黑龙江省哈尔滨市第九中学校2024-2025学年高三上学期11月份考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知 a 为实数,i 为虚数单位,若复数 $z=a^2-3a-4+(a-4)i$ 为纯虚数,则复数 $a-ai$ 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知两条直线 m，n 及平面 α，则下列推理正确的是（　　）

A．$m // \alpha$，$n // \alpha \Rightarrow m // n$　　B．$m // n$，$n \subset \alpha \Rightarrow m // \alpha$

C．$m \perp n$，$n \subset \alpha \Rightarrow m \perp \alpha$　　D．$m \perp \alpha$，$n \subset \alpha \Rightarrow m \perp n$

3．若圆 $C_1: x^2+y^2+2x+3y+1=0$，圆 $C_2: x^2+y^2+4x+3y+2=0$，则圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程是（　　）

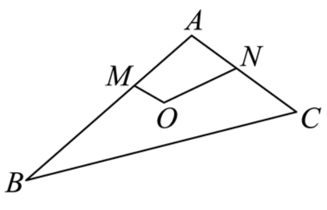
A．$x=\frac{1}{2}$　　B．$x=-\frac{1}{2}$

C．$x+y=-\frac{1}{2}$　　D．$x-y=-\frac{1}{2}$

4．已知直线 $2x-y+1=0$ 的倾斜角为 α，则 $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=$（　　）

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{9}$　　D．$\frac{1}{2}$

5．在如图的平面图形中，已知 $OM=1$，$ON=2$，$\angle MON=120°$，$BM=2MA$，$CN=2NA$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为（　　）



A．-6　　B．-9　　C．-15　　D．0

6．在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，若 $3\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B$，$\cos C=\frac{3}{5}$，且 $S_{\triangle ABC}=4$，则 $c=$（　　）

A．$\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　B．4　　C．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D．5

7．古印度数学家婆什伽罗在《丽拉沃蒂》一书中提出如下问题：某人给一个人布施，初日施 2 子安贝（古印度货币单位），以后逐日倍增，问一月共施几何？在这个问题中，以一个月31天计算，记此人第n日布施了a_n子安贝（其中$1\le n\le 31$，$n\in N^*$），数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若关于n的不等式$S_n-47<a_n^2-ta_n$恒成立，则实数t的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,\frac{69}{8}\right)$　　B．$(-\infty,12)$　　C．$\left(-\infty,\frac{57}{4}\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{97}{8}\right)$

8．已知$f(x)$是定义在 R 上的增函数，函数$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称，若实数m，n满足等式$f(n-3)+f\left(\sqrt{4m-m^2-3}\right)=0$，则$\frac{n}{m}$的取值范围是（　）

A．$\left[2-\frac{2\sqrt{3}}{3},2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$　　B．$\left[1,2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

C．$\left[2-\frac{2\sqrt{3}}{3},3\right]$　　D．$[1,3]$

二、多选题

9．下列命题正确的是（　）

A．已知非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，则“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的必要不充分条件

B．已知x，y是实数，则“$2^{x-y}>1$”的一个必要不充分条件是“$\log_2 x>\log_2 y$”

C．命题“$\forall n\in Z,n\in Q$”的否定为“$\exists n_0\in Z,n_0\notin Q$”

D．若命题“$\forall x\in[-1,2],x^2-a<0$”是真命题，则实数$a$的取值范围是$(4,+\infty)$

10．已知空间四点$O(0,0,0),A(4,3,0),B(-3,0,4),C(5,6,4)$，则下列说法正确的是（　）

A．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$　　B．$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=-\frac{12}{25}$

C．点O到直线BC的距离为$\sqrt{5}$　　D．O,A,B,C四点共面

11．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，E，F分别是棱AB,A_1B_1的中点，动点P满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，其中$\lambda,\mu\in(0,1]$，则下列命题正确的是（　）

A．若$\lambda=2\mu$，则平面$AB_1P\perp$平面DEF

B．若 $\lambda=\mu$，则 D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

C．若 $\lambda=\mu-\frac{1}{2}$，则 PD_1 // 平面 A_1C_1E

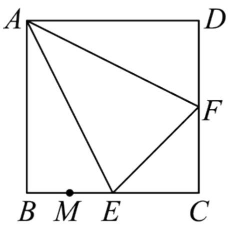
D．若 $\lambda+\mu=\frac{3}{2}$，则线段 PF 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、填空题

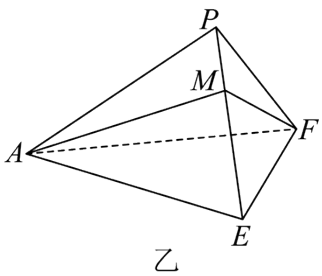
12．函数 $f\left(x\right)=x\ln x+ax+2$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-2y+2=0$ 相互垂直，则实数 $a=$______

13．在等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，a_3,a_7 是函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-5x^2+16x+2$ 的极值点，则 $a_5=$______

14．在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，如图甲所示，E，F，M 分别为 BC，CD，BE 的中点，分别沿 AE，AF 及 EF 所在直线把 $\vee AEB,\vee AFD$ 和 $\vee EFC$ 折起，使 B，C，D 三点重合于点 P，得到三棱锥 $P-AEF$，如图乙所示，则三棱锥 $P-AEF$ 外接球的体积是__________；过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 外接球所得截面的面积的取值范围是__________.



甲



乙

四、解答题

15．已知圆心为 C 的圆经过 $A\left(-1,3\right),B\left(1,1\right)$ 两点，且圆心 C 在直线 $l:x+y=0$ 上.

(1)求圆 C 的方程；

(2)求过点 $\left(3,-1\right)$ 且与圆 C 相切的直线方程.

16．已知在 $\vee ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sin C}{a+b}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-\sin B}{a-c}$

(1)求角 B；

(2)若点 D 在 AC 上，BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线，$BD=2\sqrt{3}$，求 $2a+c$ 的最小值.

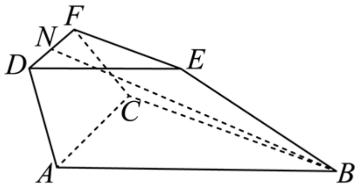
17．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\mathrm{L}+\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$．数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $\log_3 b_{n+1}-1=\log_3 b_n$，且

$b_1 = a_1$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求$\{a_n b_n\}$的前 n 项和T_n .

18．如图，在三棱台$ABC-DEF$中， $AB=BC=AC=2$， $AD=DF=FC=1$， N为DF的中点，二面角$D-AC-B$的大小为θ .



(1)求证： $AC \perp BN$；

(2)若$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，求三棱台$ABC-DEF$的体积；

(3)若A到平面$BCFE$的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求$\cos\theta$的值.

19．在高等数学中，我们将$y=f(x)$在$x=x_0$处及其附近用一个多项式函数近似表示，具体形式为$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\mathrm{L}\ +\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\mathrm{L}$ （其中$f^{(n)}(x)$表示$f(x)$的n次导数），以上公式我们称为函数$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒展开式.例如$\sin x$在$x=0$处的泰勒展开式为： $\sin x = x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\mathrm{L}\ +\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\mathrm{L}$.

(1)分别求$\cos x$和e^x在$x=0$处的泰勒展开式；

(2)若上述泰勒展开式中的x可以推广至复数域，试证明： $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$.（其中i为虚数单位）；

(3)当$x\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$时，求证： $\mathrm{e}^{\sin x}>x+1$.

（参考数据$\ln\dfrac{5}{2}\approx 0.9$）

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	B	B	A	B	D	C	ACD	BD
题号	11									
答案	AC									

1．B

【解析】根据纯虚数的知识求得a，由此求得$a-ai$在复平面内对应的点所在的象限.

【详解】$\because$复数$z=a^2-3a-4+(a-4)i$为纯虚数,$\therefore\begin{cases}a^2-3a-4=0,\\a-4\neq 0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=4\text{或}a=-1,\\a\neq 4,\end{cases}$

$\therefore a=-1$,$\therefore$复数$a-ai=-1+i$,在复平面内对应的点的坐标为$(-1,1)$,位于第二象限.

故选：B.

【点睛】本小题主要考查纯虚数的概念，考查复数对应点所在象限，属于基础题.

2．D

【分析】根据空间中点线面的位置关系即可结合选项逐一判断.

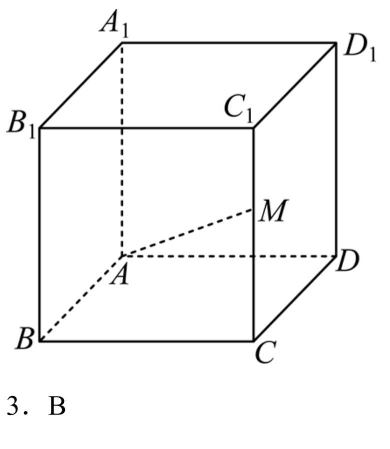
【详解】对于A,例如在正方体中A_1B_1//平面$ABCD$，B_1C_1//平面$ABCD$,但是A_1B_1与B_1C_1相交，故A错误，

对于B,根据线面平行的判定定理，需要$m // n$，$m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha\Rightarrow m // \alpha$，故当$m\subset\alpha$时，不能得到$m//\alpha$，故B错误，

对于C,例如在正方体中，$AB\perp BC,BC\subset$平面$ABCD$,但是不能得到$AB\perp$平面$ABCD$,故C错误，

对于D,根据线面垂直的定义即可判断$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha\Rightarrow m\perp n$，故D正确，

故选：D



3．B

【分析】先判断两圆相交，再将两圆方程相减即得公共弦所在直线的方程.

【详解】圆$C_1: x^2+y^2+2x+3y+1=0$的圆心$C_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，半径$r_1=\frac{3}{2}$；

圆$C_2: x^2+y^2+4x+3y+2=0$的圆心$C_2\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，半径$r_2=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\because \frac{\sqrt{17}-3}{2}<d=1<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$，$\therefore$圆$C_1$与圆$C_2$相交，

两圆相减，化简得直线$x=-\frac{1}{2}$，即为圆C_1与圆C_2的公共弦所在直线，故B正确.

故选：B.

4．B

【分析】利用直线的斜率的定义及二倍角的余弦公式，结合同角三角函数的平方关系和商数关系即可求解.

【详解】因为直线$2x-y+1=0$的倾斜角为α，

所以$\tan\alpha=2$.

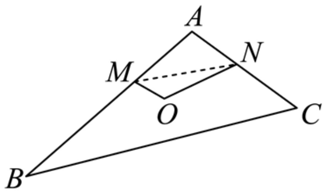
所以$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+2\tan^2\alpha}=\frac{1-2^2}{1+2\times 2^2}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$.

故选：B.

5．A

【分析】连接MN，利用给定关系可得$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{MN}$，再利用向量数量积的运算律及定义求解即得.

【详解】连接MN，



由$BM=2MA, CN=2NA$，得$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AN}-3\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MN}$，

又$OM=1, ON=2, \angle MON=120^\circ$，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OM}=3(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{OM}$

$=3\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{OM}^2=3\times1\times2\cos120^\circ-3\times1^2=-6$.

故选：A

6．B

【分析】根据正弦定理角化边，由三角形面积公式求ab，再结合余弦定理，即可求解c.

【详解】由正弦定理角化边，可知，$3c^2=a^2+b^2+2ab$，且$\cos C=\frac{3}{5}$

则$\sin C=\dfrac{4}{5}$，$S_{\vartriangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2}{5}ab=4$，则$ab=10$，

则$3c^2=a^2+b^2+20$，①

由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-12$，②

由①②得，$c^2=16$，即$c=4$.

故选：B

7．D

【分析】由等比数列的定义写出通项公式和前n项和，将问题化为$t<2^n+\dfrac{49}{2^n}-2$恒成立，应用基本不等式求右侧最小值，注意取值条件，即可得参数范围.

【详解】由题设，$\{a_n\}$是首项、公比都为2的等比数列，故$a_n=2^n$，

$S_n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1)$，

所以$S_n-47<a_n^2-ta_n$，即$2\cdot 2^n-49<2^{2n}-t\cdot 2^n$，$1\le n\le 31$，$n\in \mathrm{N}^*$，

所以$t<2^n+\dfrac{49}{2^n}-2$恒成立，而$2^n+\dfrac{49}{2^n}\ge 2\sqrt{2^n\cdot\dfrac{49}{2^n}}=14$，当且仅当$n=\log_2 7$时等号成立，

又$n=\log_2 7\in(2,3)$，当$n=2$，$2^n=4$时$4+\dfrac{49}{4}=\dfrac{65}{4}$；当$n=3$，$2^n=8$时$8+\dfrac{49}{8}=\dfrac{113}{8}$；

综上$t<\dfrac{113}{8}-2=\dfrac{97}{8}$，即实数$t$的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{97}{8}\right)$.

故选：D

8．C

【分析】由函数$f(x)$是递增函数，且$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称，可得函数$f(x)$是奇函数，

再结合$f(n-3)+f\left(\sqrt{4m-m^2-3}\right)=0$可得$(n-3)+\sqrt{4m-m^2-3}=0$，进而利用数形结合求出结果.

【详解】$f(x)$是定义在R上的增函数，且函数$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称，

所以函数$f(x)$是奇函数；

又$f(n-3)+f\left(\sqrt{4m-m^2-3}\right)=0$，

所以$(n-3)+\sqrt{4m-m^2-3}=0$，且$4m-m^2-3\ge 0$；

即$\begin{cases}(m-2)^2+(n-3)^2=1\\1\le m\le 3\\2\le n\le 3\end{cases}$，

画出不等式组表示的图形，如图所示，

所以$\dfrac{n}{m}$表示圆弧上的点(m,n)与点$(0,0)$连线的斜率，

所以结合图象可得：$\dfrac{n}{m}$的最大值是直线OA的斜率，为$\dfrac{3-0}{1-0}=3$，

最小值是直线OB的斜率，不妨设为k，

则$\begin{cases}n=km\\(m-2)^2+(n-3)^2=1\end{cases}$，

消去n，得$(m-2)^2+(km-3)^2=1$，

整理得$(k^2+1)m^2-(6k+4)m+12=0$，

令$\Delta=(6k+4)^2-4\times12\times(k^2+1)=0$，

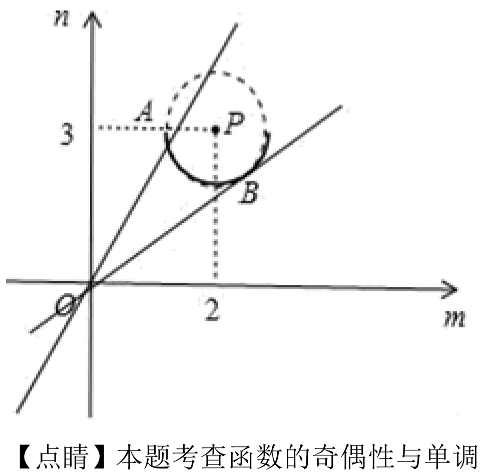
化简得$3k^2-12k+8=0$，

解得$k=2\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

应取$k=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$为最小值；

所以$\dfrac{n}{m}$的取值范围是：$\left[2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},3\right]$.

故选：C.



【点睛】本题考查函数的奇偶性与单调性，函数与方程的综合运用，考查数形结合思想．解题分两部分，一部分是由函数单调性与奇偶性化$f(n-3)+f\left(\sqrt{4m-m^2-3}\right)=0$为

$\left(n-3\right)+\sqrt{4m-m^2-3}=0$，第二部分收$\left(m,n\right)$构成点，用几何意义来解释此条件，用几何意义来理解$\dfrac{n}{m}$．从而达到求解的目的．

9．ACD

【分析】A 由数量积运算性质可判断选项正误；

B 利用指数函数，对数函数性质可判断选项正误；

C 由全称量词命题否定的概念可判断选项正误；

D 转化为$\forall x\in[-1,2]$，$a>\left(x^2\right)_{\max}$，即可判断选项正误.

【详解】A 选项，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\Leftrightarrow\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{c}$垂直或$\vec{a}=\vec{b}$，

$\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，则由$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$得不到$\vec{a}=\vec{b}$，

由$\vec{a}=\vec{b}$可得到$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，故“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的必要不充分条件，A 正确；

B 选项，$2^{x-y}>1\Leftrightarrow 2^{x-y}>2^0\Leftrightarrow x>y$，$\log_2 x>\log_2 y\Leftrightarrow x>y>0$.

则由$\log_2 x>\log_2 y$可得到$2^{x-y}>1$，由$2^{x-y}>1$得不到$\log_2 x>\log_2 y$，

则$\log_2 x>\log_2 y$是$2^{x-y}>1$的一个充分不必要条件，不是必要不充分条件，B 错误；

C 选项，由全称量词命题否定概念可知$\forall n\in Z,n\in Q$”的否定为$\exists n_0\in Z,n_0\notin Q$，C 正确；

D 选项，$\forall x\in[-1,2]$，$x^2-a\langle 0\Rightarrow\forall x\in[-1,2]$，$a\rangle\left(x^2\right)_{\max}$，由题$\left(x^2\right)_{\max}=4$，则$a>4$，D 正确.

故选：ACD

10．BD

【分析】根据空间向量的坐标表示公式、夹角公式，结合四点共面的性质、点到线距离公式逐一判断即可.

【详解】A：因为$\overrightarrow{OA}=\left(4,3,0\right),\overrightarrow{OB}=\left(-3,0,4\right)$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\times\left(-3\right)=-12$，因此本选项不正确；

B：因为$\overrightarrow{OA}=\left(4,3,0\right),\overrightarrow{OB}=\left(-3,0,4\right)$，

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}=-\dfrac{12}{\sqrt{4^2+3^2}\times\sqrt{\left(-3\right)^2+4^2}}=-\dfrac{12}{25}$，因此本选项正确；

C：$\overrightarrow{BO}=\left(3,0,-4\right),\overrightarrow{BC}=\left(8,6,0\right)$，