第 10 章 三角恒等变换 章末题型归纳总结（基础篇）

【题型归纳目录】

【思维导图】

- **三角恒等变换**
  - **两角和与差的正余弦与正切**
    - ①$sin(\alpha\pm\beta)=sin\alpha cos\beta\pm cos\alpha sin\beta$；
    - ②$cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha cos\beta\mp sin\alpha sin\beta$；
    - ③$tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tan\alpha\pm tan\beta}{1\mp tan\alpha tan\beta}$；
  - **二倍角公式**
    - ①$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha$；
    - ②$cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$；
    - ③$tan2\alpha=\dfrac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$；
  - **降次（幂）公式**
    - $sin\alpha cos\alpha=\dfrac{1}{2}sin2\alpha$;
    - $sin^2\alpha=\dfrac{1-cos2\alpha}{2}$;
    - $cos^2\alpha=\dfrac{1+cos2\alpha}{2}$;
  - **半角公式**
    - $sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-cos\alpha}{2}}$;
    - $cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+cos\alpha}{2}}$;
    - $tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\dfrac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$.
  - **辅助角公式**
    - $asin\alpha+bcos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}sin(\alpha+\phi)$
    - （其中$sin\phi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $cos\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $tan\phi=\dfrac{b}{a}$）.

【知识点梳理】

知识点 1：两角和与差的正余弦与正切

① $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；

② $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$；

③ $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$；

知识点 2：二倍角公式

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$；

② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$；

③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$；

知识点 3：降次（幂）公式

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha; \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

知识点 4：半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin a}.$$

知识点 4：辅助角公式

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi)$（其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$）.

解题方法总结

1、两角和与差正切公式变形

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan\alpha\tan\beta)$；

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1 - \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha - \beta)} - 1$.

2、降幂公式与升幂公式

$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$；$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$；$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$；

$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$；$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$；$1 + \sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$；$1 - \sin 2\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

3、其他常用变式

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$；$\cos 2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$；$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4、拆分角问题：① $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$； $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$；② $\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$；③ $\alpha=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$；

④ $\beta=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$；⑤ $\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

注意：特殊的角也看成已知角，如 $\alpha=\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

5、和化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

6、积化和公式

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

【典型例题】

题型一：给角求值型问题

【典例 11】 计算：$\cos 72^\circ \cos\left(-36^\circ\right)=$_____.

【答案】$\frac{1}{4}$/0.25

【解析】由题意可得：$\cos 72^\circ \cos\left(-36^\circ\right)=\cos 72^\circ \cos 36^\circ=\dfrac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ}=\dfrac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=\dfrac{\sin\left(180^\circ-36^\circ\right)}{4\sin 36^\circ}=\dfrac{\sin 36^\circ}{4\sin 36^\circ}=\dfrac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

【典例 12】 $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=$_____.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}+\dfrac{4\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin(30^\circ-10^\circ)+2\sin(30^\circ+10^\circ)}{\cos(30^\circ-10^\circ)}$

$=\dfrac{3\sin 30^\circ \cos 10^\circ+\cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\cos 30^\circ \cos 10^\circ+\sin 30^\circ \sin 10^\circ}$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\sin 10^\circ}=\sqrt{3}$.

故 $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

【变式 11】 $\dfrac{1-\tan^2 75^\circ}{\tan 75^\circ}$的值是_____.

【答案】$-2\sqrt{3}$

【解析】$\dfrac{1-\tan^2 75^\circ}{\tan 75^\circ}=\dfrac{2}{\frac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}}=\dfrac{2}{\tan 150^\circ}=\dfrac{2}{-\tan 30^\circ}=-2\sqrt{3}$,

所以$\dfrac{1-\tan^2 75^\circ}{\tan 75^\circ}$的值是$-2\sqrt{3}$.

故答案为：$-2\sqrt{3}$

【变式 12】 $\left(\tan 30^\circ+\tan 70^\circ\right)\sin 10^\circ=$_________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】$\left(\tan 30° + \tan 70°\right)\sin 10° = (\frac{\sin 30°}{\cos 30°} + \frac{\sin 70°}{\cos 70°})\sin 10°$

$= \frac{(\sin 30°\cos 70° + \cos 30\sin 70°)\sin 10°}{\cos 30°\cos 70°}$

$= \frac{\sin 100°\sin 10°}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20°} = \frac{2\sin 10°\cos 10°}{\sqrt{3}\sin 20°} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【变式 13】$\frac{\cos 80^{\circ} - 2\cos^2 50^{\circ} + 1}{\cos 35^{\circ}\cos 65^{\circ} + \cos 55^{\circ}\cos 155^{\circ}} =$ ______.

【答案】-2

【解析】原式$= \frac{\cos 80° - 2\cos^2 50° + 1}{\sin 55°\cos 65° - \cos 55°\sin 65°} = \frac{\cos 80° - \cos 100°}{\sin\left(55° - 65°\right)} = \frac{2\cos 80°}{\sin\left(-10°\right)} = -2$.

故答案为：-2.

题型二：给值求值型问题

【典例 21】已知$\cos\alpha = \frac{1}{3}$，则$\cos 2\alpha =$ ）

A．$-\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{7}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

【答案】C

【解析】由题意可得：$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$.

故选：C.

【典例 22】已知$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$，则$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$\frac{7}{9}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．$-\frac{8}{9}$

【答案】B

【解析】由题得$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$.

故选：B.

【变式 21】已知$\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \theta\right) = \frac{1}{3}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{12} + \theta\right) =$（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】A

【解析】由 $\cos(\frac{5\pi}{12}-\theta)=\frac{1}{3}$，

得 $\sin(\frac{\pi}{12}+\theta)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{12}+\theta)]=\cos(\frac{5\pi}{12}-\theta)=\frac{1}{3}$.

故选：A

【变式 22】已知 $\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=$（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $-\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】$\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$=\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3},\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$.

故选：A

【变式 23】已知 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=$（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】B

【解析】因为 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $0<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

又 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，故 A，C，D 错误.

故选：B.

题型三：给值求角型问题

【典例 31】已知：α，β 均为锐角，$tan\alpha=\frac{1}{2}$，$tan\beta=\frac{1}{3}$，则 $\alpha+\beta=$（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

【答案】B

【解析】由于 α，β 均为锐角，$tan\alpha=\frac{1}{2}$，$tan\beta=\frac{1}{3}$，

所以$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

所以$tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1$.

所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

故选：*B.*

【典例 32】已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，则$\alpha-\beta=$（　　）

A．$-\frac{\pi}{4}$　　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　　C．$\frac{\pi}{4}$　　　D．$-\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{4}$

【答案】A

【解析】先利用平方关系求出$\cos\alpha$，$\sin\beta$，再利用两角差的余弦公式将$\cos(\alpha-\beta)$展开计算，根据余弦值及角的范围可得角的大小.$\because\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又$\because\sin\alpha<\sin\beta$，$\therefore\alpha<\beta$，

$\therefore-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$，

$\therefore\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

故选：A.

【变式 31】已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\left(\alpha-\beta\right)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha,\beta$是锐角，则$\beta=$（　　）

A．$\frac{5\pi}{12}$　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　C．$\frac{\pi}{4}$　　　D．$\frac{3}{5}$

【答案】C

【解析】因为α,β是锐角，$\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，所以$\cos(\alpha-\beta)>0$

$\cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，cos（α﹣β）$=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore sin\beta=sin\left[\alpha-\left(\alpha-\beta\right)\right]=sinacos\left(\alpha-\beta\right)-cosasin\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵β 为锐角

∴$\beta=\dfrac{\pi}{4}$

故选 C.

【变式 32】已知 $\alpha\in(0,\pi),\beta\in(0,\pi),\sin(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha-\beta),\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{4}{3}$，则 $\alpha+\beta=$（　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{5\pi}{4}$　　D. $\dfrac{7\pi}{4}$

【答案】C

【解析】由 $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$，

得 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{4}{3}$， 所以 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{3}\cos\alpha\cos\beta$，

又 $\sin(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha-\beta)$， 所以 $\dfrac{4}{3}\cos\alpha\cos\beta=2\cos(\alpha-\beta)$，

即 $\dfrac{4}{3}\cos\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$，

整理得 $-\dfrac{1}{3}\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$， 即 $\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{1}{3}$，

所以 α,β 一个钝角一个锐角，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{4}{3}}{1-(-\frac{1}{3})}=1$，

所以 $\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{4}$.

故选：C

【变式 33】已知 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$， $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$， 则 $\alpha+\beta=$（　）

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

【答案】B

【解析】因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$， 所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

又 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$， $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$， $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，