本册综合测试（提升）

一、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，8 题共 40 分)

1．（2022·四川省）函数 $f\left(x\right)=x^3+2x-a$ 的单调减区间是（　）

A．$\left(-\infty,-2\right)$　　B．$\left(-2,+\infty\right)$　　C．$\left(-\frac{2}{3},0\right)$　　D．以上都不对

2．（2023·山东省实验中学）若将 2 至 2022 这 2021 个整数中能被 3 除余 2 且被 7 除余 2 的数按由小到大的顺序排成一列，则此数列的项数是（　）

A．95　　B．96　　C．97　　D．98

3．（2022·广东）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，且 $a_2=2$，$a_3\cdot a_5=16$，则 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=$（　）

A．2^n-2　　B．$2^{n+1}-2$　　C．2^n-1　　D．$2^{n+1}-1$

4．（2022·江苏）已知各项均为正数的等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=14,a_3=8$，则 $\frac{a_7+a_{11}}{a_5+a_9}$ 的值为（　）

A．4　　B．$\frac{4}{9}$　　C．2　　D．$\frac{2}{3}$

5．（2022·全国·安阳市第二中学模拟预测（理））已知函数 $f\left(x\right)=x^3-\frac{f'\left(1\right)}{2}\cdot\ln x+3$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(e,f\left(e\right)\right)$ 处的切线斜率为（　）.

A．$e^2-\frac{1}{2e}$　　B．$3e^2-\frac{1}{2e}$　　C．$e^2-\frac{1}{e}$　　D．$3e^2-\frac{1}{e}$

6．（2022·河南商丘）已知 $ab>0$，若 3 是 $9^{\frac{1}{a}}$ 与 $3^{\frac{4}{b}}$ 的等比中项，则 $a+b$ 的最小值为（　）

A．$3+2\sqrt{2}$　　B．7　　C．$2+2\sqrt{5}$　　D．9

7．（2022·重庆）已知函数 $f\left(x\right)=x^3+4x$，若过点 $A\left(-1,a\right)$ 能作三条直线与 $f\left(x\right)$ 的图像相切，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left(-4,5\right)$　　B．$\left[-5,+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,-4\right)$　　D．$\left(-5,-4\right)$

8．（2023·广东广州）设$a=0.1$，$b=\sin 0.1$，$c=1.1\ln 1.1$，则a,b,c的大小关系正确的是（　　）

A．$b<c<a$　　B．$b<a<c$　　C．$a<b<c$　　D．$a<c<b$

二、多选题（每题至少有两个选项为正确答案，少选且正确得 2 分，每题 5 分。4 题共 20 分）

9．（2022·湖南·双峰县第一中学高二期中）已知S_n是等比数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和，S_3，S_9，S_6成等差数列，则下列结论正确的是（　　）

A．$a_2+a_5=2a_8$　　B．$a_3+a_6=2a_9$

C．$a_8^2=a_2\cdot a_5$　　D．$a_9^2=a_3\cdot a_6$

10．（2022·广东·佛山一中）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$，记数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，则（　　）

A．$a_2=\dfrac{3}{2}$　　B．$S_{3n+1}-S_{3n}=-\dfrac{1}{2}$

C．$a_na_{n+1}a_{n+2}=-1$　　D．$S_{19}=22$

11．（2022·福建·莆田一中高二期中）关于函数$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，下列结论正确的是（　　）

A．函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$　　B．函数$f(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增

C．函数$f(x)$的最小值为e，没有最大值　　D．函数$f(x)$的极小值点为e

12．（2022·辽宁·沈阳二中）已知函数$f\left(x\right)=\left(x^2-2x\right)\mathrm{e}^x$，关于$f\left(x\right)$的性质，以下四个结论中正确的是（　　）

A．$f\left(x\right)$是奇函数　　B．函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,2\right)$上是增函数

C．$f\left(x\right)$有两个零点　　D．函数$f\left(x\right)$在$x=\sqrt{2}$处取得最小值

三、填空题(每题 5 分，4 题共 20 分)

13．（2023·广东广州）如图，北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块，已知每层环数相同，且三层共有扇面形石板（不含天心石）3402块，则中层有扇面形石板_________块

14．（2022·四川泸州）已知函数 $f(x)=a\ln x-x+\frac{1}{x}$ 存在极值点，则实数 a 的取值范围是_____________.

15．（2022·上海中学高二期中）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{11}+a_{12}+a_{13}>0$，$a_{10}+a_{15}<0$，记 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则当 $S_nS_{n+1}<0$ 时，n 的取值为______.

16．（2022·天津市第七中学）已知 $f(x)=\begin{cases}x+3, x\le 1\\ -x^2+2x+3, x>1\end{cases}$，则使 $f(x)-e^x-m\le 0$ 恒成立的 m 的范围是

______ .

四、解答题（17 题 10 分，其余每题 12 分，6 题共 70 分）

17．（2023·广东广州）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=2S_n+9\left(n\in N^*\right)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记 $b_n=\log_3 a_n$，证明：$\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}<\frac{1}{2}$.

18．（2022·上海市建平中学）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1.a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数}\\a_n+2, n\text{为偶数}\end{cases}$，记$b_n=a_{2n}$，

(1)写出数列$\left\{a_n\right\}$的前 4 项a_1,a_2,a_3,a_4；

(2)记$b_n=a_{2n}$，判断数列$\left\{b_n\right\}$是否为等差数列，并说明理由；

(3)求$\left\{a_n\right\}$的前 20 项和.

19．（2022·四川省隆昌市第七中学）已知函数$f\left(x\right)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-2x+\frac{3}{2}\left(a\geq 0\right)$.

(1)当$a=\frac{3}{4}$时，求函数$f\left(x\right)$的极值；

(2)若$f\left(x\right)$有两个极值点x_1,x_2，证明：$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)<0$.

20．（2022·上海市金汇高级中学）在平面直角坐标系中，O为原点，两个点列A_1、A_2、A_3、$\cdots$ 和B_1、B_2、B_3、$\cdots$ 满足：①$A_1(5,0)$，$A_2(4,0)$，$\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{A_nA_{n+1}}(n\in \mathrm{N}^*)$；②$B_1(1,1)$，$\overrightarrow{B_nB_{n+1}}=(1,1)(n\in \mathrm{N}^*)$.

(1)求点A_3和B_3的坐标；

(2)求向量$\overrightarrow{OA_n}$、$\overrightarrow{OB_n}$的坐标．

21．（2022·山东·邹平市第一中学）已知三次函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}\left(2a-1\right)x^2-2x-\frac{1}{2}$.

(1)当$a=3$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程，

(2)讨论$y=f\left(x\right)$的单调性.

22．（2022·四川省隆昌市第七中学）已知函数$f\left(x\right)=ax^3-bx^2+b-a\left(a>0\right)$.

(1)若$a=b$，曲线$y=f\left(x\right)$在$x=x_0$处的切线过点$\left(1,0\right)$，求x_0的值；

(2)若$a>b$，求$f\left(x\right)$在区间$\left[0,1\right]$上的最大值.

本册综合测试（提升）

二、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，8 题共 40 分)

1．（2022·四川省）函数 $f\left(x\right)=x^{3}+2x-a$ 的单调减区间是（　）

A．$\left(-\infty,-2\right)$　　B．$\left(-2,+\infty\right)$　　C．$\left(-\frac{2}{3},0\right)$　　D．以上都不对

答案：D

【解析】由题知，$f\left(x\right)=x^{3}+2x-a,x\in\mathbf{R}$，

所以 $f'\left(x\right)=3x^{2}+2\geq2$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，

所以 $f\left(x\right)=x^{3}+2x-a$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上单调递增，

函数 $f\left(x\right)=x^{3}+2x-a$ 无单调减区间，

故选：D.

2．（2023·山东省实验中学）若将 2 至 2022 这 2021 个整数中能被 3 除余 2 且被 7 除余 2 的数按由小到大的顺序排成一列，则此数列的项数是（　）

A．95　　B．96　　C．97　　D．98

答案：C

【解析】由题意，3 与 7 的最小公倍数为 21，被 3 除余 2 且被 7 除余 2 的数的个数即为被 21 除余 2 的个数，又 $2022=21\times96+6$，2 至 2022 这 2021 个整数中被 21 除余 2 的数的个数为：$96+1=97$.

故选：C

3．（2022·广东）已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_2=2$，$a_3\cdot a_5=16$，则 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=$（　）

A．2^n-2　　B．$2^{n+1}-2$　　C．2^n-1　　D．$2^{n+1}-1$

答案：B

【解析】$\because\{a_n\}$ 为等比数列，故 $\{a_n^2\}$ 也为等比数列，

由 $a_3\cdot a_5=a_4^2=16$，又 $\because a_2=2$，$\therefore\{a_n^2\}$ 的公比满足 $q^4=\frac{a_4^2}{a_2^2}=4$，则 $q^2=2$，

而 $a_2=a_1q=2$，平方得 $a_1^2q^2=4$，$a_1^2=2$，

$\therefore\{a_n^2\}$ 是以 $a_1^2=2$ 为首项，2 为公比的等比数列，其前 n 项和

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^{n+1}-2.$$

故选：B.

4.（2022·江苏）已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3=14,a_3=8$，则$\dfrac{a_7+a_{11}}{a_5+a_9}$的值为（　）

A．4　　　　B．$\dfrac{4}{9}$　　　　C．2　　　　D．$\dfrac{2}{3}$

答案：A

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

则$S_3=a_1+a_2+a_3=\dfrac{8}{q^2}+\dfrac{8}{q}+8=14$，得$3q^2-4q-4=0$，

解得$q=2$或$q=-\dfrac{2}{3}$（舍），

所以$\dfrac{a_7+a_{11}}{a_5+a_9}=\dfrac{a_5q^2+a_9q^2}{a_5+a_9}=q^2=4$.

故选：A.

5.（2022·全国·安阳市第二中学模拟预测（理））已知函数$f(x)=x^3-\dfrac{f'(1)}{2}\cdot\ln x+3$，则曲线$y=f(x)$在$(e,f(e))$处的切线斜率为（　）.

A．$e^2-\dfrac{1}{2e}$　　　　B．$3e^2-\dfrac{1}{2e}$　　　　C．$e^2-\dfrac{1}{e}$　　　　D．$3e^2-\dfrac{1}{e}$

答案：D

【解析】依题意，$f'(x)=3x^2-\dfrac{f'(1)}{2x}$，令$x=1$，

故$f'(1)=3-\dfrac{f'(1)}{2}$，解得$f'(1)=2$，故$f'(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}$，故$f'(e)=3e^2-\dfrac{1}{e}$.

故选：D.

6.（2022·河南商丘）已知$ab>0$，若3是$9^{\frac{1}{a}}$与$3^{\frac{4}{b}}$的等比中项，则$a+b$的最小值为（　）

A．$3+2\sqrt{2}$　　　　B．7　　　　C．$2+2\sqrt{5}$　　　　D．9

答案：A

【解析】由题意得$3^2=9^{\frac{1}{a}}\times3^{\frac{4}{b}}$，即$9=9^{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}$，所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$，又$ab>0$，所以$a>0$，$b>0$，

所以$a+b=(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geq3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{b}$，即$a=\sqrt{2}+1$，$b=2+\sqrt{2}$时等号成立．故$a+b$的最小值为$3+2\sqrt{2}$.

故选：A

7.（2022·重庆）已知函数$f(x)=x^3+4x$，若过点$A(-1,a)$能作三条直线与$f(x)$

的图像相切，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-4,5)$　　B．$[-5,+\infty)$　　C．$(-\infty,-4)$　　D．$(-5,-4)$

答案：D

【解析】由已知：$f(x)=x^3+4x$，故 $f'(x)=3x^2+4$，设切点为 (m,m^3+4m)

根据导数的几何意义，知切线斜率为 $k=3m^2+4$，切线方程为

$y-(m^3+4m)=(3m^2+4)(x-m)$，

将 A 点坐标代入切线方程可得

$a-(m^3+4m)=(3m^2+4)(-1-m)$ 化简可得

$a=m^3+4m+(3m^2+4)(-1-m)=-2m^3-3m^2-4$

即函数 $g(x)=a$ 与函数 $h(m)=-2m^3-3m^2-4$ 有三个不同的交点.

故 $h'(m)=-6m^2-6m$，

当 $m\in(-\infty,-1)$ 时，$h'(m)<0$，函数 $h(m)=-2m^3-3m^2-4$ 单调递减；

当 $m\in(-1,0)$ 时，$h'(m)>0$，函数 $h(m)=-2m^3-3m^2-4$ 单调递增；

当 $m\in(0,+\infty)$ 时，$h'(m)<0$，函数 $h(m)=-2m^3-3m^2-4$ 单调递减.

则当 $m=-1$ 时，$h(m)=-2m^3-3m^2-4$ 有极小值 $h(-1)=-5$，

当 $m=0$ 时，$h(m)=-2m^3-3m^2-4$ 有极大值 $h(0)=-4$.

所以 a 的取值范围为 $a\in(-5,-4)$.

故选：D.

8．（2023·广东广州）设 $a=0.1$，$b=\sin0.1$，$c=1.1\ln1.1$，则 a,b,c 的大小关系正确的是（　）

A．$b<c<a$　　B．$b<a<c$　　C．$a<b<c$　　D．$a<c<b$

答案：B

【解析】令函数 $f(x)=\sin x-x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=\cos x-1<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递减，

则当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)<f(0)$，即 $\sin x<x$，因此 $\sin0.1<0.1$，即 $b<a$；

令函数 $g(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$，$0\le x<1$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)=\ln(1+x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

则当 $0<x<1$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $(1+x)\ln(1+x)>x$，因此 $0.1<1.1\ln1.1$，即 $a<c$，

所以 a,b,c 的大小关系正确的是 $b<a<c$.