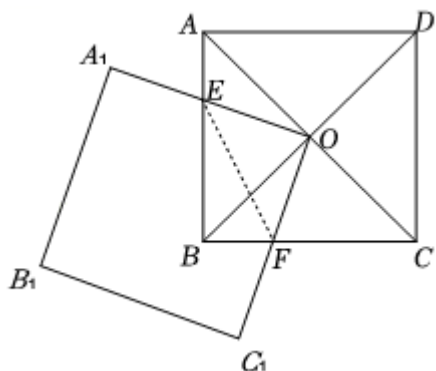
（2）解：∵  $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ ,

$$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle BOF}, AE=BF,$$

$$\therefore \text{四边形 } EBFO \text{ 的面积} = S_{\triangle AOB}, AB=BE+AE=a+b,$$

$$\therefore \text{四边形 } EBFO \text{ 的面积} = \frac{1}{4} (a+b)^2;$$

(3) 如图, 连接  $EF$ ,



$$\because BF=AE=2, CF=3,$$

$$\therefore BC=5,$$

$$\therefore A_1E=BC=5,$$

$$\therefore BE=3,$$

$$\therefore EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13},$$

$$\because EO=FO, \angle EOF=90^\circ,$$

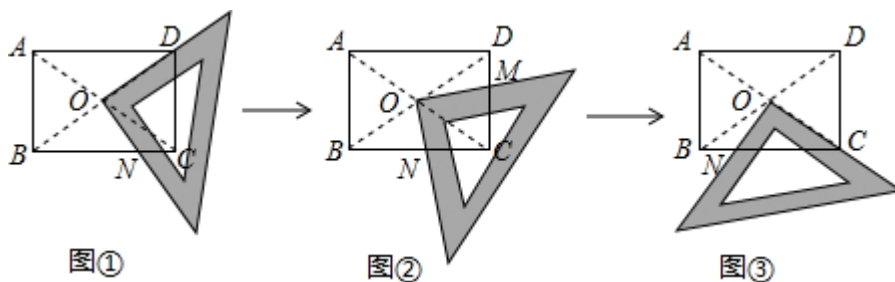
$\therefore \triangle EOF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore EO=FO = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2},$$

$$\therefore A_1E = 5 - \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

**总结提升:** 本题考查了全等三角形的判定和性质, 正方形的性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质, 灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

2. (2022•隆昌市校级三模) 某研究性学习小组在探究矩形的折纸问题时, 将一块直角三角板的直角顶点绕着矩形  $ABCD$  ( $AB < BC$ ) 的对角线交点  $O$  旋转 (如图①→②→③), 图中  $M$ 、 $N$  分别为直角三角板的直角边与矩形  $ABCD$  的边  $CD$ 、 $BC$  的交点.



- (1) 该学习小组中一名成员意外地发现: 在图① (三角板的一直角边与  $OD$  重合) 中,  $BN^2 =$

$CD^2+CN^2$ ; 在图③ (三角板的一直角边与  $OC$  重合) 中,  $CN^2=BN^2+CD^2$ . 请你对这名成员在图①和图③中发现的结论选择其一说明理由.

(2) 试探究图②中  $BN$ 、 $CN$ 、 $CM$ 、 $DM$  这四条线段之间的关系, 写出你的结论, 并说明理由.

**思路引领:** (1) 连接  $DN$ , 根据矩形得出  $OB=OD$ , 根据线段垂直平分线得出  $BN=DN$ , 根据勾股定理求出  $DN$  的平方, 即可求出答案;

(2) 延长  $NO$  交  $AD$  于点  $P$ , 连接  $PM$ ,  $MN$ , 证  $\triangle BNO \cong \triangle DPO$ , 推出  $OP=ON$ ,  $DP=BN$ , 根据线段垂直平分线求出  $PM=MN$ , 根据勾股定理求出即可.

(1) 选①,

证明: 连接  $DN$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore OB=OD$ ,

$\because \angle DON=90^\circ$  ,

$\therefore BN=DN$ ,

$\because \angle BCD=90^\circ$  ,

$\therefore DN^2=CD^2+CN^2$ ,

$\therefore BN^2=CD^2+CN^2$ ;

(2) 证明: 延长  $NO$  交  $AD$  于点  $P$ , 连接  $PM$ ,  $MN$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore OD=OB$ ,  $AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle DPO = \angle BNO$ ,  $\angle PDO = \angle NBO$ ,

在  $\triangle BON$  和  $\triangle DOP$  中

$$\therefore \begin{cases} \angle NBO = \angle PDO \\ \angle BNO = \angle DPO, \\ OB = OD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BON \cong \triangle DOP$  (AAS) ,

$\therefore ON=OP$ ,  $BN=PD$ ,

$\because \angle MON=90^\circ$  ,

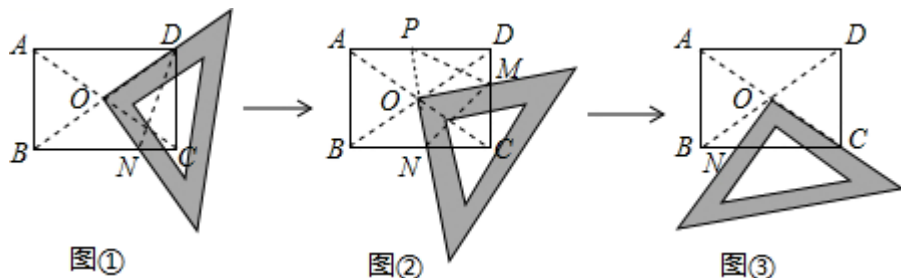
$\therefore PM=MN$ ,

$\because \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$  ,

$$\therefore PM^2 = PD^2 + DM^2, \quad MN^2 = CM^2 + CN^2,$$

$$\therefore PD^2 + DM^2 = CM^2 + CN^2,$$

$$\therefore BN^2 + DM^2 = CM^2 + CN^2.$$

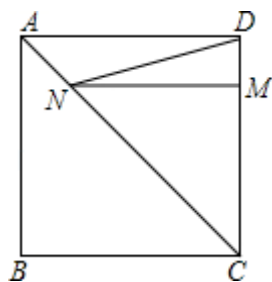


**总结提升：** 本题考查了矩形的性质，线段垂直平分线，全等三角形的性质和判定，勾股定理等知识点的综合运用，主要考查学生的猜想能力和推理能力，题目比较好，但是有一定的难度.

## 类型二 将军饮马模型

### (1) 两定一动模型

3. (2020 春•洛阳期末) 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 16，点  $M$  在边  $DC$  上，且  $DM=4$ ，点  $N$  是对角线  $AC$  上一动点，则线段  $DN+MN$  的最小值为 ( )



A. 16

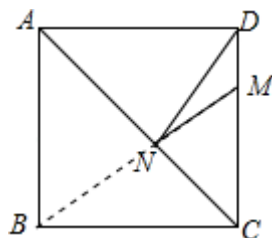
B.  $16\sqrt{2}$

C. 20

D.  $4\sqrt{17}$

**思路引领** 连接  $MB$  交  $AC$  于  $N$ ，此时  $DN+MN$  最小，先证明这个最小值就是线段  $BM$  的长，利用勾股定理就是即可解决问题.

**解：** 如图，连接  $MB$  交  $AC$  于  $N$ ，此时  $DN+MN$  最小.



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$\therefore B、D$  关于  $AC$  对称，

$\therefore DN=BN$ ，

$$\therefore DN+MN=BN+NM=BM,$$

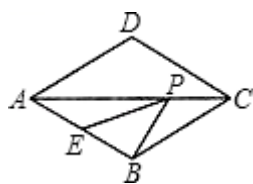
在  $\text{Rt}\triangle BMC$  中,  $\because \angle BCM=90^\circ$ ,  $BC=16$ ,  $CM=CD-DM=16-4=12$ ,

$$\therefore BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20.$$

故选: C.

**总结提升:** 本题考查最短问题、正方形性质、勾股定理、两点之间线段最短等知识, 解题的关键是利用对称找到点  $N$  的位置, 属于中考常考题型.

4. (2019•霍邱县二模) 如图, 菱形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $E$  是  $AB$  的中点,  $P$  是对角线  $AC$  上的一个动点, 则  $PE+PB$  的最小值是\_\_\_\_\_.



**思路引领:** 根据轴对称最短问题作法首先求出  $P$  点的位置, 再结合菱形的性质得出  $\triangle AEE'$  为等边三角形, 进而求出  $PE+PB$  的最小值.

解: 作  $E$  点关于  $AC$  对称点  $E'$  点, 连接  $E'B$ ,  $E'B$  与  $AC$  的交点即是  $P$  点,

$\because$  菱形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $E$  是  $AB$  的中点,

$$\therefore AE'=AE=BE=1,$$

$\therefore \triangle AEE'$  为等边三角形,

$$\therefore \angle AEE'=60^\circ,$$

$$\therefore \angle E'EB=120^\circ,$$

$$\because BE=EE',$$

$$\therefore \angle EE'B=30^\circ,$$

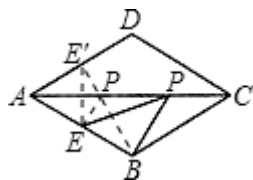
$$\therefore \angle AE'B=90^\circ,$$

$$BE'=\sqrt{AB^2-AE'^2}=\sqrt{3},$$

$$\because PE+PB=BE',$$

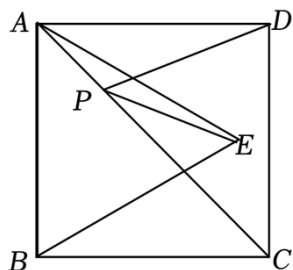
$$\therefore PE+PB \text{ 的最小值是: } \sqrt{3}.$$

故答案为:  $\sqrt{3}$ .



**总结提升：**此题主要考查了菱形的性质以及轴对称中最短路径求法，正确地作出  $P$  点从而利用菱形性质得出是解决问题的关键。

5. （2021 春•红安县期中）如图，正方形  $ABCD$  的面积为 12， $\triangle ABE$  是等边三角形，点  $E$  在正方形  $ABCD$  内，在对角线  $AC$  上有一点  $P$ ，使  $PD+PE$  的和最小，则这个最小值为 \_\_\_\_\_。



**思路引领** 由于点  $B$  与  $D$  关于  $AC$  对称，所以连接  $BD$ ，与  $AC$  的交点即为  $F$  点。此时  $PD+PE=BE$  最小，而  $BE$  是等边  $\triangle ABE$  的边， $BE=AB$ ，由正方形  $ABCD$  的面积为 12，可求出  $AB$  的长，从而得出结果。

解：连接  $BD$ ，与  $AC$  交于点  $F$ 。

$\because$  点  $B$  与  $D$  关于  $AC$  对称，

$\therefore PD=PB$ ，

$\therefore PD+PE=PB+PE=BE$  最小。

$\because$  正方形  $ABCD$  的面积为 12，

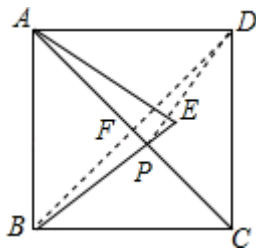
$\therefore AB=2\sqrt{3}$ 。

又  $\because \triangle ABE$  是等边三角形，

$\therefore BE=AB=2\sqrt{3}$ 。

故所求最小值为  $2\sqrt{3}$ 。

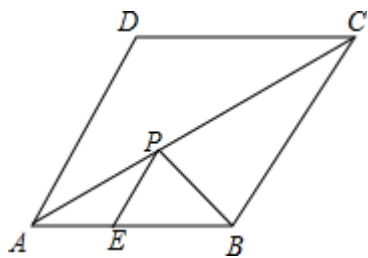
故答案为：  $2\sqrt{3}$ 。



**总结提升：**此题主要考查轴对称 - - 最短路线问题，要灵活运用对称性解决此类问题。

## （2）两动一定模型

6. 如图，在菱形  $ABCD$  中， $AB=2$ ， $\angle DAB=60^\circ$ ， $P$ ， $E$  分别是线段  $AC$ ， $AB$  上的动点， $PE+PB$  的最小值为（ ）



- A. 1.5      B.  $\sqrt{2}$       C. 2      D.  $\sqrt{3}$

**思路引领：**由菱形的性质，找出  $B$  点关于  $AC$  的对称点  $D$ ，连接  $DE$ ，则  $DE$  就是  $PE+PB$  的最小值，再由勾股定理可求出  $DE$ 。

**解：**连接  $DE$ 、 $BD$ ，

由菱形的对角线互相垂直平分，可得  $B$ 、 $D$  关于  $AC$  对称，则  $PD=PB$ ，

$\therefore PE+PB=PE+PD=DE$ ，

即  $DE$  就是  $PE+PB$  的最小值，

$\because \angle BAD=60^\circ$ ， $AD=AB$ ，

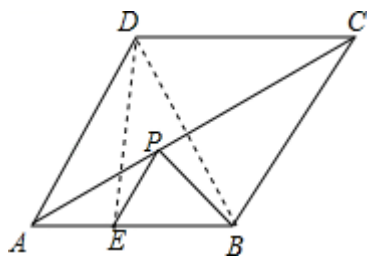
$\therefore \triangle ABD$  是等边三角形，

$\because AE=BE$ ，

$\therefore DE \perp AB$ （等腰三角形三线合一的性质），

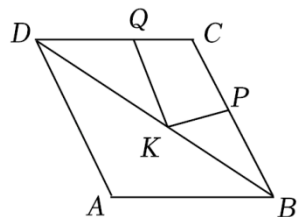
在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中， $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ 。

故选：D。



**总结提升：**此题是轴对称 - 最短路线问题，熟悉菱形的基本性质及两点之间线段最短的知识是解决本题的关键。

7. （2022 春•合肥期末）如图，在菱形  $ABCD$  中， $AB=2$ ， $\angle A=120^\circ$ ，点  $P$ 、 $Q$ 、 $K$  分别为线段  $BC$ ， $CD$ ， $BD$  上的任意一点，则  $PK+QK$  的最小值为（ ）



- A. 1      B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D.  $\sqrt{3}+1$

**思路引领：**作  $P$  点关于  $BD$  的对称点  $P'$ ，过  $P'$  作  $P'Q \perp CD$  交于点  $Q$ ，交  $BD$  于点  $K$ ，连接  $KP$ ，当  $P'$ 、 $K$ 、 $Q$  三点共线时， $PK+QK$  的值最小，最小值为  $CD$  边上的高。

**解：**作  $P$  点关于  $BD$  的对称点  $P'$ ，过  $P'$  作  $P'Q \perp CD$  交于点  $Q$ ，交  $BD$  于点  $K$ ，连接  $KP$ ，

$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形，

$\therefore P'$  在  $AB$  上，

由对称性可知， $PK=P'K$ ，

$\therefore PK+QK=P'K+KP' \geq P'Q$ ，

当  $P'$ 、 $K$ 、 $Q$  三点共线时， $PK+QK$  的值最小，最小值为  $CD$  边上的高，

$\because \angle DAB=120^\circ$ ，

$\therefore \angle ADC=60^\circ$ ，

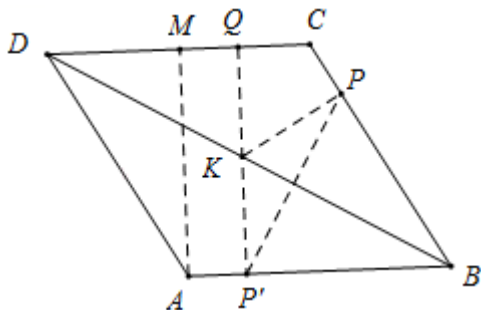
过点  $A$  作  $AM \perp CD$  交于点  $M$ ，

$\because AD=2$ ，

$\therefore AM=AD \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

$\therefore PK+KQ$  的最小值为  $\sqrt{3}$ ，

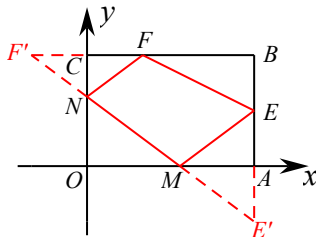
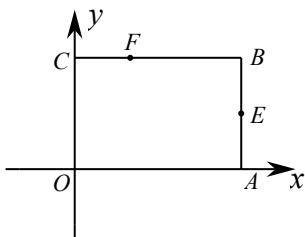
故选： $B$ 。



**总结提升：**本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短距离的方法，菱形的性质，直角三角形的性质是解题的关键。

### (3) 两动两定模型

8. (如图，矩形  $OABC$  放在以  $O$  为原点的平面直角坐标系中， $A(3, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，点  $E$  是  $AB$  的中点，点  $F$  在  $BC$  边上，且  $CF=1$ ，若  $M$  为  $x$  轴上的动点， $N$  为  $y$  轴上的动点，则四边形  $MNFE$  的周长最小值是\_\_\_\_\_。



答案:  $5+\sqrt{5}$

解: 由图可得:  $E(3, 1)$ ;  $F(1, 2)$  如图, 作点  $E$  关于  $x$  轴的对称点  $E'$ ,

作点  $F$  关于  $y$  轴的对称点  $F'$ , 连接  $E'F'$ , 分别与  $x$  轴、 $y$  轴交于点  $M$ 、 $N$ , 连接  $FN$ 、 $NM$ 、 $ME$ ,

此时四边形  $MNFE$  的周长最小.  $\therefore E'(3, -1)$ ,  $F'(-1, 2)$ ,

设直线  $E'F'$  的解析式为  $y=kx+b$ , 有  $\begin{cases} 3k+b=-1 \\ -k+b=2 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{5}{4} \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线  $E'F'$  的解析式为  $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ,  $\therefore M$  点为  $(\frac{5}{3}, 0)$ ,  $N$  点为  $(0, \frac{5}{4})$ .

$\therefore E$  与  $E'$  关于  $x$  轴对称,  $F$  与  $F'$  关于  $y$  轴对称,  $\therefore NF=NF'$ ,  $ME=ME'$ ,  $F'B=4$ ,  $E'B=3$ .

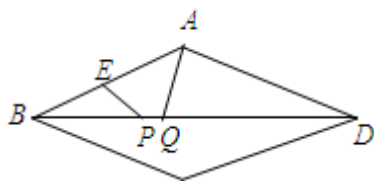
在  $Rt\triangle BE'F'$  中,  $F'E'=\sqrt{F'B^2+E'B^2}=\sqrt{16+9}=5$ .  $\therefore FN+NM+ME=F'N+NM+ME'=F'E'=5$ .

在  $Rt\triangle BEF$  中,  $EF=\sqrt{BE^2+BF^2}$ .  $\therefore FN+NM+ME+EF=5+\sqrt{5}$ ,

即四边形  $MNFE$  的周长最小值是  $5+\sqrt{5}$ . 故答案为:  $5+\sqrt{5}$

#### (4) 造桥选址模型

9. 如图, 已知菱形  $ABCD$  的边长为 10,  $E$  为  $AB$  中点, 对角线  $BD$  上有两个动点  $P$ ,  $Q$  总保持  $PQ=2$ , 若  $BD=16$ , 则四边形  $AEPQ$  的周长最小值为 ( )



- A. 16                      B. 21                      C.  $7+\sqrt{85}$                       D.  $7+\sqrt{61}$

**思路引领:** 将菱形  $ABCD$  放置在平面直角坐标系中, 使得  $B$  为原点,  $BD$  在  $x$  的正半轴上, 根据题意得出  $A$ 、 $B$ 、 $E$  三点的坐标, 将  $A$  平行向左移动 2 个单位到  $A'$  点, 作  $A'$  关于  $x$  轴的对称点  $F$ , 则  $F(6, -6)$ , 连  $EF$ , 交  $x$  轴于点  $P$ , 在  $x$  轴上向正方向上截取  $PQ=2$ , 此时四边形  $AEPQ$  的周长最小,  $AQ+EP=A'P+EP=FP+EP=EF$ , 由此即可得出结论.

解: 如图所示:

将菱形  $ABCD$  放置在平面直角坐标系中, 使得  $B$  为原点,  $BD$  在  $x$  的正半轴上,

$\therefore$  菱形  $ABCD$  的边长是 10, 对角线  $BD=16$ , 点  $E$  是  $AB$  的中点,

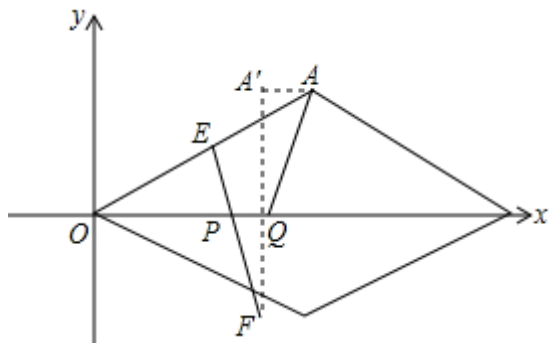
$\therefore A(8, 6)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $E(4, 3)$ , 将  $A$  平行向左移动 2 个单位到  $A'$  点, 则  $A'(6, 6)$ , 作  $A'$  关于  $x$  轴的对称点  $F$ , 则  $F(6, -6)$ , 连  $EF$ , 交  $x$  轴于点  $P$ , 在  $x$  轴上向正方向上截取  $PQ=2$ ,

此时, 四边形  $AEPQ$  的周长最小,

$$\because AE = \frac{AB}{2} = 5, PQ = 2, AQ + EP = A'P + EP = FP + EP = EF,$$

$$\text{四边形} AEPQ \text{ 的周长} = 5 + 2 + \sqrt{(4-6)^2 + (3+6)^2} = 7 + \sqrt{85}.$$

故选：C.



**总结提升：** 本题考查的是轴对称 - 最短路线问题，根据题意作出辅助线是解答此题的关键.

### 类型三 十字架模型

10. (2021 春·淮南期中) 数学活动：探究正方形中的“十字架”

①猜想：如图 1，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$ 、 $F$  分别在  $CD$ 、 $AD$  边上，且  $BF \perp AE$ ，猜想线段  $AE$  与  $BF$  之间的数量关系：\_\_\_\_\_.

②探究：如图 2，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别在  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $AD$  边上，且  $EG \perp HF$ ，此时线段  $HF$  与  $EG$  相等吗？如果相等请给出证明，如果不相等请说明理由.

③应用：如图 3，将边长为 4 的正方形纸片  $ABCD$  折叠，使点  $A$  落在  $CD$  边的中点  $E$  处，点  $B$  落在点  $F$  处，折痕为  $MN$ ，则线段  $MN$  的长为  $2\sqrt{5}$ .

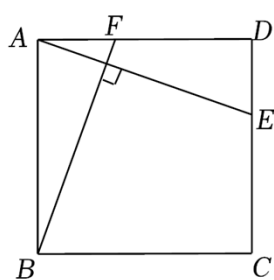


图1

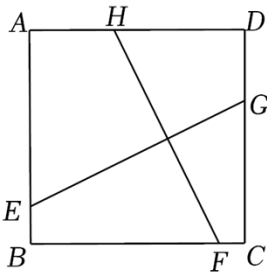


图2

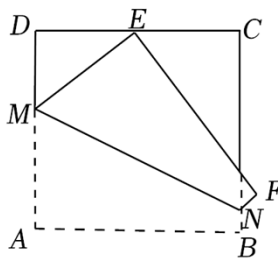


图3

**思路引领** ①设  $AE$  交  $BF$  于点  $P$ ，由四边形  $ABCD$  是正方形得  $AD = BA$ ， $\angle D = \angle BAF = 90^\circ$ ，由  $BF \perp AE$  得  $\angle APB = 90^\circ$ ，根据同角的余角相等可证明  $\angle DAE = \angle ABF$ ，即可证明  $\triangle DAE \cong \triangle ABF$ ，得  $AE = BF$ ；

②作  $AQ \parallel FH$  交  $BC$  于点  $Q$ ，作  $DR \parallel EG$  交  $AB$  于点  $R$ 、交  $AQ$  于点  $P$ 、交  $HF$  于点  $K$ ，则四边形  $AQFH$  是平行四边形，四边形  $DREG$  是平行四边形，所以  $AQ = HF$ ， $DR = EG$ ，再证明  $AQ \perp DR$ ，则  $AQ = DR$

---

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/186222051124010223>