

江苏省无锡市太湖高级中学 2024 年高考数学全真模拟密押卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = \sqrt{3}, b = 1, B = 30^\circ$, 则 A 为()

- A. 60° B. 120° C. 60° 或 150° D. 60° 或 120°

2. 某装饰公司制作一种扇形板状装饰品, 其圆心角为 120° , 并在扇形弧上正面等距安装 7 个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个, 导线接头忽略不计), 已知扇形的半径为 30 厘米, 则连接导线最小大致需要的长度为()

- A. 58 厘米 B. 63 厘米 C. 69 厘米 D. 76 厘米

3. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴的上方), l 为 C 的准线, 点 N 在 l 上且 $MN \perp l$, 则 M 到直线 NF 的距离为()

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

4. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $f(x)$ 是定义在 R 上的减函数, $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$), 则()

- A. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ B. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
C. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ D. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

5. 集合 $P = \{x \in N \mid -2 < x - 1 < 2\}$ 的子集的个数是()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 8

6. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 2i$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 的平分线交 BC 边于点 D , $AB = 4$, $AC = 8$, $BD = 2$, 则 $\triangle ABD$ 的面积是()

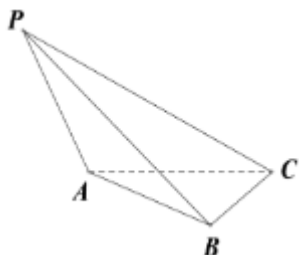
- A. $16\sqrt{2}$ B. $\sqrt{15}$ C. 3 D. $8\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $2^{f(\frac{m}{n})} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$. 若 $f(4) = 2$, 则函数 $f(x)$

在 $[1,16]$ 上的最大值为()

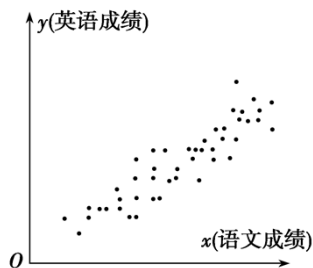
- A. 4 B. 6 C. 3 D. 8

9. 如图示, 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 且 $PA = PB = AB = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{3}$, 则 PC 与面 PAB 所成角的正弦值等于()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

10. 为研究语文成绩和英语成绩之间是否具有线性相关关系, 统计两科成绩得到如图所示的散点图(两坐标轴单位长度相同), 用回归直线 $\hat{y} = bx + a$ 近似地刻画其相关关系, 根据图形, 以下结论最有可能成立的是()



- A. 线性相关关系较强, b 的值为 1.25
B. 线性相关关系较强, b 的值为 0.83
C. 线性相关关系较强, b 的值为 -0.87
D. 线性相关关系太弱, 无研究价值

11. 函数 $f(x) = \sin(x + \theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上为增函数, 则 θ 的值可以是()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2$, 且 a_1, a_3, a_4 成等比数列. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 S_n 的最小值为()

- A. -10 B. -14 C. -18 D. -20

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_n = \frac{S_n}{2} - 1$, 则 $S_7 =$ _____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - 2y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

15. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ 是平面向量, $\vec{e}$ 是单位向量. 若 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 2, \vec{b} \cdot \vec{e} = 3$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的取值范围是_____.

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x - a|, & 0 < x \leq 4 \\ f(8-x), & 4 < x < 8 \end{cases}$, 若存在实数 m , 使得关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不相等的实根, 且这 4 个根的平方和存在最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足, $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n \in N^*)$,

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 (n \in N^*).$$

(I) 求 a_n 与 b_n ;

(II) 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ -\frac{1}{a_n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 若对 $n \in N^*, T_{2n} \geq T_{2k}$ 恒成立, 求正整数 k 的值.

18. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 D 在椭圆 C 上,

$\triangle DF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{2} + 2$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过圆 $E: x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ 上任意一点 P 作圆 E 的切线 l , 若 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求证 $\angle AOB$ 为定值.

19. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时, 求线段 AB 的中点的横坐标;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C , 求证: M, B, C 三点共线;

(3) 设过点 M 的直线交椭圆于 G, H 两点, 若椭圆上存在点 P , 使得 $\vec{OG} + \vec{OH} = \lambda \vec{OP}$ (其中 O 为坐标原点), 求实数 λ 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 + mx^2 + m + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 -3 ，求 m 的值.

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 经过点 } M(-1, -3\sqrt{3}) \text{ 且倾斜角为 } \alpha.$$

(1) 求曲线 C 的极坐标方程和直线 l 的参数方程;

(2) 已知直线 l 与曲线 C 交于 A, B ，满足 A 为 MB 的中点，求 $\tan\alpha$.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ ，(t 为参数). 以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - 8 = 0$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若点 P 是直线 l 的一点，过点 P 作曲线 C 的切线，切点为 Q ，求 $|PQ|$ 的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由正弦定理可求得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，再由角 A 的范围可求得角 A .

【详解】

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又 $0^\circ < A < 180^\circ$ ，且 $a > b$ ，所以 $A = 60^\circ$ 或 120° 。

故选：D.

【点睛】

本题主要考查正弦定理，注意角的范围，是否有两解的情况，属于基础题.

2、B

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小，可将导线的长视为扇形弧长，利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 6 等分，

所以每部分的弦长和弧长相差很小，可以用弧长近似代替弦长，

故导线长度约为 $\frac{2\pi}{3} \times 30 = 20\pi \approx 63$ (厘米).

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了扇形弧长的计算，属于容易题.

3、C

【解析】

联立方程解得 $M(3, 2\sqrt{3})$, 根据 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 4$, 得到 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形, 计算距离得到答案.

【详解】

依题意得 $F(1,0)$, 则直线 FM 的方程是 $y = \sqrt{3}(x-1)$. 由 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$.

由 M 在 x 轴的上方得 $M(3, 2\sqrt{3})$, 由 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 3 + 1 = 4$

又 $\angle NMF$ 等于直线 FM 的倾斜角, 即 $\angle NMF = 60^\circ$, 因此 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形

点 M 到直线 NF 的距离为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

故选: C.

【点睛】

本题考查了直线和抛物线的位置关系, 意在考查学生的计算能力和转化能力.

4、A

【解析】

根据符号函数的解析式, 结合 $f(x)$ 的单调性分析即可得解.

【详解】

根据题意, $g(x) = f(x) - f(ax)$, 而 $f(x)$ 是 R 上的减函数,

当 $x > 0$ 时, $x < ax$, 则有 $f(x) > f(ax)$, 则 $g(x) = f(x) - f(ax) > 0$, 此时 $\text{sgn}[g(x)] = 1$,

当 $x = 0$ 时, $x = ax$, 则有 $f(x) = f(ax)$, 则 $g(x) = f(x) - f(ax) = 0$, 此时 $\text{sgn}[g(x)] = 0$,

当 $x < 0$ 时, $x > ax$, 则有 $f(x) < f(ax)$, 则 $g(x) = f(x) - f(ax) < 0$, 此时 $\text{sgn}[g(x)] = -1$,

综合有： $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}(x)$;

故选：A.

【点睛】

此题考查函数新定义问题，涉及函数单调性辨析，关键在于读懂定义，根据自变量的取值范围分类讨论.

5、D

【解析】

先确定集合 P 中元素的个数，再得子集个数.

【详解】

由题意 $P = \{x \in N \mid -1 < x < 3\} = \{0, 1, 2\}$ ，有三个元素，其子集有 8 个.

故选：D.

【点睛】

本题考查子集的个数问题，含有 n 个元素的集合其子集有 2^n 个，其中真子集有 $2^n - 1$ 个.

6、A

【解析】

根据复数的运算法则，可得 z ，然后利用复数模的概念，可得结果.

【详解】

由题可知：
$$z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i-2i^2}{1-i^2}$$

由 $i^2 = -1$ ，所以 $z = 1+i$

所以 $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

故选：A

【点睛】

本题主要考查复数的运算，考验计算，属基础题.

7、B

【解析】

利用正弦定理求出 CD ，可得出 BC ，然后利用余弦定理求出 $\cos B$ ，进而求出 $\sin B$ ，然后利用三角形的面积公式可计算出 $\triangle ABD$ 的面积.

【详解】

Q AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，则 $\angle BAD = \angle CAD$.

Q $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，则 $\angle ADC = \pi - \angle ADB$ ，

$$\therefore \sin \angle ADC = \sin(\pi - \angle ADB) = \sin \angle ADB,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \text{ 即 } \frac{4}{\sin \angle ADB} = \frac{2}{\sin \angle BAD}, \quad ①$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}, \text{ 即 } \frac{8}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}, \quad ②$$

$$① \div ② \text{ 得 } \frac{2}{CD} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } CD = 4, \therefore BC = BD + CD = 6,$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = -\frac{1}{4}, \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{因此, } \triangle ABD \text{ 的面积为 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin B = \sqrt{15}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查三角形面积的计算, 涉及正弦定理和余弦定理以及三角形面积公式的应用, 考查计算能力, 属于中等题.

8、A

【解析】

根据所给函数解析式满足的等量关系及指数幂运算, 可得 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$; 利用定义可证明函数 $f(x)$ 的单调

性, 由赋值法即可求得函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值.

【详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$,

$$\text{则 } f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m);$$

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$,

$$\text{故 } f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0,$$

$$\text{令 } m = x_1, n = x_2, \text{ 则 } f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + f(x_2) = f(x_1),$$

$$\text{即 } f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } f(x)_{\max} = f(16),$$

$$\text{令 } m = 16, \quad n = 4,$$

$$\text{故 } f(4) + f(4) = f(16) = 4,$$

故函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 4.

故选：A.

【点睛】

本题考查了指数幂的运算及化简，利用定义证明抽象函数的单调性，赋值法在抽象函数求值中的应用，属于中档题.

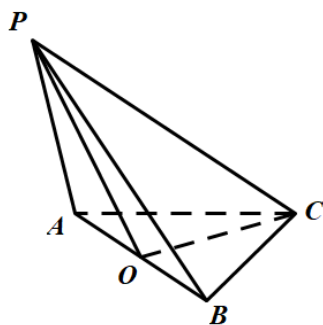
9、A

【解析】

首先找出 PC 与面 PAB 所成角，根据所成角所在三角形利用余弦定理求出所成角的余弦值，再根据同角三角函数关系求出所成角的正弦值.

【详解】

由题知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形且 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\triangle ABP$ 是等边三角形，



$$\text{设 } AB \text{ 中点为 } O, \text{ 连接 } PO, CO, \text{ 可知 } PO = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad CO = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

同时易知 $AB \perp PO$ ， $AB \perp CO$ ，

所以 $AB \perp$ 面 POC ，故 $\angle POC$ 即为 PC 与面 PAB 所成角，

$$\text{有 } \cos \angle POC = \frac{PO^2 + CO^2 - PC^2}{2PO \cdot CO} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{故 } \sin \angle POC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle POC} = \frac{1}{3}.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了空间几何题中线面夹角的计算，属于基础题.

10、B

【解析】

根据散点图呈现的特点可以看出，二者具有相关关系，且斜率小于1.

【详解】

散点图里变量的对应点分布在一条直线附近，且比较密集，
故可判断语文成绩和英语成绩之间具有较强的线性相关关系，
且直线斜率小于1，故选B.

【点睛】

本题主要考查散点图的理解，侧重考查读图识图能力和逻辑推理的核心素养.

11、D

【解析】

依次将选项中的 θ 代入，结合正弦、余弦函数的图象即可得到答案.

【详解】

当 $\theta = 0$ 时， $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上不单调，故A不正确；

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x) = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减，故B不正确；

当 $\theta = \pi$ 时， $f(x) = -\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上不单调，故C不正确；

当 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时， $f(x) = -\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增，故D正确.

故选：D

【点睛】

本题考查正弦、余弦函数的单调性，涉及到诱导公式的应用，是一道容易题.

12、D

【解析】

利用等比中项性质可得等差数列的首项，进而求得 S_n ，再利用二次函数的性质，可得当 $n = 4$ 或 5 时， S_n 取到最小值.

【详解】

根据题意，可知 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d = 2$ ，

由 a_1, a_3, a_4 成等比数列，可得 $a_3^2 = a_1 a_4$ ，

$\therefore (a_1 + 4)^2 = a_1(a_1 + 6)$ ，解得 $a_1 = -8$.

$$\therefore S_n = -8n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 9n = \left(n - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}.$$

根据单调性，可知当 $n = 4$ 或 5 时， S_n 取到最小值，最小值为 -20 。

故选：D.

【点睛】

本题考查等差数列通项公式、等比中项性质、等差数列前 n 项和的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意当 $n = 4$ 或 5 时同时取到最值。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、-254

【解析】

利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 代入即可得到 $S_n - 2 = 2(S_{n-1} - 2) (n \geq 2)$ ，即 $\{S_n - 2\}$ 是等比数列，再利用等比数列的通项公式计算即可。

【详解】

由已知 $a_n = \frac{S_n}{2} - 1$ ，得 $a_n = \frac{S_n}{2} - 1$ ，即 $S_n - S_{n-1} = \frac{S_n}{2} - 1$ ，所以 $S_n - 2 = 2(S_{n-1} - 2) (n \geq 2)$

又 $a_1 = \frac{S_1}{2} - 1$ ，即 $S_1 = -2$ ， $S_1 - 2 = -4$ ，所以 $\{S_n - 2\}$ 是以 -4 为首项， 2 为公比的等比数

列，所以 $S_n - 2 = -4 \times 2^{n-1}$ ，即 $S_n = 2 - 2^{n+1}$ ，所以 $S_7 = 2 - 2^8 = -254$ 。

故答案为：-254

【点睛】

本题考查已知 S_n 与 a_n 的关系求 S_n ，考查学生的数学运算求解能力，是一道中档题。

14、0 6

【解析】

作不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，即可求出结果。

【详解】

作出可行域，如图中的阴影部分：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/187156034006006102>