

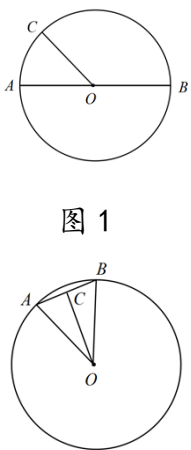
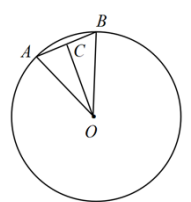
27.2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系



1. 经历探索圆的中心对称性和旋转不变性的过程，体会利用旋转来研究圆的性质
2. 理解圆心角的概念，掌握圆心角定理
3. 理解 1 的弧的概念，明确圆心角的度数与它所对的弧的度数之间的关系
4. 掌握圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系，并会运用它们之间的相互关系解决简单的几何问题



知识点一 圆心角、弧、弦、弦心距等的概念

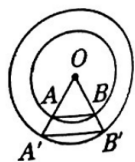
名称	内容	特别说明	图示
圆心角	以圆心为顶点的角. 如图 1 中的 $\angle AOC$	没有特别说明时,本章中的 圆心角通常是指大于 0° 且小于 180° 的角	
弦	联结圆上任意两点的线段. 如图 2 中弦 AB		
直径	过圆心的弦. 如图 1 中 AB	圆的直径是弦	
圆弧	圆上任意两点之间的部分，简称弧. 如图 1 中弧 AC, 记作 $\widehat{AC}$		
半圆	圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条 弧都叫做半圆. 如图 1 中半圆 AB	半圆所对的圆心角是一个平角	
优弧	大于半圆的弧. 如图 1 中 $\widehat{ABC}$		
劣弧	小于半圆的弧. 如图 1 中 $\widehat{AC}$		
弦心距	圆心到弦的距离，即圆心到弦的垂线段的长. 如图 2, 垂线段 OC 的长是弦 AB 的弦心距	弦心距是“距离”，可通过从圆心作弦的垂线段将弦心距用图形表示出来，表述“这一垂线段表示弦心距”	
等弧	能够重合的两条弧	“两条弧相等”是指“两弧能够重合”，而不仅仅指两条弧的长度相等	

等圆	半径长相等的两个圆，即能够重合的两个圆	等圆可看作同一个圆移动到不同的位置时的图形
----	---------------------	-----------------------

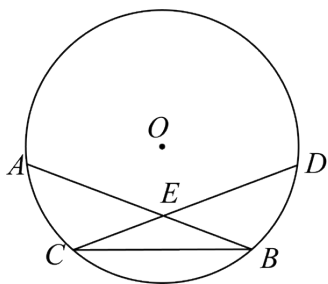
注意：

(1) “等弧”是指能够重合的弧，只有在同圆或等圆中才有等弧. 因为在一个圆中一条弦所对的弧有两条，所以由“弦相等”得出“弧相等”，这里的“弧相等”指的是对应的劣弧与劣弧相等、优弧与优弧相等

(2) 不能忽略“在同圆或等圆中”这个前提，如果丢掉这个前提，即使圆心角相等，所对的弧、弦也不一定相等. 如图所示，两个圆的圆心相同， $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{A'B'}$ 对应同一个圆心角，但 $\widehat{AB} \neq \widehat{A'B'}$ ， $AB \neq A'B'$.



即学即练 1 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 与弦 CD 相交于点 E ，且 $AB = CD$.



求证： $CE = BE$.

【答案】 见解析

【分析】 由弧、弦、圆心角的关系进行证明，结合等角对等边，即可得到结论成立.

【详解】 证明： $\because AB = CD$,

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \widehat{AB} - \widehat{BC} = \widehat{CD} - \widehat{BC},$$

$$\text{即 } \widehat{AC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore BE = CE.$$

【点睛】 本题考查了弧、弦、圆心角的关系，解题的关键是掌握所学的知识进行证明.

知识点二 圆的旋转不变性

1. 圆具有旋转不变性

由于圆上所有的点到圆心的距离都相等，因此把圆绕圆心旋转任意一个角度，所得的图形都和原图形重合

2. 中心对称图形

在平面内，把一个图形绕某个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做它的对称中心。

注意：

圆中的概念辨析

- (1) 直径与弦的关系：直径是弦，且是圆中最长的弦，但弦不一定是直径；
- (2) 等弧的概念：等弧不只是指两条弧的长度相等，而是指两条弧能够重合，即长度相等的两条弧不一定是等弧；
- (3) 半圆与弧的关系：半圆既不是劣弧也不是优弧，半圆是弧，但弧不一定是半圆。

知识点三 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及其推论

1. 定理：

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

2. 推论：

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧(或优弧)、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等。

注意：

在应用圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及其推论解决问题时，一定要注意“在同圆或等圆中”这个前提条件，否则结论不一定成立。

3. 1° 的弧

在一个圆中，我们把 1° 圆心角所对的弧叫做 1° 的弧

4. 圆心角度数与它所对弧的度数的关系

n° 的圆心角所对的弧就是 n° 的弧

(1) 相等的弧(即能够重合的弧)与度数相等(或长度相等)的弧的含义是不同的，只有弧的度数和弧的长度都相等的两条弧才是等弧，即等弧一定有相同的度数且等弧必须在同圆或等圆中存在，而相同度数的弧不一定是等弧。

(2) 圆心角的度数与它所对的弧的度数相等，不能写成 $\angle AOB = \widehat{AB}$ ，正确写法是 $\angle$

AOB 的度数等于 $\widehat{AB}$ 的度数。

即学即练 1 有下列说法：①同圆中，所有的半径都相等；②弦是直径；③半径相等的两个半圆是等弧；④长度相等的两条弧是等弧；⑤半圆是弧，但弧不一定是半圆．其中正确的说法有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【分析】利用圆的有关定义及性质分别进行判断后即可确定正确的选项．

【详解】解：①同圆中，所有的半径都相等，原说法正确，符合题意；

②弦不一定是直径，原说法错误，不符合题意；

③半径相等的两个半圆是等弧，原说法正确，符合题意；

④能够完全重合的两条弧是等弧，原说法错误，不符合题意；

⑤半圆是弧，但弧不一定是半圆，原说法正确，符合题意．

故选：C．

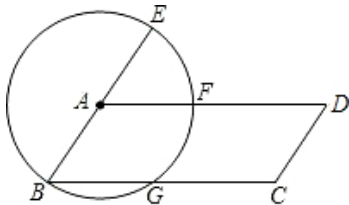
【点睛】本题考查了圆的认识及圆的有关定义，解题的关键是了解圆的有关概念，难度不大．



(1) 半圆既不是优弧，也不是劣弧．

(2) 等弧必须具备两个条件，一是两弧所在圆的半径相等，二是弧的长度相等，只有在同圆或等圆中才存在等弧，在大小不等的两个圆中不存在等弧，因此在判断两弧是否为等弧时，首先要看两弧所在的圆是否为同圆或等圆，然后再看弧的长度是否相等．

即学即练 2 如图，平行四边形 ABCD 中，以 A 为圆心，AB 为半径的圆分别交 AD，BC 于 F，G，延长 BA 交圆于 E．求证： $\widehat{EF} = \widehat{FG}$ ．



【答案】证明见解析．

【分析】连接 AG，由 $AB=AG$ ，推出 $\angle ABG=\angle AGB$ ，根据平行线性质的推出 $\angle EAD=\angle ABG$ ， $\angle DAG=\angle AGB$ ，推出 $\angle EAF=\angle FAG$ 即可．

【详解】连接 AG，

$\because A$ 为圆心， $\therefore AB=AG$ ，

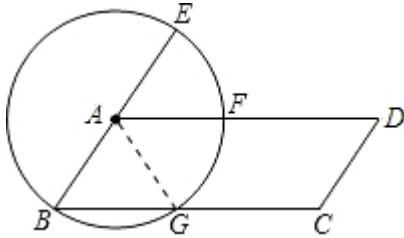
$$\therefore \angle ABG = \angle AGB,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \angle AGB = \angle DAG, \angle EAD = \angle ABG,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle EAD,$$

$$\therefore \widehat{EF} = \widehat{FG}.$$



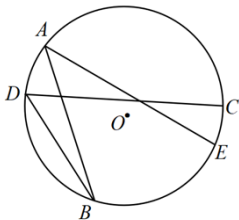
【点睛】本题考查了平行四边形性质，平行线性质的，弧、弦、圆心角的关系等，解题的关键是求出 $\angle EAF = \angle FAG$.

知识点四 圆周角、圆周角定理及其推论

1. 圆周角必须满足的两个条件

- (1) 角的顶点在圆上;
- (2) 角的两边都与圆相交.

如图, $\angle BAE$ 、 $\angle BDC$ 都是圆周角.



2. 圆周角定理:

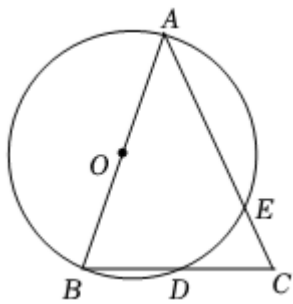
一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

3. 圆周角定理的重要推论:

- (1) 同弧或等弧所对的圆周角相等.
- (2) 半圆(或直径)所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径.

即学即练 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径作圆 O , 交 BC 于点 D , 交 AC 于点 E .

- (1) 求证: $BD = CD$.
- (2) 若弧 $DE = 50^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数.



【答案】（1）证明过程见解析；（2） 65°

【分析】（1）连接 AD，根据直径所对的圆周角是直角，得到 $\angle ADB = 90^\circ$ ，得到 $AD \perp BC$ ，即可得解；

（2）连接 OE，OD，得到 $\angle DOE = 50^\circ$ ，得到 $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOE = 25^\circ$ ，即可得解；

【详解】（1）证明：连接 AD.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \perp BC$ ，

$\because AB = AC$ ，

$\therefore BD = DC$ ；

（2）解：连接 OE，OD.

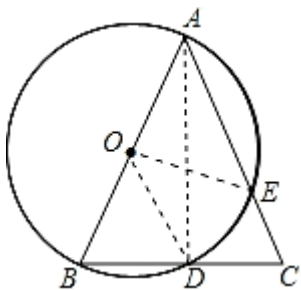
$\because \widehat{DE}$ 的度数 $= 50^\circ$ ，

$\therefore \angle DOE = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOE = 25^\circ$ ，

$\because AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle C = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.



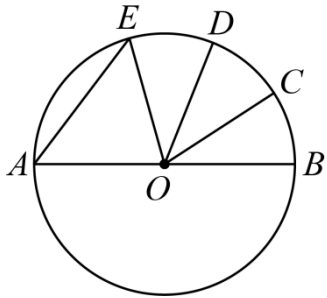
【点睛】本题主要考查了圆周角定理，等腰三角形的性质，准确计算是解题的关键.



典例分析

题型 1 利用弧、弦、圆心角的关系求解

例 1 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E 在 $\odot O$ 上, 点 D, C 是 $\widehat{BE}$ 的三等分点, $\angle COD = 34^\circ$, 则 $\angle AEO$ 的度数是 ()



A. 51°

B. 56°

C. 68°

D. 78°

【答案】D

【分析】先根据圆心角、弧、弦的关系得到 $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 34^\circ$, 然后利用平角的定义计算 $\angle AOE$ 的度数.

【详解】解: $\because$ 点 D, C 是 $\widehat{BE}$ 的三等分点,

即 $\widehat{DE} = \widehat{CD} = \widehat{BC}$,

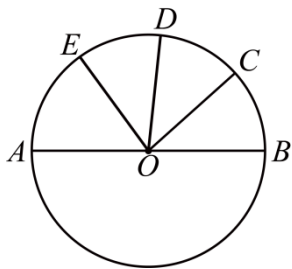
$\therefore \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 34^\circ$,

$\therefore \angle AOE = 180^\circ - 3 \times 34^\circ = 78^\circ$.

故选: D.

【点睛】本题考查了圆心角、弧、弦的关系: 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

举一反三 1 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\angle BOC = 42^\circ$, $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$, 则 $\angle AOE =$ $^\circ$.



【答案】54

【分析】根据同圆或等圆中相等的弧所对的圆心角相等即可求解.

【详解】 $\because \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$,

$\therefore \angle COD = \angle DOE = \angle BOC = 42^\circ$,

$\because AB$ 是直径,

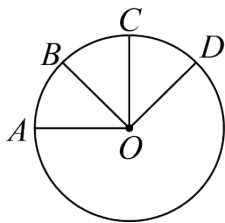
$\therefore \angle AOB = 180^\circ$,

$\therefore \angle AOE = 180^\circ - 42^\circ \times 3 = 54^\circ$,

故答案为: 54.

【点睛】此题考查了弧与圆心角的关系, 掌握在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆心角相等是解题的关键.

举一反三 2 在 $\odot O$ 中, 弧 $AC =$ 弧 BD , $\angle AOB = 45^\circ$, 求 $\angle COD$ 的度数.



【答案】 45°

【分析】根据两个圆心角所对应的弧相等, 则这两个圆心角相等解题即可.

【详解】解: $\because \widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\therefore \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC}$

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}$

$\therefore \angle AOB = \angle COD$

$\because \angle AOB = 45^\circ$

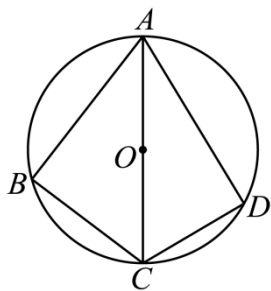
$\therefore \angle COD = 45^\circ$

故答案为: 45° .

【点睛】本题主要考查了弧、弦、圆心角间的关系, 熟练掌握以上定理是解题的关键.

题型 2 利用弧、弦、圆心角的关系求证

例 2 如图, 四边形 $ABCD$ 内接 $\odot O$, AC 平分 $\angle BAD$, 则下列结论正确的是 ()



- A. $AB = AD$ B. $BC = CD$ C. $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ D. $\angle BCA = \angle DCA$

【答案】B

【分析】根据圆心角、弧、弦的关系对各选项进行逐一判断即可.

【详解】解 A、 $\because \angle ACB$ 与 $\angle ACD$ 的大小关系不确定, $\therefore AB$ 与 AD 不一定相等, 故本选项错误;

B、 $\because AC$ 平分 $\angle BAD$, $\therefore \angle BAC = \angle DAC$, $\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD}$, $\therefore BC = CD$, 故本选项正确;

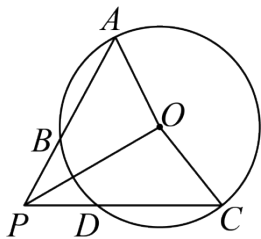
C、 $\because \angle ACB$ 与 $\angle ACD$ 的大小关系不确定, $\therefore \widehat{AB}$ 与 $\widehat{AD}$ 不一定相等, 故本选项错误;

D、 $\angle BCA$ 与 $\angle DCA$ 的大小关系不确定, 故本选项错误.

故选: B.

【点睛】本题考查的是圆心角、弧、弦的关系, 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

举一反三 1 如图, $\odot O$ 的弦 AB 、 CD 的延长线相交于点 P , 且 $AB = CD$,



(1) 求证: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$;

(2) 求证: $PB = PD$.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【分析】(1) 证 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, 则 $\widehat{AB} + \widehat{BD} = \widehat{CD} + \widehat{BD}$ 即可求证;

(2) 连接 OB, OD , 作 $OM \perp AB, ON \perp CD$, 证 $\triangle AOB \cong \triangle COD$, 进而可证 $\triangle OMP \cong \triangle ONP$, 即可求证.

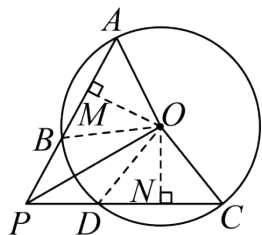
【详解】（1）证明：∵ $AB = CD$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\therefore \widehat{AB} + \widehat{BD} = \widehat{CD} + \widehat{BD}$$

$$\text{即：} \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

（2）证明：连接 OB, OD ，作 $OM \perp AB, ON \perp CD$



$$\therefore AB = CD, OA = OB = OC = OD$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$\therefore AM = BM = DN = CN, S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$$

$$\therefore OM = ON$$

$$\because \angle OMP = \angle ONP = 90^\circ, OP = OP$$

$$\therefore \triangle OMP \cong \triangle ONP$$

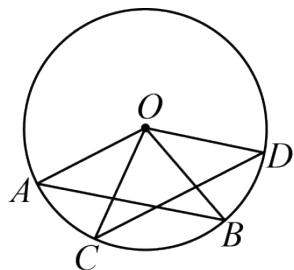
$$\therefore PM = PN$$

$$\therefore PM - BM = PN - DN$$

$$\text{即 } PB = PD$$

【点睛】本题考查了圆中“弧、弦、角”的关系、全等三角形综合，熟记相关结论进行几何推理即可。

举一反三 2 如图， AB, CD 是 $\odot O$ 的两条弦， $\angle AOC = \angle BOD$ 。求证： $AB = CD$ 。



【答案】见解析

【分析】根据 $\angle AOC = \angle BOD$ ，可得 $\angle AOB = \angle COD$ ，即可求证。

【详解】证明：∵ $\angle AOC = \angle BOD$ ，

$$\therefore \angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COB .$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD ,$$

$$\therefore AB = CD .$$

【点睛】本题主要考查了弧、弦、圆心角的关系，熟练掌握弧、弦、圆心角的关系是解题的关键.

题型3 圆心角概念辨析

例3 下列说法中，正确的是（ ）

- A. 长方体的截面形状一定是长方形 B. 各边都相等的多边形叫做正多边形
C. 三棱锥只有三个面 D. 顶点在圆心的角叫圆心角

【答案】D

【分析】根据正多边形的定义，圆心角的定义以及截一个几何体的知识逐一判断分析即可.

【详解】解：A、长方体的截面形状可能是长方形也可能是正方形、还可能是三角形，故A选项不符合题意；

B、各边都相等，各角都相等的多边形叫正多边形，故B选项不符合题意；

C、三棱锥有四个面，故C选项不符合题意；

D、顶点在圆心的角叫圆心角，结论正确，故D选项符合题意.

故选：D.

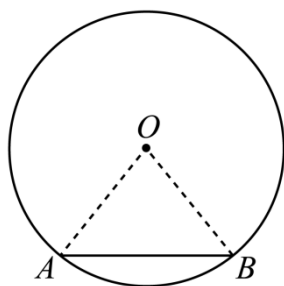
【点睛】本题考查了正多边形的定义，圆心角的定义以及截一个几何体的知识，解题的关键是掌握基本知识，属于中考常考题型.

举一反三1 直径为20cm的 $\odot O$ 中，弦 $AB=10\text{cm}$ ，则弦 AB 所对的圆心角是_____.

【答案】 60° /60度

【分析】连接 OA 、 OB ，证明 $\triangle OAB$ 为等边三角形得到 $\angle AOB=60^\circ$ 即可.

【详解】解：如图，连接 OA 、 OB ，



$\because$ 直径为 20cm ,

$\therefore OA = OB = 10\text{cm}$,

而 $AB = 10\text{cm}$,

$\therefore OA = OB = AB$,

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形,

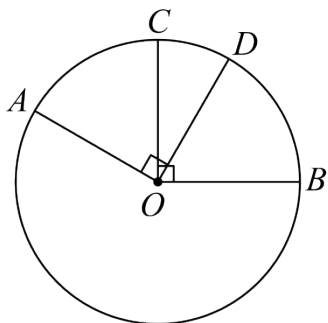
$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

即弦 AB 所对的圆心角是 60° .

故答案为: 60° .

【点睛】本题考查了圆心角, 等边三角形的判定与性质, 熟练掌握等边三角形的判定与性质是解题的关键.

举一反三 2 如图, 圆心角 $\angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$.



(1) 判断 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的数量关系, 并说明理由;

(2) 若 $\angle COD = 30^\circ$, 求 $\angle AOB$ 的度数.

【答案】(1) $\angle AOC = \angle BOD$, 见解析

(2) $\angle AOB = 150^\circ$

【分析】(1) 根据条件和 $\angle AOD = \angle AOC + \angle COD$, $\angle BOC = \angle BOD + \angle COD$ 即可求解;

(2) 根据第 (1) 问的结论和 $\angle COD = 30^\circ$ 即可求解.

【详解】(1) 解: $\angle AOC = \angle BOD$;

$\because \angle AOD = \angle AOC + \angle COD$, $\angle BOC = \angle BOD + \angle COD$, $\angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD$$

(2) 解: $\because \angle AOD = \angle AOC + \angle COD$, $\angle BOC = \angle BOD + \angle COD$, $\angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$,
 $\angle COD = 30^\circ$,

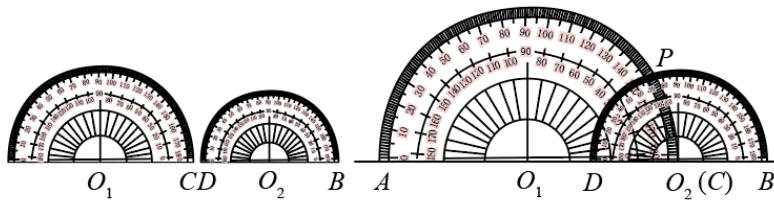
$$\therefore \angle AOC = \angle BOD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 60^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 150^\circ;$$

【点睛】本题考查了简单几何问题，灵活运用所学知识是关键.

题型 4 求圆弧的度数

例 4 如图是两个大小不同的量角器. 小量角器由于长时间使用, 某些刻度已经模糊不清. 现将两个量角器的零刻度线放在同一直线上, 使 O_2 与 C 重合 (如下图). 如果两个半圆的公共点 P 在大量角器上对应的度数为 140° , 那么在小量角器上对应的度数为 ()



A. 40°

B. 50°

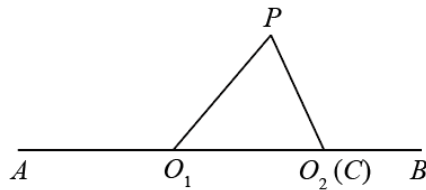
C. 60°

D. 70°

【答案】D

【分析】由题意知 $\angle AO_1P = 140^\circ$, 根据三角形外角的性质可得 $\angle AO_1P = \angle O_1PO_2 + \angle O_1O_2P$, 根据等边对等角可得 $\angle O_1PO_2 = \angle O_1O_2P$, 进而可得 $\angle O_1O_2P = \frac{1}{2} \angle AO_1P = 70^\circ$.

【详解】



由题意知 $\angle AO_1P = 140^\circ$

$$\therefore \angle AO_1P = \angle O_1PO_2 + \angle O_1O_2P = 140^\circ$$

$\because$ 量角器为半圆

$$\therefore O_1P = O_1O_2$$

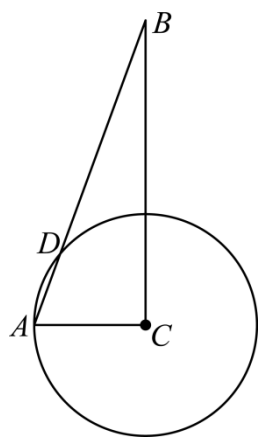
$$\therefore \angle O_1PO_2 = \angle O_1O_2P$$

$$\therefore \angle O_1 O_2 P = \frac{1}{2} \angle A O_1 P = 70^\circ$$

故选 D.

【点睛】本题考查量角器的使用、三角形外角的性质、等腰三角形的性质、圆的性质等知识，难度较小，解题的关键是读懂题意，得出小量角器上对应的度数为 $\angle O_1 O_2 P$ 的度数.

举一反三 1 如图 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ, \angle B = 20^\circ$ ，以 C 为圆心， CA 为半径的圆交 AB 于点 D ，则 $\widehat{AD}$ 的度数为 ()



A. 30°

B. 40°

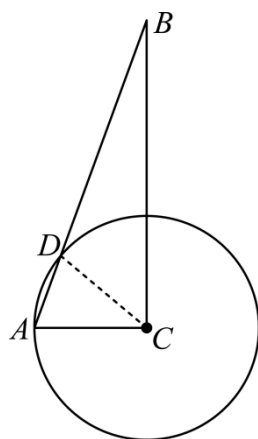
C. 45°

D. 50°

【答案】B

【分析】如图，连接 CD ，先求解 $\angle A = \angle ADC = 70^\circ, \angle ACD = 40^\circ$ ，再利用圆心角与弧之间的关系可得答案.

【详解】解：如图，连接 CD ，



$$\because \angle C = 90^\circ, \angle B = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ,$$

$$\because CD = CA,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADC = 70^\circ,$$

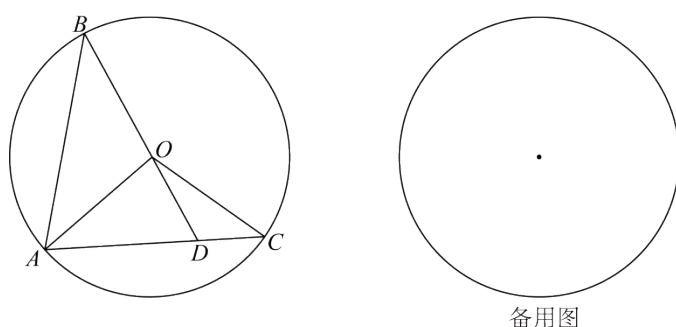
$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AD} \text{ 的度数为: } 40^\circ.$$

故选 B.

【点睛】本题考查的是直角三角形两锐角互余，圆的基本性质，圆心角与弧之间的关系，掌握“弧的度数等于它所对的圆心角的度数”是解本题的关键.

举一反三 2 如图，已知 $\odot O$ 的半径长为 1， AB 、 AC 是 $\odot O$ 的两条弦，且 $AB = AC$ ， BO 的延长线交 AC 于点 D ，连结 OA ， OC 。



(1) 求证: $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ 。

(2) 当 $BA = BD$ 时，求 $\widehat{AB}$ 的度数。

(3) 当 $\triangle OCD$ 是直角三角形时，求 B 、 C 两点之间的距离。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 108°

(3) $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{2}$

【分析】(1) 根据圆的性质可得 $OA = OB = OC = 1$ ，根据 SSS 即可证明结论；

(2) 根据全等三角形的性质和等边对等角可得 $\angle OAB = \angle OAC = \angle OBA$ ，得到 $\angle BAD = 2\angle ABD$ ，由 $BA = BD$ 可推出 $\angle BDA = \angle BAD = 2\angle ABD$ ，根据三角形的内角和定理可得 $\angle ABD = 36^\circ$ ， $\angle AOB = 108^\circ$ ，由“弧的度数等于它所对圆心角的度数”可得结论；

(3) 分两种情况：①当 $\angle ODC = 90^\circ$ 时；②当 $\angle COD = 90^\circ$ 时进行讨论即可。

【详解】(1) 解: $\because \odot O$ 的半径长为 1，

$$\therefore OA = OB = OC = 1,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOC$ 中，

$$\begin{cases} AO = AO \\ AB = AC, \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AOC \text{ (SSS)};$$

(2) 解: 由(1)知: $\triangle AOB \cong \triangle AOC$, $OA = OB = OC$,

$$\therefore \angle OAB = \angle OAC = \angle OBA,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle OAB + \angle OAC = \angle OBA + \angle OBA = 2\angle ABD,$$

$$\because BA = BD,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BAD = 2\angle ABD,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \angle BDA + \angle BAD + \angle ABD = 180^\circ, \text{ 即 } 5\angle ABD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的度数 } 108^\circ;$$

(3) ①如图, 当 $\angle ODC = 90^\circ$ 时,

$$\because BD \perp AC, \quad OA = OC = 1, \quad AB = AC,$$

$$\therefore AD = DC, \quad \angle ODA = 90^\circ,$$

$$\therefore BA = BC = AC,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

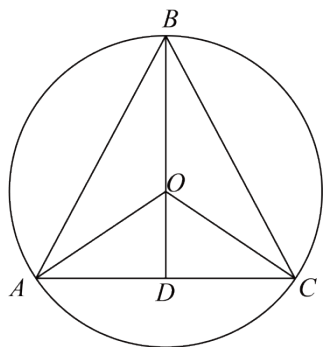
$$\text{由(1)知: } \triangle AOB \cong \triangle AOC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BC = AC = 2AD = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3};$$



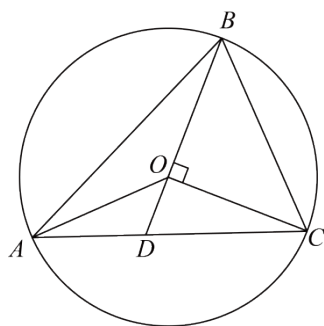
②如图，当 $\angle COD = 90^\circ$ 时，

$\because BD \perp OC$ ， $OB = OC = 1$ ，

$\therefore \triangle OBC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ；

综上所述， B 、 C 两点之间的距离 $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{2}$ 。



【点睛】本题考查圆的基本性质，垂径定理，全等三角形的判定和性质，等边对等角，三角形内角和定理，等边三角形的判定和性质，含 30° 角的直角三角形，勾股定理，弧的度数等于它所对圆心角的度数等知识，运用了分类讨论的思想。解题的关键是发现并证明三角形全等，掌握直角三角形的性质和理解“弧的度数等于它所对圆心角的度数”。

题型五 圆周角的概念辨析

例5 下列说法中，正确的是（ ）

- A. 过圆心的直线是圆的直径
- B. 直径是圆中最长的弦
- C. 相等长度的两条弧是等弧
- D. 顶点在圆上的角是圆周角

【答案】B

【分析】根据直径，弦，等弧，圆周角的定义，逐一判断即可解答。

【详解】解：A、过圆心的弦是圆的直径，故此选项不符合题意；

B、直径是圆中最长的弦，故此选项符合题意；

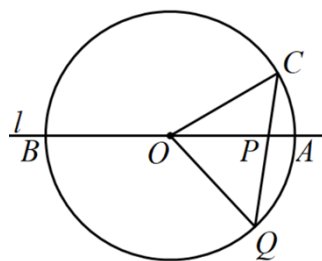
C、在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧，故此选项不符合题意；

D、顶点在圆上，两边分别与圆还有另一个交点的角是圆周角，故此选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了圆的认识，熟练掌握经过圆心的弦叫直径，连接圆上任意两点的线段叫弦，在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫等弧，顶点在圆上，两边分别与圆相交的角是圆周角是解题的关键.

举一反三 1 如图，直线 l 经过 $\odot O$ 的圆心 O ，且与 $\odot O$ 交于 A 、 B 两点，点 C 在 $\odot O$ 上，且 $\angle AOC = 30^\circ$ ，点 P 是直线 l 上的一个动点（与圆心 O 不重合），直线 CP 与 $\odot O$ 相交于另一点 Q ，如果 $QP = QO$ ，则 $\angle OCP = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 40° 、 20° 、 100°

【分析】点 P 是直线 l 上的一个动点，因而点 P 与线段 AO 有三种位置关系，在线段 AO 上，点 P 在 OB 延长线上，点 P 在 OA 的延长线上. 分这三种情况进行讨论即可.

【详解】解：①根据题意，画出图 1，

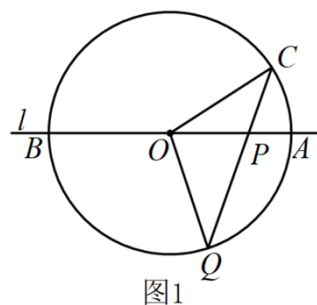


图1

在 $\triangle QOC$ 中， $OC = OQ$ ，

$\therefore \angle OQC = \angle OCP$ ，

在 $\triangle OPQ$ 中， $QP = QO$ ，

$\therefore \angle QOP = \angle QPO$ ，

又 $\because \angle AOC = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle QPO = \angle OCP + \angle AOC = \angle OCP + 30^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle OPQ \text{ 中, } \angle QOP + \angle QPO + \angle OQC = 180^\circ,$$

$$\text{即 } (\angle OCP + 30^\circ) + (\angle OCP + 30^\circ) + \angle OCP = 180^\circ,$$

$$\text{整理得, } 3\angle OCP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle OCP = 40^\circ.$$

②当 P 在线段 OA 的延长线上, 如图 2

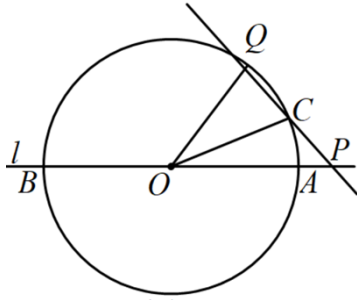


图2

$$\because OC = OQ,$$

$$\therefore \angle OQP = (180^\circ - \angle QOC) \times \frac{1}{2} \text{ ①},$$

$$\because OQ = PM,$$

$$\therefore \angle OPQ = (180^\circ - \angle OQP) \times \frac{1}{2} \text{ ②},$$

$$\text{在 } \triangle OQP \text{ 中, } 30^\circ + \angle QOC + \angle OQP + \angle OPQ = 180^\circ \text{ ③},$$

$$\text{把 ① ② 代入 ③ 得 } \angle QOC = 20^\circ, \text{ 则 } \angle OQP = 80^\circ$$

$$\therefore \angle OCP = 100^\circ;$$

③当 P 在线段 OA 的反向延长线上, 如图 3,

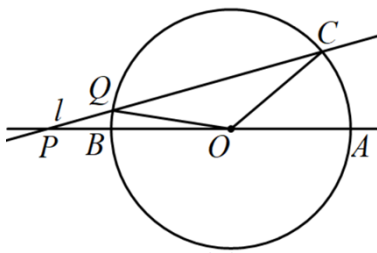


图3

$$\because OC = OQ,$$

$$\therefore \angle OCP = \angle OQC = (180^\circ - \angle COQ) \times \frac{1}{2} \text{ ①},$$

$$\because OQ = PQ,$$

$$\therefore \angle P = (180^\circ - \angle OQP) \times \frac{1}{2} \text{ ②},$$

$$\because \angle AOC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle COQ + \angle POQ = 150^\circ \text{ ③},$$

$$\therefore \angle P = \angle POQ, 2\angle P = \angle OCP = \angle OQC \text{ ④},$$

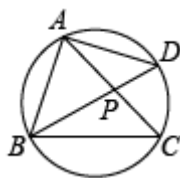
$$\text{① ② ③ ④ 联立得 } \angle P = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle OCP = 180^\circ - 150^\circ - 10^\circ = 20^\circ.$$

故答案为： 40° 、 20° 、 100° 。

【点睛】本题主要考查了圆的认识及等腰三角形等边对等角的性质，画出图形，进行分类讨论是解题的关键。

举一反三 2 如图， $\triangle ABC$ 内接于圆，弦 BD 交 AC 于点 P ，连接 AD 。下列角中， $\widehat{AB}$ 所对圆周角的是（ ）



A. $\angle APB$

B. $\angle ABD$

C. $\angle ACB$

D. $\angle BAC$

【答案】C

【分析】根据题意可直接进行求解。

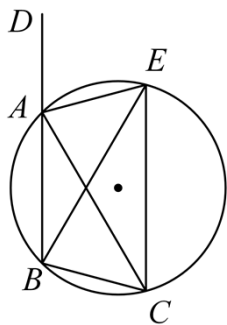
【详解】解：由图可知： $\widehat{AB}$ 所对圆周角的是 $\angle ACB$ 或 $\angle ADB$ ，

故选 C。

【点睛】本题主要考查圆周角的定义，熟练掌握圆周角是解题的关键。

题型六 圆周角定理

例 6 如图， $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DAC$ 的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E ，若 $\angle DAE = 75^\circ$ ，则 $\angle BEC$ 的度数为____度。



【答案】30

【分析】因为 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DAC$ 的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E ，所以

$\angle EAC = \angle DAE = 75^\circ$ ，则 $\angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ$ ，再结合同弧所对的圆周角是相等，则 $\angle BEC = \angle BAC = 30^\circ$ ，即可作答。

【详解】解：因为 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DAC$ 的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E ，

$$\therefore \angle EAC = \angle DAE = 75^\circ$$

$$\text{则 } \angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ,$$

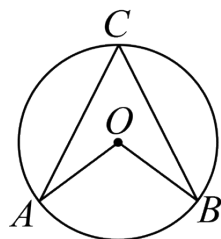
$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BC}$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BAC = 30^\circ,$$

故答案为：30

【点睛】本题考查了角平分线的定义以及圆周角性质，同弧所对的圆周角是相等，难度较小，正确掌握相关性质内容是解题的关键。

举一反三 1 如图，点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上，若 $\angle AOB = 68^\circ$ ，则 $\angle ACB$ 的度数为()



A. 34°

B. 42°

C. 54°

D. 68°

【答案】A

【分析】根据圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧所对的圆周角是圆心角的一半，求解即可。

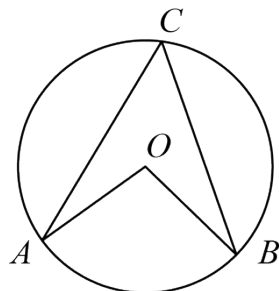
【详解】解： $\because \widehat{AB} = \widehat{AB}$,

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 68^\circ = 34^\circ,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了圆周角定理，熟练掌握圆周角定理是解题的关键。

举一反三 2 如图，点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上，若 $\angle AOB = 68^\circ$ ，则 $\angle ACB$ 的度数为 ()



A. 34°

B. 42°

C. 54°

D. 68°

【答案】A

【分析】根据圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧所对的圆周角是圆心角的一半，求解即可.

【详解】解： $\because \widehat{AB} = \widehat{AB}$

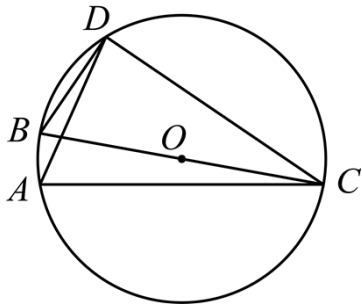
$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 68^\circ = 34^\circ,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了圆周角定理，熟练掌握圆周角定理是解题的关键.

题型七 同弧或等弧所对的圆周角相等

例7 如图， $\triangle ADC$ 内接于圆 O ， BC 是圆 O 的直径，若 $\angle A = 66^\circ$ ，则 $\angle BCD$ 等于()



A. 66°

B. 34°

C. 24°

D. 14°

【答案】C

【分析】根据同弧所对圆周角相等得到 $\angle B = \angle A = 66^\circ$ ，根据直径所对的圆周角是直角得到 $\angle BDC = 90^\circ$ ，根据直角三角形两锐角互余，得到 $\angle BCD = 24^\circ$.

【详解】解： $\because \angle A = 66^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle A = 66^\circ,$$

$\because BC$ 是圆 O 的直径，

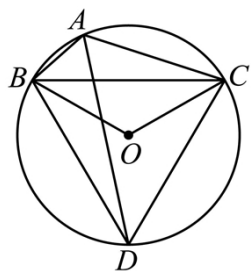
$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ.$$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了圆周角定理及推论. 熟练掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，半圆（或直径）所对的圆周角是直角，直角三角形两锐角互余，是解决问题的关键.

举一反三 1 如图, $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 半径长为 $5\sqrt{3}$, $\angle BAC = \angle BOC = 120^\circ$.



(1) 求 BC 的长.

(2) 作 $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D .

① 求证: $\triangle BDC$ 为等边三角形;

② 若 $AC = 6\sqrt{3}$, 求 AD 的长.

【答案】 (1) 15

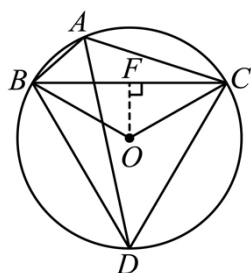
(2) ① 证明见解析; ② $12 + 3\sqrt{3}$

【分析】 (1) 过点 O 作 $OE \perp BC$ 交 BC 于点 E , 根据等边对等角和三角形内角和定理可得 $\angle BCO = \angle CBO = 30^\circ$, 根据线段垂直平分线的判定可得 OE 垂直平分 BC , 根据含 30° 角的直角三角形的性质可求得 OE 的值, 根据勾股定理即可求得 EC 的值, 即可求解;

(2) ① 根据角平分线的定义可得 $\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$, 根据同弧所对的圆周角相等可推得 $\angle CBD = \angle BCD = 60^\circ$, 根据等边三角形的判定即可证明;

② 在 AD 上取点 F 使得 $AB = AF$, 过点 C 作 $CG \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 G , 根据等边三角形的判定和性质可得 $AB = BF$, $\angle ABF = 60^\circ$, 推得 $\angle ABF = \angle CBD$, $\angle ABC = \angle FBD$, 根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle ACB = \angle ADB$, 根据全等三角形的判定和性质可得 $AC = DF = 6\sqrt{3}$, 根据直角三角形的两锐角互余求得 $\angle GCA = 30^\circ$, 根据含 30° 角的直角三角形的性质可求得 AG 的值, 根据勾股定理即可得 $CG = 9$, $BG = 12$, 即可求解.

【详解】 (1) 解: 过点 O 作 $OE \perp BC$ 交 BC 于点 E , 如图:



$$\because OB = OC, \angle BOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle CBO = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\because OE \perp BC, OB = OC,$$

$$\therefore OE \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\text{即 } BE = EC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because OE \perp BC, \angle BCO = 30^\circ,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OEC \text{ 中, } CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{15}{2},$$

$$\therefore BC = 2CE = 2 \times \frac{15}{2} = 15.$$

$$(2) \text{ ①证明: } \because AD \text{ 平分 } \angle BAC, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ,$$

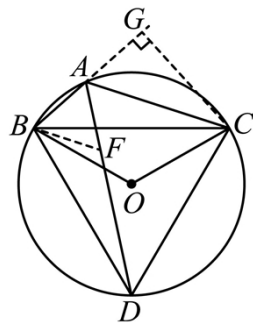
$$\because \widehat{CD} = \widehat{CD}, \widehat{BD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CBD = 60^\circ, \angle BAD = \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CBD = \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BDC \text{ 为等边三角形;}$$

$$\text{②解: 在 } AD \text{ 上取点 } F \text{ 使得 } AB = AF, \text{ 过点 } C \text{ 作 } CG \perp BA \text{ 交 } BA \text{ 的延长线于点 } G, \text{ 如图:}$$



$$\because \angle BAD = 60^\circ, AB = AF,$$

$$\therefore \triangle ABF \text{ 为等边三角形,}$$

$$\therefore AB = BF, \angle ABF = 60^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle CBD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CBD,$$

$$\text{则 } \angle ABC + \angle CBF = \angle CBF + \angle FBD,$$

故 $\angle ABC = \angle FBD$,

$\because \widehat{AB} = \widehat{AB}$,

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$,

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FBD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle ADB \\ \angle ABC = \angle FBD, \\ AB = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FBD$,

$\therefore AC = DF = 6\sqrt{3}$,

$\because \angle BAC = 120^\circ$,

$\therefore \angle GAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

又 $\because CG \perp BG$,

$\therefore \angle GCA = 90^\circ - \angle GAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore AG = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle AGC$ 中, $CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 9$,

在 $\text{Rt}\triangle BGC$ 中, $BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$,

$\therefore BA = BG - GA = 12 - 3\sqrt{3}$,

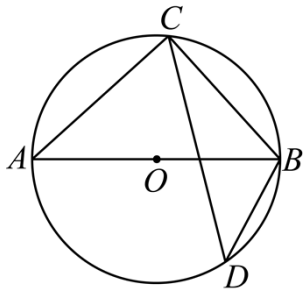
即 $AF = 12 - 3\sqrt{3}$,

故 $AD = AF + FD = 12 - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12 + 3\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了等边对等角, 三角形内角和定理, 线段垂直平分线的判定, 含 30° 角的直角三角形的性质, 勾股定理, 角平分线的定义, 同弧所对的圆周角相等, 等边三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 直角三角形的两锐角互余, 熟练掌握以上判定和性质是解题的关键.

举一反三 2 如图 AB 是 $\odot O$ 的直径, C, D 是 $\odot O$ 上的两点, 若 $\angle BCD = 28^\circ$, 则

$\angle ABD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $62^{\circ}/62$ 度

【分析】连接AD，根据AB是直径，可知 $\angle ADB = 90^{\circ}$ ，然后根据同弧所对的圆周角可得 $\angle BAD = \angle DCB = 28^{\circ}$ ，然后根据直角三角形的两锐角互补可得 $\angle ABD = 62^{\circ}$ 。

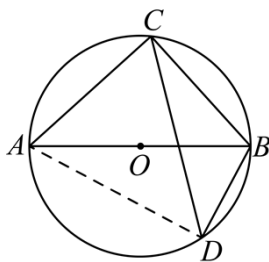
【详解】连接AD，则 $\angle ADB = 90^{\circ}$ ，

$\because \widehat{BD} = \widehat{BD}$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 28^{\circ}$ 。

$\because$ 如图AB是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ABD = 90^{\circ} - \angle BAD = 62^{\circ}$ 。



故答案为： 62° 。

【点睛】本题考查圆周角定理及推论，直角三角形两锐角互余；由圆周角定理得到相等角是解题的关键。

题型八 半圆（直径）所对的圆周角是直角

例 8 已知AB是 $\odot O$ 的直径，C为 $\odot O$ 上一点，连接BC，过点O作 $OD \perp BC$ 于D，交弧BC于点E，连接AE，交BC于F。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/187060054040006120>