

2024 届新疆昌吉市玛纳斯县第一中学高三下学期 3 月第二次月考数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列四个结论中正确的个数是

- (1) 对于命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \exists x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ；
- (2) 已知 $X: N(2, \sigma^2)$ ，则 $P(X > 2) = 0.5$
- (3) 已知回归直线的斜率的估计值是 2，样本点的中心为 (4,5)，则回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$ ；
- (4) “ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”的充分不必要条件.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

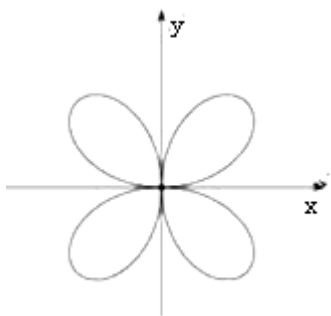
2. 若 $(1-2x)^n$ 的二项展开式中 x^2 的系数是 40，则正整数 n 的值为 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

3. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论：

- ① 曲线 C 有四条对称轴；
- ② 曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$ ；
- ③ 曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$ ；
- ④ 四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中，所有正确结论的序号是 ()



A. ①② B. ①③ C. ①③④ D. ①②④

4. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$

5. 过抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点且倾斜角为 α 的直线交抛物线于两点 A, B . $|AF| = 2|BF|$, 且 A 在第一象限, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

6. 数列 $\{a_n\}$, 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值. 若 $a_7 = 2$, $a_9 = 3$, $a_{98} = 4$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和 $S_{100} =$ ()

- A. 132 B. 299 C. 68 D. 99

7. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ 的一条渐近线方程为 $3x + 2y = 0$, 则 $m =$ ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

8. 存在点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上, 且点 M 在第一象限, 使得过点 M 且与椭圆在此点的切线

$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 垂直的直线经过点 $(0, -\frac{b}{2})$, 则椭圆离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ C. $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

9. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上, 它的底面边长为 $\sqrt{6}$, 侧棱长为 $2\sqrt{3}$, 则它的外接球的表面积为 ()

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

10. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $7S_2 = 4S_4$, 则公比 q 的值为 ()

- A. 1 B. 1 或 $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 如果直线 $ax + by = 1$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相交, 则点 $M(a, b)$ 与圆 C 的位置关系是 ()

- A. 点 M 在圆 C 上 B. 点 M 在圆 C 外
C. 点 M 在圆 C 内 D. 上述三种情况都有可能

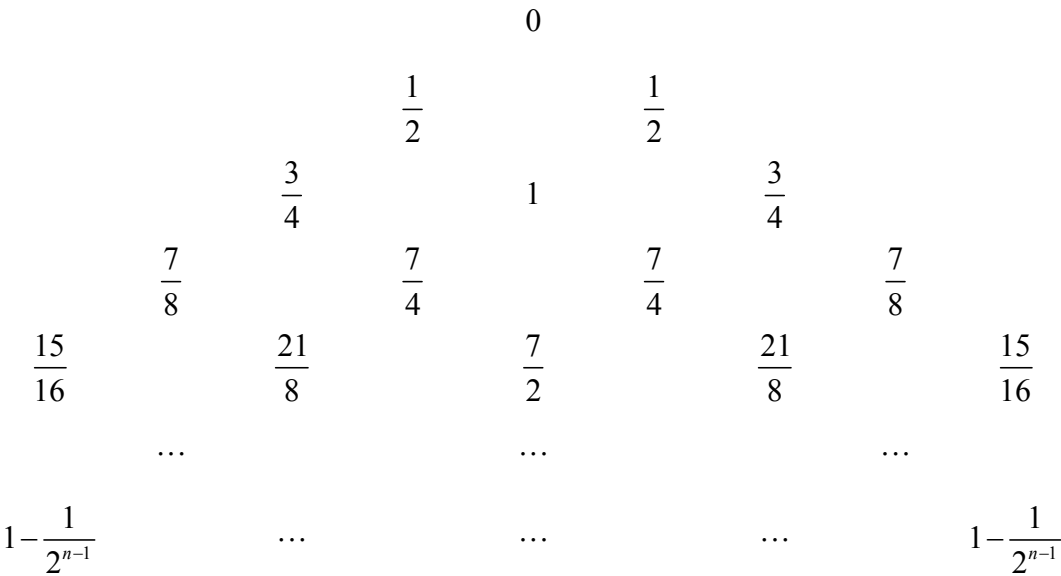
12.

以下四个命题：①两个随机变量的线性相关性越强，相关系数的绝对值越接近 1；②在回归分析中，可用相关指数 R^2 的值判断拟合效果， R^2 越小，模型的拟合效果越好；③若数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的方差为 1，则 $2x_1+1, 2x_2+1, 2x_3+1, \dots, 2x_n+1$ 的方差为 4；④已知一组具有线性相关关系的数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ ，其线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，则 (x_0, y_0) 满足线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 是 $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10}$ ， $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{10}}{10}$ 的充要条件；其中真命题的个数为()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

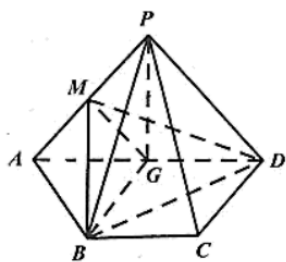
13. 已知集合 $A = \{m+1, (m-1)^2, m^2-3m+3\}$ ，若 $1 \in A$ ，则 $m^{2020} =$ _____.
14. 在如图所示的三角形数阵中，用 $a_{i,j} (i \geq j)$ 表示第 i 行第 j 个数 $(i, j \in N^*)$ ，已知 $a_{i,1} = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} (i \in N^*)$ ，且当 $i \geq 3$ 时，每行中的其他各数均等于其“肩膀”上的两个数之和，即 $a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j} (2 \leq j \leq i-1)$ ，若 $a_{m,2} > 2019$ ，则正整数 m 的最小值为_____.



15. 已知复数 $z = (1-i) \cdot (a+i)$ (i 为虚数单位) 为纯虚数，则实数 a 的值为_____.
16. 已知各棱长都相等的直三棱柱(侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱)所有顶点都在球 O 的表面上.若球 O 的表面积为 28π , 则该三棱柱的侧面积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，已知四边形 $ABCD$ 的直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp DC$ ， $AD = 4$ ， $DC = BC = 2$ ， G 为线段 AD 的中点， $PG \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PG = 2$ ， M 为线段 AP 上一点 (M 不与端点重合)。



(1) 若 $AM = MP$,

(i) 求证: $PC \parallel$ 平面 BMG ;

(ii) 求平面 PAD 与平面 BMD 所成的锐二面角的余弦值;

(2) 是否存在实数 λ 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 使得直线 PB 与平面 BMG 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 若存在, 确定的 λ 值,

若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, a_2, a_4, a_8 分别等于等比数列 $\{b_n\}$ 的第 2 项, 第 3 项, 第 4 项.

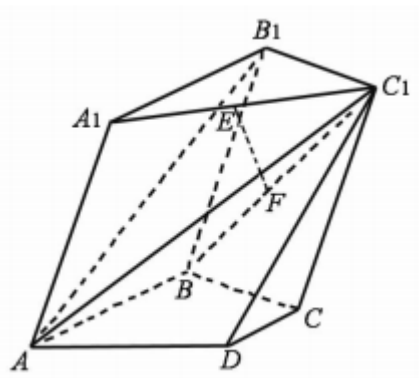
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \dots + \frac{c_n}{a_n} = b_{n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 2020 项的和.

19. (12 分) 在如图所示的多面体中, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 ABB_1A_1 是边长为 2 的菱形, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, 四边形 BCC_1B_1 为平行四边形, 且 $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $CD = 1$

(1) 若 E, F 分别为 A_1C , BC_1 的中点, 求证: $EF \perp$ 平面 AB_1C_1 ;

(2) 若 $\angle A_1AB = 60^\circ$, AC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求二面角 $A_1 - AC_1 - D$ 的余弦值.



20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为

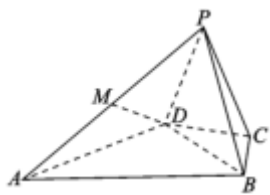
$$\rho = 2\sin\theta + 2a\cos\theta (a > 0); \text{ 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 分别交于 } M, N \text{ 两}$$

点.

(1) 写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 若点 P 的极坐标为 $(2, \pi)$, $|PM| + |PN| = 5\sqrt{2}$, 求 a 的值.

21. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 为等边三角形, $\triangle BCD$ 是等腰三角形, 且顶角 $\angle BCD = 120^\circ$, $PC \perp BD$, 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, M 为 PA 中点.



(1) 求证: $DM \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $PD \perp PB$, 求二面角 $C-PA-B$ 的余弦值大小.

22. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 向量 $\vec{m} = (1, 2)$, $\vec{n} = \left(\cos 2A, \cos^2 \frac{A}{2}\right)$, 且 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 1$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $b + c = 2a = 2\sqrt{3}$, 求 $\sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由题意，(1)中，根据全称命题与存在性命题的关系，即可判定是正确的；(2)中，根据正态分布曲线的性质，即可判定是正确的；(3)中，由回归直线方程的性质和直线的点斜式方程，即可判定是正确；(4)中，基本不等式和充要条件的判定方法，即可判定。

【详解】

由题意，(1)中，根据全称命题与存在性命题的关系，可知命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \forall x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ，是错误的；

(2)中，已知 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，正态分布曲线的性质，可知其对称轴的方程为 $x = 2$ ，所以 $P(X > 2) = 0.5$ 是正确的

(3)中，回归直线的斜率的估计值是 2，样本点的中心为 (4,5)，由回归直线方程的性质和直线的点斜式方程，可得回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$ 是正确；

(4)中，当 $x \geq 1$ 时，可得 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ 成立，当 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 时，只需满足 $x > 0$ ，所以“ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”成立的充分不必要条件。

【点睛】

本题主要考查了命题的真假判定及应用，其中解答中熟记含有量词的否定、正态分布曲线的性质、回归直线方程的性质，以及基本不等式的应用等知识点的应用，逐项判定是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于基础题。

2、B

【解析】

先化简 $(1-2x)^n$ 的二项展开式中第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_n^r \cdot 1^{n-r} \cdot (-2x)^r$ ，然后直接求解即可

【详解】

$(1-2x)^n$ 的二项展开式中第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_n^r \cdot 1^{n-r} \cdot (-2x)^r$ 。令 $r = 2$ ，则 $T_3 = C_n^2 \cdot (-2x)^2$ ， $\therefore 4C_n^2 = 40$ ， $\therefore n = -4$ (舍) 或 $n = 5$ 。

【点睛】

本题考查二项展开式问题，属于基础题

3、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数；②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值；③将面积转化为 x, y 的关系式，然后根据基本不等式求解出最大值；④根据 x, y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系，从而判断出面

积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

①：当 x 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 y 轴对称；

当 y 变为 $-y$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 x 轴对称；

当 y 变为 x 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 $y = x$ 轴对称；

当 y 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 $y = -x$ 轴对称；

综上所述：有四条对称轴，故正确；

②：因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ ，所以 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$ ，

所以 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ ，所以 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$ ，取等号时 $x^2 = y^2 = \frac{1}{8}$ ，

所以最大距离为 $\frac{1}{2}$ ，故错误；

③：设任意一点 $P(x, y)$ ，所以围成的矩形面积为 xy ，

因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ ，所以 $x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^3 \geq (2xy)^3$ ，所以 $xy \leq \frac{1}{8}$ ，

取等号时 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，所以围成矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$ ，故正确；

④：由②可知 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ ，所以四叶草包含在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的内部，

因为圆的面积为： $S = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$ ，所以四叶草的面积小于 $\frac{\pi}{4}$ ，故正确。

故选：C.

【点睛】

本题考查曲线与方程的综合运用，其中涉及到曲线的对称性分析以及基本不等式的运用，难度较难.分析方程所表示曲线的对称性，可通过替换方程中 x, y 去分析证明.

4、A

【解析】

进行交集的运算即可.

【详解】

Q $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x \mid -2, x, 2\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选：A.

【点睛】

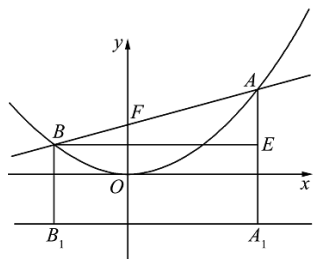
本题主要考查了列举法、描述法的定义，考查了交集的定义及运算，考查了计算能力，属于基础题.

5、C

【解析】

作 $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$; $BE \perp AA_1$, 由题意 $\sin \alpha = \frac{AE}{AB}$, 由二倍角公式即得解.

【详解】



由题意, $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, 准线 $l: y = -\frac{p}{2}$,

作 $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$; $BE \perp AA_1$,

设 $|BF| = |BB_1| = t$,

故 $|AB| = |AA_1| = 2t$, $|AE| = t$,

$$\sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{9}.$$

故选: C

【点睛】

本题考查了抛物线的性质综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

6、B

【解析】

由 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值, 可得 $a_{n+3} = a_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列, 求出 a_1, a_2, a_3 , 即求 S_{100} .

【详解】

对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值,

$$\therefore (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = 0,$$

故 $a_{n+3} = a_n$,

$\therefore \{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列,

故 $a_1 = a_7 = 2, a_2 = a_8 = 4, a_3 = a_9 = 3$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{100} &= (a_1 + a_2 + a_3) + L + (a_{97} + a_{98} + a_{99}) + a_{100} = 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 \\ &= 33(2 + 4 + 3) + 2 = 299.\end{aligned}$$

故选: B.

【点睛】

本题考查周期数列求和, 属于中档题.

7、A

【解析】

根据双曲线的渐近线列方程, 解方程求得 m 的值.

【详解】

由题意知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}x (m > 0)$, $3x + 2y = 0$ 可化为 $y = -\frac{3}{2}x$, 则 $\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{3}{2}$, 解得 $m = \frac{4}{9}$.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查双曲线的渐近线, 属于基础题.

8、D

【解析】

根据题意利用垂直直线斜率间的关系建立不等式再求解即可.

【详解】

因为过点 M 椭圆的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$, 所以切线的斜率为 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$,

$$\text{由 } \frac{y_0 + \frac{b}{x_0}}{x_0} \times \left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \right) = -1, \text{ 解得 } y_0 = \frac{b^3}{2c^2} < b, \text{ 即 } b^2 < 2c^2, \text{ 所以 } a^2 - c^2 < 2c^2,$$

$$\text{所以 } \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选: D

【点睛】

本题主要考查了建立不等式求解椭圆离心率的问题, 属于基础题.

9、C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则

$$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2, \text{ 解得 } R = 2, \text{ 得到答案.}$$

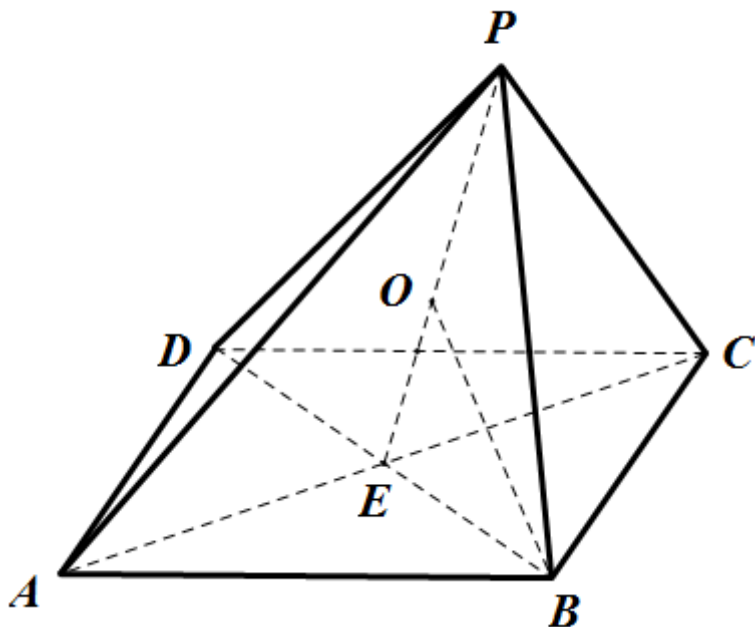
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}, \quad PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3,$$

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ 。

故选：C。



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力。

10、C

【解析】

由 $7S_2 = 4S_4$ 可得 $3(a_1 + a_2) = 4(a_3 + a_4)$ ，故可求 q 的值。

【详解】

因为 $7S_2 = 4S_4$ ，所以 $3(a_1 + a_2) = 4(S_4 - S_2) = 4(a_3 + a_4)$ ，

故 $q^2 = \frac{3}{4}$ ，因 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，故 $q > 0$ ，所以 $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故选 C。

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/188002013040006117>