

一次函数综合题

压轴题密押

通用的解题思路：

(1) 一次函数与几何图形的面积问题

首先要根据题意画出草图，结合图形分析其中的几何图形，再求出面积.

(2) 一次函数的优化问题

通常一次函数的最值问题首先由不等式找到 x 的取值范围，进而利用一次函数的增减性在前面范围内的前提下求出最值.

(3) 用函数图象解决实际问题

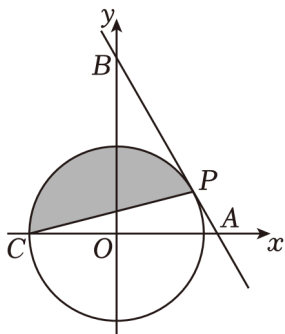
从已知函数图象中获取信息，求出函数值、函数表达式，并解答相应的问题.

压轴题预测

题目 1 (2024·鼓楼区一模) 如图，直线 $y = -\sqrt{3}x + 6$ 与 $\odot O$ 相切，切点为 P ，与 x 轴 y 轴分别交于 A 、 B 两点. $\odot O$ 与 x 轴负半轴交于点 C .

(1) 求 $\odot O$ 的半径；

(2) 求图中阴影部分的面积.

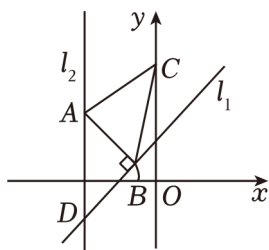


题目 2 (2023·宿豫区三模) 如图①，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = x + 1$ 与直线 $l_2: x = -2$ 相交于点 D ，点 A 是直线 l_2 上的动点，过点 A 作 $AB \perp l_1$ 于点 B ，点 C 的坐标为 $(0, 3)$ ，连接 AC ， BC 。设点 A 的纵坐标为 t ， $\triangle ABC$ 的面积为 s 。

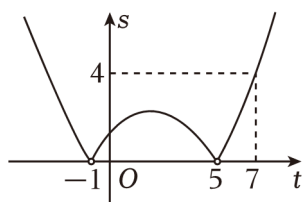
(1) 当 $t = 2$ 时，求点 B 的坐标；

(2) s 关于 t 的函数解析式为 $s = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 + bt - \frac{5}{4}(t < -1 \text{ 或 } t > 5) \\ a(t+1)(t-5) (-1 < t < 5) \end{cases}$ ，其图象如图②所示，结合图①、②的信息，求出 a 与 b 的值；

(3) 在直线 l_2 上是否存在点 A ，使得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，若存在，请求出此时点 A 的坐标；若不存在，请说明理由。



①



②

题目 3 (2023·溧阳市一模) 如图1, 将矩形 $AOBC$ 放在平面直角坐标系中, 点 O 是原点, 点 A 坐标为 $(0, 4)$, 点 B 坐标为 $(5, 0)$, 点 P 是 x 轴正半轴上的动点, 连接 AP , $\triangle AQP$ 是由 $\triangle AOP$ 沿 AP 翻折所得到的图形.

(1) 当点 Q 落在对角线 OC 上时, $OP = \underline{\frac{16}{5}}$;

(2) 当直线 PQ 经过点 C 时, 求 PQ 所在的直线函数表达式;

(3) 如图2, 点 M 是 BC 的中点, 连接 MP 、 MQ .

① MQ 的最小值为 _____;

② 当 $\triangle PMQ$ 是以 PM 为腰的等腰三角形时, 请直接写出点 P 的坐标.

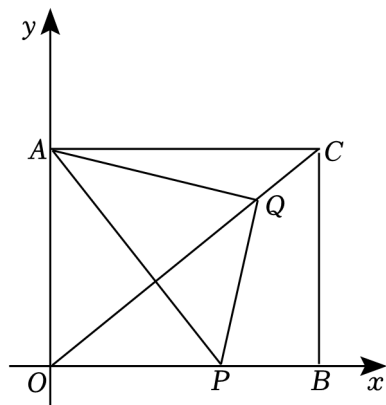


图1

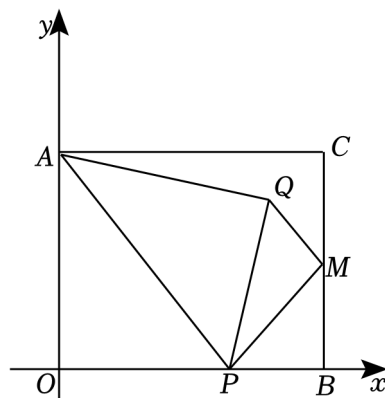


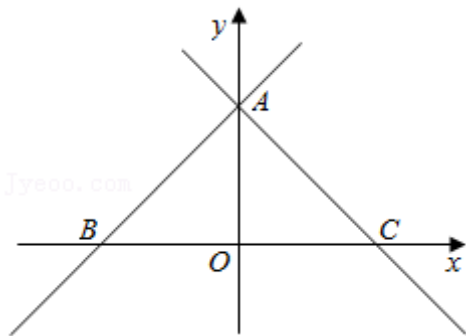
图2

题目 4 (2022·启东市模拟) 我们知道一次函数 $y = mx + n$ 与 $y = -mx + n (m \neq 0)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以我们定义: 函数 $y = mx + n$ 与 $y = -mx + n (m \neq 0)$ 互为“ M ”函数.

(1) 请直接写出函数 $y = 2x + 5$ 的“ M ”函数;

(2) 如果一对“ M ”函数 $y = mx + n$ 与 $y = -mx + n (m \neq 0)$ 的图象交于点 A , 且与 x 轴交于 B, C 两点, 如图所示, 若 $\angle BAC = 90^\circ$, 且 $\triangle ABC$ 的面积是 8, 求这对“ M ”函数的解析式;

(3) 在 (2) 的条件下, 若点 D 是 y 轴上的一个动点, 当 $\triangle ABD$ 为等腰三角形时, 请求出点 D 的坐标.



题目 5 (2024·新北校区校级模拟) 如图①, 动点 P 从矩形 $ABCD$ 的顶点 A 出发, 以 v_1 的速度沿折线 $A-B-$

C 向终点 C 运动;同时,一动点 Q 从点 D 出发,以 v_2 的速度沿 DC 向终点 C 运动,当一个点到达终点时,另一个点也停止运动.点 E 为 CD 的中点,连接 PE , PQ ,记 $\triangle EPQ$ 的面积为 S ,点 P 运动的时间为 t ,其函数图象为折线 $MN-NF$ 和曲线 FG (图②),已知, $ON=4$, $NH=1$,点 G 的坐标为 $(8,0)$.

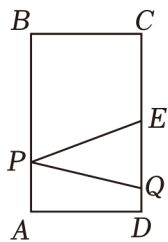
(1) 点 P 与点 Q 的速度之比 $\frac{v_1}{v_2}$ 的值为 $-\frac{8}{5}$; $\frac{AB}{AD}$ 的值为 _____;

(2) 如果 $OM=15$.

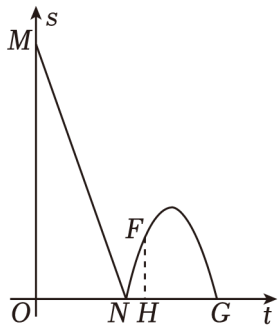
①求线段 NF 所在直线的函数表达式;

②求 FG 所在曲线的函数表达式;

③是否存在某个时刻 t ,使得 $S \geq \frac{15}{4}$? 若存在,求出 t 的取值范围;若不存在,请说明理由.



图①



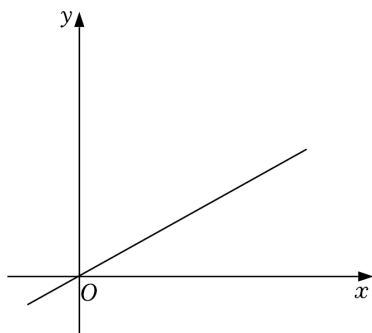
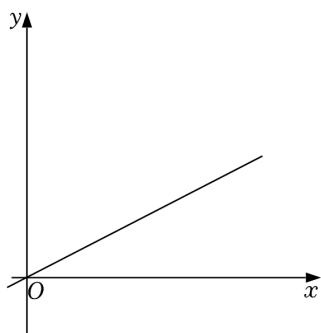
图②

题目 6 (2024·梁溪区校级模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中,二次函数 $y=-ax^2+3ax+4a$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点(点 A 在点 B 的左侧),与 y 轴正半轴交于点 C ,直线 $y=\frac{1}{2}x$ 交于第一象限内的 D 点,且 $\triangle ABC$ 的面积为10.

(1) 求二次函数的表达式;

(2) 点 E 为 x 轴上一点,过点 E 作 y 轴的平行线交线段 OD 于点 F ,交抛物线于点 G ,当 $GF=\sqrt{5}OF$ 时,求点 G 的坐标;

(3) 已知点 $P(n,0)$ 是 x 轴上的点,若点 P 关于直线 OD 的对称点 Q 恰好落在二次函数的图象上,求 n 的值.



(备用图)

题目 7 (2023·邗江区校级一模) 如图1,在平面直角坐标系中,直线 $l:y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4\sqrt{3}$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 点和 B 点,过 O 点作 $OD \perp AB$ 于 D 点,以 OD 为边构造等边 $\triangle EDF$ (F 点在 x 轴的正半轴上).

(1) 求 A 、 B 点的坐标,以及 OD 的长;

(2) 将等边 $\triangle EDF$,从图1的位置沿 x 轴的正方向以每秒1个单位的长度平移,移动的时间为 $t(s)$,同时点 P

从 E 出发,以每秒 2 个单位的速度沿着折线 $ED-DF$ 运动(如图 2 所示),当 P 点到 F 点停止, $\triangle DEF$ 也随之停止.

① $t = \underline{\hspace{2cm}}$ (s) 时,直线 l 恰好经过等边 $\triangle EDF$ 其中一条边的中点;

② 当点 P 在线段 DE 上运动,若 $DM = 2PM$,求 t 的值;

③ 当点 P 在线段 DF 上运动时,若 $\triangle PMN$ 的面积为 $\sqrt{3}$,求出 t 的值.

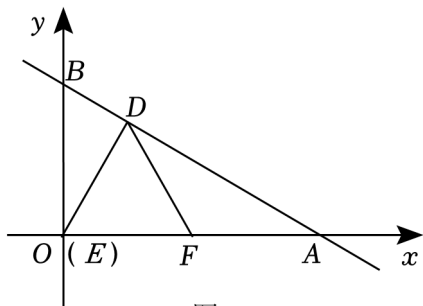


图1

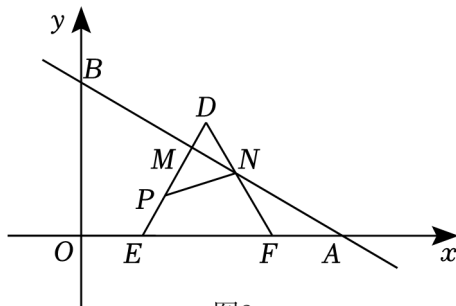


图2

题目 8 (2023·武进区校级模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中,对于任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 的“非常距离”,给出如下定义:

若 $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$,则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|x_1 - x_2|$;

若 $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$,则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|y_1 - y_2|$.

例如:点 $P_1(1, 2)$,点 $P_2(3, 5)$,因为 $|1 - 3| < |2 - 5|$,所以点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|2 - 5| = 3$,也就是图 1 中线段 P_1Q 与线段 P_2Q 长度的较大值(点 Q 为垂直于 y 轴的直线 P_1Q 与垂直于 x 轴的直线 P_2Q 交点).

(1) 已知点 $A(-\frac{1}{2}, 0)$, B 为 y 轴上的一个动点,

① 若点 A 与点 B 的“非常距离”为 2,写出一个满足条件的点 B 的坐标;

② 直接写出点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值;

(2) 已知 C 是直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 上的一个动点,

① 如图 2,点 D 的坐标是 $(0, 1)$,求点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值及相应的点 C 的坐标;

② 如图 3, E 是以原点 O 为圆心,1 为半径的圆上的一个动点,求点 C 与点 E 的“非常距离”的最小值及相应的点 E 与点 C 的坐标.

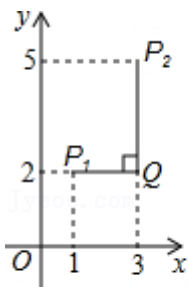


图1

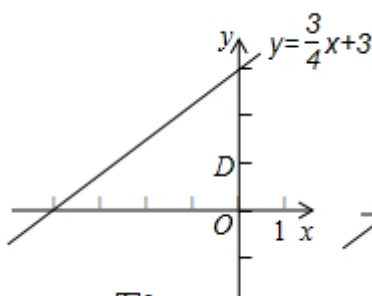


图2

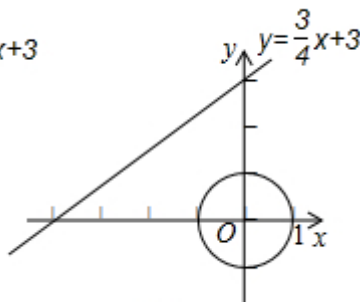


图3

题目 9 (2023·海安市一模) 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W 和点 P ,给出如下定义: F 为图形 W 上任意一点,将 P, F 两点间距离的最小值记为 m ,最大值记为 M ,称 M 与 m 的差为点 P 到图形 W 的“差距”,记作 $d(P, W)$,即 $d(P, W) = M - m$,已知点 $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$

(1) 求 $d(O, AB)$;

(2) 点 C 为直线 $y = -1$ 上的一个动点,当 $d(C, AB) = 1$ 时,点 C 的横坐标是 $\underline{\hspace{2cm}} (2 - \sqrt{5})$ 或 $(\sqrt{5} - 2, \underline{\hspace{2cm}})$;

(3) 点 D 为函数 $y = x + b (-2 \leq x \leq 2)$ 图象上的任意一点,当 $d(D, AB) \leq 2$ 时,直接写出 b 的取值范围.

题目 10 (2022· 姑苏区校级模拟) 平面直角坐标系 xOy 中, 对于任意的三个点 A, B, C , 给出如下定义: 若矩形的任何一条边均与某条坐标轴平行, 且 A, B, C 三点都在矩形的内部或边界上, 则称该矩形为点 A, B, C 的“三点矩形”. 在点 A, B, C 的所有“三点矩形”中, 若存在面积最小的矩形, 则称该矩形为点 A, B, C 的“最佳三点矩形”.

如图 1, 矩形 $DEFG$, 矩形 $IJCH$ 都是点 A, B, C 的“三点矩形”, 矩形 $IJCH$ 是点 A, B, C 的“最佳三点矩形”.

如图 2, 已知 $M(4, 1), N(-2, 3)$, 点 $P(m, n)$.

- (1) ①若 $m=2, n=4$, 则点 M, N, P 的“最佳三点矩形”的周长为 _____, 面积为 _____;
- ②若 $m=2$, 点 M, N, P 的“最佳三点矩形”的面积为 24, 求 n 的值;
- (2) 若点 P 在直线 $y=-2x+5$ 上.
 - ①求点 M, N, P 的“最佳三点矩形”面积的最小值及此时 m 的取值范围;
 - ②当点 M, N, P 的“最佳三点矩形”为正方形时, 求点 P 的坐标;
- (3) 若点 $P(m, n)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上, 当且仅当点 M, N, P 的“最佳三点矩形”面积为 12 时, $-2 \leq m \leq -1$ 或 $1 \leq m \leq 3$, 直接写出抛物线的解析式.

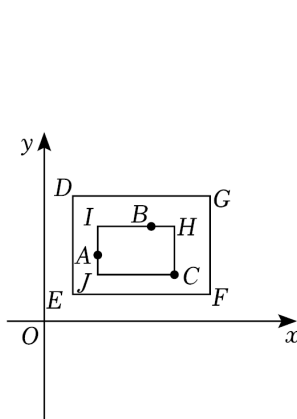


图1

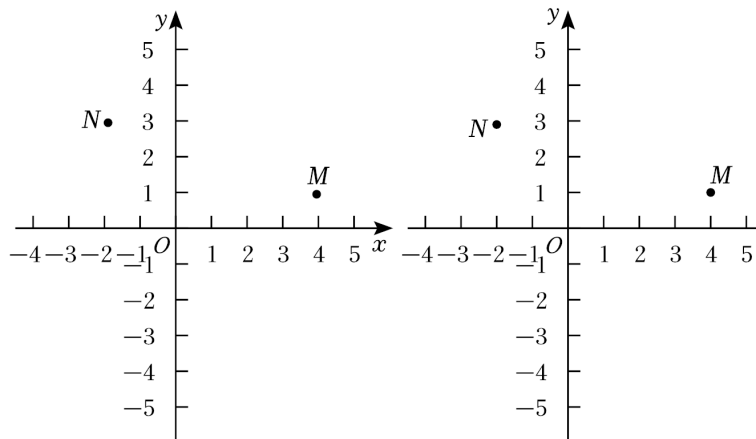
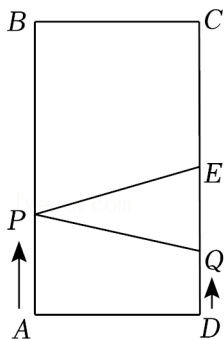


图2

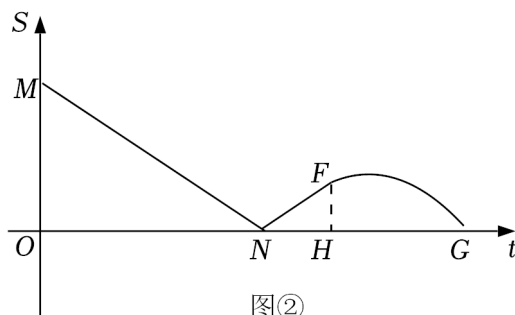
备用图

题目 11 (2022· 太仓市模拟) 如图①, 动点 P 从矩形 $ABCD$ 的顶点 A 出发, 以 v_1 的速度沿折线 $A-B-C$ 向终点 C 运动; 同时, 一动点 Q 从点 D 出发, 以 v_2 的速度沿 DC 向终点 C 运动, 当一个点到达终点时, 另一个点也停止运动. 点 E 为 CD 的中点, 连接 PE, PQ , 记 $\triangle EPQ$ 的面积为 S , 点 P 运动的时间为 t , 其函数图象为折线 $MN-NF$ 和曲线 FG (图②), 已知, $ON=3, NH=1$, 点 G 的坐标为 $(6, 0)$.

- (1) 点 P 与点 Q 的速度之比 $\frac{v_1}{v_2}$ 的值为 $\frac{3}{2}$; $AB:AD$ 的值为 _____;
- (2) 如果 $OM=2$.
 - ①求线段 NF 所在直线的函数表达式;
 - ②是否存在某个时刻 t , 使得 $S \geq \frac{2}{3}$? 若存在, 求出 t 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.



图①



图②

题目 12 (2022·邗江区校级一模) 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 P 和线段 ST , 我们定义点 P 关于线段

$$ST \text{ 的线段比 } k = \begin{cases} \frac{PS}{ST} & (PS < PT) \\ \frac{PT}{ST} & (PS \geq PT) \end{cases}.$$

(1) 已知点 $A(0,1)$, $B(1,0)$.

①点 $Q(2,0)$ 关于线段 AB 的线段比 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

②点 $C(0,c)$ 关于线段 AB 的线段比 $k = \sqrt{2}$, 求 c 的值.

(2) 已知点 $M(m,0)$, 点 $N(m+2,0)$, 直线 $y = x + 2$ 与坐标轴分别交于 E, F 两点, 若线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k \leq \frac{1}{4}$, 直接写出 m 的取值范围.

题目 13 (2022·泰州) 定义: 对于一次函数 $y_1 = ax + b$, $y_2 = cx + d$, 我们称函数 $y = m(ax + b) + n(cx + d)$ ($ma + nc \neq 0$) 为函数 y_1, y_2 的“组合函数”.

(1) 若 $m = 3, n = 1$, 试判断函数 $y = 5x + 2$ 是否为函数 $y_1 = x + 1, y_2 = 2x - 1$ 的“组合函数”, 并说明理由;

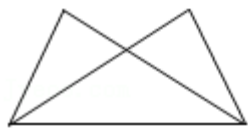
(2) 设函数 $y_1 = x - p - 2$ 与 $y_2 = -x + 3p$ 的图像相交于点 P .

①若 $m + n > 1$, 点 P 在函数 y_1, y_2 的“组合函数”图像的上方, 求 p 的取值范围;

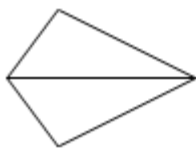
②若 $p \neq 1$, 函数 y_1, y_2 的“组合函数”图像经过点 P . 是否存在大小确定的 m 值, 对于不等于 1 的任意实数 p , 都有“组合函数”图像与 x 轴交点 Q 的位置不变? 若存在, 请求出 m 的值及此时点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

题目 14 (2024·钟楼区校级模拟) 在同一平面内, 具有一条公共边且不完全重合的两个全等三角形, 我们称这两个三角形叫做“共边全等”.

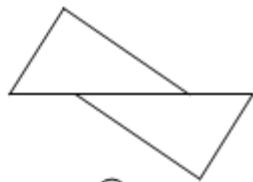
(1) 下列图形中两个三角形不是“共边全等”是 _____;



①



②



③

(2) 如图 1, 在边长为 6 的等边三角形 ABC 中, 点 D 在 AB 边上, 且 $AD = \frac{1}{3}AB$, 点 E, F 分别在 AC, BC 边上, 满足 $\triangle BDF$ 和 $\triangle EDF$ 为“共边全等”, 求 CF 的长;

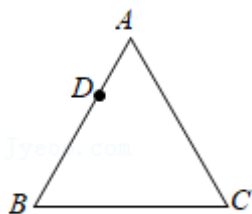


图1

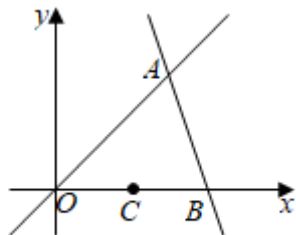
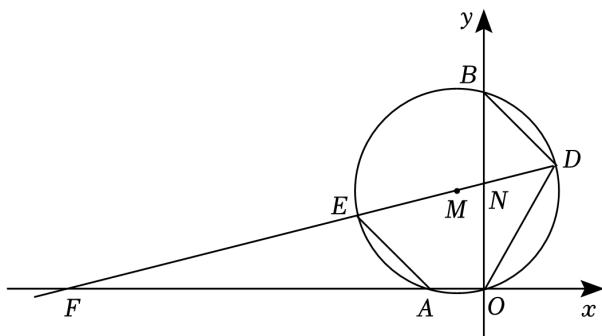


图2

(3) 如图2,在平面直角坐标系中,直线 $y = -3x + 12$ 分别与直线 $y = x$ 、 x 轴相交于 A 、 B 两点,点 C 是 OB 的中点, P 、 Q 在 $\triangle AOB$ 的边上,当以 P 、 B 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle PCB$ “共边全等”时,请直接写出点 Q 的坐标.

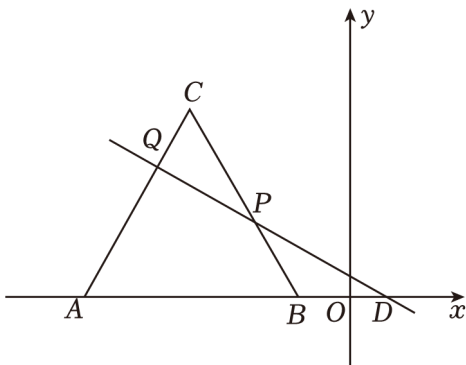
题目 15 (2023·新北区校级二模) 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,点 A 、点 B 的坐标分别为 $(-2,0)$ 、 $(0,8)$. 经过 A 、 B 、 O 三点的圆的圆心为 M ,过点 M 的直线与 $\odot M$ 的公共点是 D 、 E ,与 x 轴交于点 F ,与 y 轴交于点 N ,连接 AE 、 OD 、 BD . 已知 $\angle ODF = 45^\circ$.

- (1) $\odot M$ 的直径为 $2\sqrt{17}$, 点 M 的坐标为 _____;
- (2) 求直线 DF 所对应的函数表达式;
- (3) 若 P 是线段 AF 上的动点, $\angle PEA$ 与 $\triangle BDO$ 的一个内角相等,求 OP 的长度.



题目 16 (2023·梁溪区模拟) 如图,以 $A(-9,0)$ 、 $B(-2,0)$ 为顶点作等边 $\triangle ABC$,点 C 在第二象限.

- (1) 求直线 BC 所对应的函数表达式.
- (2) 过点 $D(1,0)$ 作一条直线交 BC 于点 P ,交 AC 于点 Q ,且 $DP:PQ = 3:2$.
 - ① 求点 P 的坐标与 $\angle BPD$ 的度数;
 - ② 在 y 轴上是否存在这样的点 M ,使得点 M 到 $\angle BPD$ 的两边所在直线的距离相等? 若存在,请直接写出所有符合条件的点 M 的坐标;若不存在,请说明理由.



题目 17 (2023·海州区校级二模) 问题提出:

- (1) 在学习几何时,我们可以通过构造基本图形,将几何“模型”化. 例如在三角形全等与三角形的相似的学习过程中,“ k ”字形是非常重要的基本图形. 如图1,已知: $\angle ADC = \angle BEC = \angle ACB = 90^\circ$, D 、 C 、 E 三

点共线, $AC=BC$, 由 ASA 易证 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$;

如图2, 已知: $\angle ADC = \angle BEC = \angle ACB = 90^\circ$, D, C, E 三点共线, 若 $AC=6, BC=3, BE=1$, 则 AD 的长为 $4\sqrt{2}$;

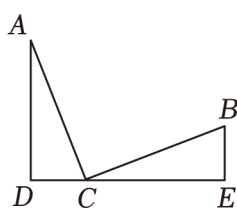


图1

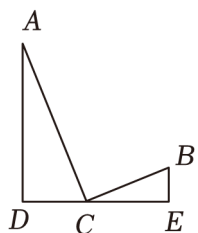


图2

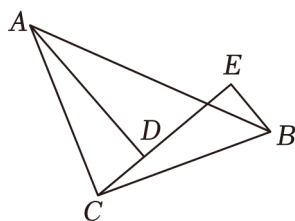


图3

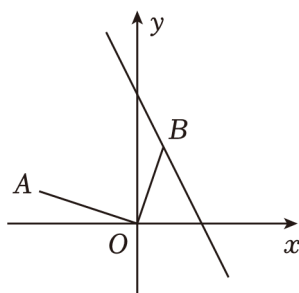


图4

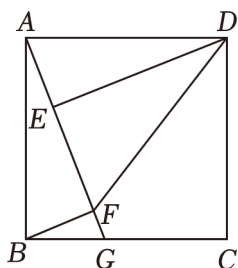


图5

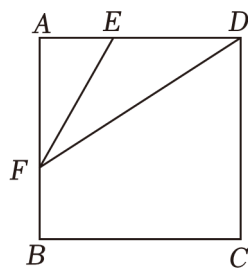


图6

问题探究:

(2) ①如图3, 已知: $\angle ADC = \angle BEC = \angle ACB = 90^\circ$, $AC=BC$, D, C, E 三点共线, 求证: $AD = BE + DE$;

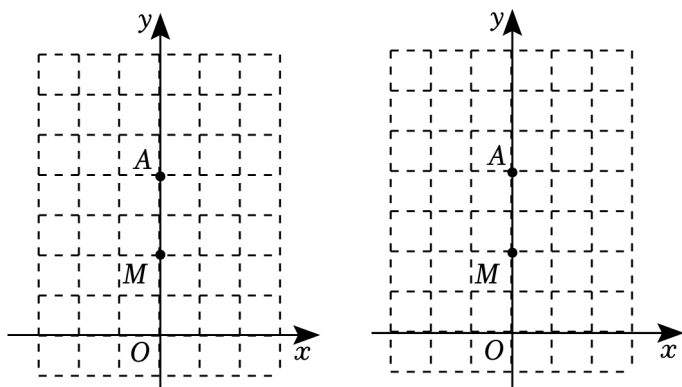
②如图4, 已知点 $A(-3,1)$, 点 B 在直线 $y=-2x+4$ 上, 若 $\angle AOB=90^\circ$, 则此时点 B 的坐标为 _____;

问题拓展:

(3) 如图5, 正方形 $ABCD$ 中, 点 G 是 BC 边上一点, $BF \perp AG$, $DE \perp AG$, 垂足分别为 F, E . 若 $AE=1$, 四边形 $ABFD$ 的面积等于10, 求正方形 $ABCD$ 的面积.

(4) 如图6, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 AD, AB 边上, $AE=BF$, 连接 EF, DF , 则 $\frac{EF}{DF}$ 的最小值是 _____.

题目 18 (2023·金坛区一模) 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 A , 记线段 OA 的中点为 M . 若点 A, M, P, Q 按逆时针方向排列构成菱形 $AMPQ$, 其中 $\angle QAM = \alpha^\circ (0 < \alpha < 180)$, 则把菱形 $AMPQ$ 称为点 A 的“ α° 菱形” $AMPQ$, 把菱形 $AMPQ$ 边上所有点都称为点 A 的“ α° 菱点”. 已知点 $A(0,4)$.



(图1)

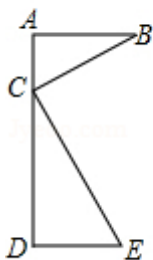
(备用图)

- (1) 在图1中,用直尺和圆规作出点A的“ 60° 菱形” $AMPQ$,并直接写出点P的坐标(不写作法,保留作图痕迹);
- (2) 若点 $B(1,1)$ 是点A的“ α° 菱点”,求 α 的值;
- (3) 若一次函数 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 的图象上存在点A的“ α° 菱点”,直接写出 b 的取值范围.

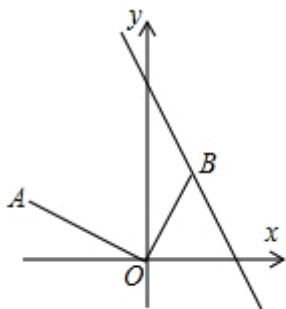
题目 19 (2022·吴中区模拟) 探究与应用:在学习几何时,我们可以通过分离和构造基本图形,将几何“模块”化.例如在相似三角形中, K 字形是非常重要的基本图形,可以建立如下的“模块”(如图①):

- (1) 请就图①证明上述“模块”的合理性. 已知: $\angle A = \angle D = \angle BCE = 90^\circ$, 求证: $\triangle ABC \sim \triangle DCE$;
- (2) 请直接利用上述“模块”的结论解决下面两个问题:

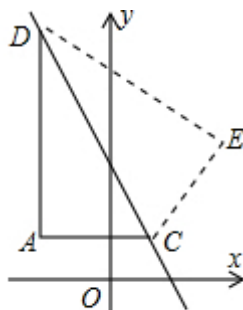
- ①如图②,已知点 $A(-2,1)$,点 B 在直线 $y = -2x + 3$ 上运动,若 $\angle AOB = 90^\circ$,求此时点 B 的坐标;
- ②如图③,过点 $A(-2,1)$ 作 x 轴与 y 轴的平行线,交直线 $y = -2x + 3$ 于点 C 、 D ,求点 A 关于直线 CD 的对称点 E 的坐标.



图①



图②



图③

题目 20 (2022·雨花台区校级模拟) 阅读并解答下列问题:在学习完《中心对称图形》一章后,老师给出了以下一个思考题:如图1,在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(0,3)$, $B(5,1)$, $C(a,0)$, $D(a+2,0)$,连接 AC , CD , DB ,求 $AC + CD + DB$ 最小值.

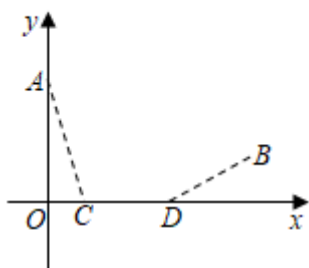


图 1

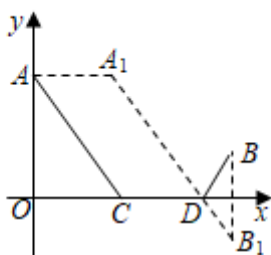


图 2

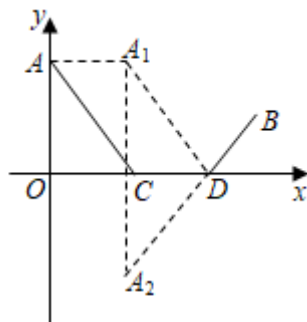


图 3

Hyee.com

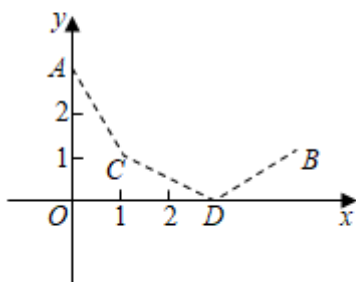


图 4

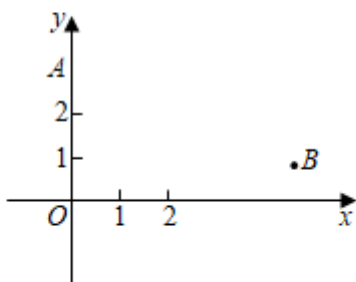


图 5

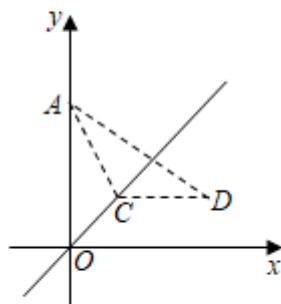


图 6

【思考交流】小明:如图 2,先将点 A 向右平移 2 个单位长度到点 A_1 ,作点 B 关于 x 轴的对称点 B_1 ,连接 A_1B_1 交 x 轴于点 D ,将点 D 向左平移 2 个单位长度得到点 C ,连接 AC . BD . 此时 $AC + CD + DB$ 的最小值等于 $A_1B_1 + CD$.

小颖:如图 3,先将点 A 向右平移 2 个单位长度到点 A_1 ,作点 A_1 关于 x 轴的对称点 A_2 ,连接 A_2B 可以求解.

小亮:对称和平移还可以有不同的组合...

【尝试解决】在图 2 中, $AC + CD + DB$ 的最小值是 _____.

【灵活应用】如图 4,在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(0,3)$, $B(5,1)$, $C(a,1)$, $D(a+2,0)$,连接 AC , CD , DB ,则 $AC + CD + DB$ 的最小值是 _____,此时 $a =$ _____,并请在图 5 中用直尺和圆规作出 $AC + CD + DB$ 最小时 CD 的位置(不写作法,保留作图痕迹).

【拓展提升】如图 6,在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(0,3)$, C 是一次函数 $y = x$ 图象上一点, CD 与 y 轴垂直且 $CD = 2$ (点 D 在点 C 右侧),连接 AC , CD , AD ,直接写出 $AC + CD + DA$ 的最小值是 _____,此时点 C 的坐标是 _____.

题目 21 (2022·滨海县校级三模) 定义:若一个函数的图象上存在横、纵坐标之和为零的点,则称该点为这个函数图象的“好点”,例如,点 $(-1,1)$ 是函数 $y = x + 2$ 的图象的“好点”.

(1) 在函数① $y = -x + 5$, ② $y = \frac{6}{x}$, ③ $y = x^2 + 2x + 1$ 的图象上,存在“好点”的函数是 _____ (填序号).

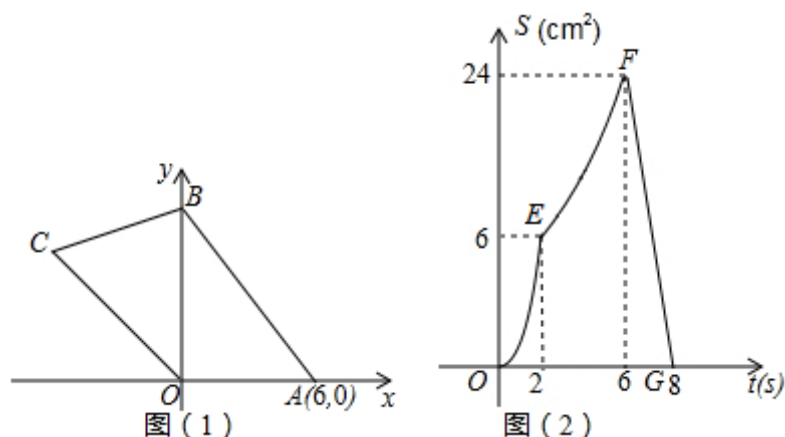
(2) 设函数 $y = \frac{4}{x} (x < 0)$ 与 $y = kx - 1$ 的图象的“好点”分别为点 A 、 B ,过点 A 作 $AC \perp y$ 轴,垂足为 C .

当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,求 k 的值;

(3) 若将函数 $y = 2x^2 + 4x$ 的图象在直线 $y = m$ 下方的部分沿直线 $y = m$ 翻折,翻折后的部分与图象的其余部分组成了一个新的图象. 当该图象上恰有 3 个“好点”时,求 m 的值.

题目 22 (2022·宜兴市校级一模) 如图(1),在平面直角坐标系中,四边形 $OABC$ 的顶点 O 是坐标原点,点 A 坐标 $(6,0)$,点 B 在 y 轴上,点 C 在第二象限角平分线上,动点 P 、 Q 同时从点 O 出发,点 P 以 1cm/s 的速度沿 $O \rightarrow A \rightarrow B$ 匀速运动到终点 B ;点 Q 沿 $O \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 运动到终点 A ,点 Q 在线段 OC 、 CB 、 BA 上分

别做匀速运动,速度分别为 $V_1\text{cm/s}$ 、 $V_2\text{cm/s}$ 、 $V_3\text{cm/s}$. 设点 P 运动的时间为 $t(\text{s})$, $\triangle OPQ$ 的面积为 $S(\text{cm}^2)$, 已知 S 与 t 之间的部分函数关系如图 (2) 中的曲线段 OE 、曲线段 EF 和线段 FG 所示.



- (1) $V_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $V_2 = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 求曲线段 EF 的解析式;
- (3) 补全函数图象 (请标注必要的数据);
- (4) 当点 P 、 Q 在运动过程中是否存在这样的 t , 使得直线 PQ 把四边形 $OABC$ 的面积分成 11:13 两部分, 若存在直接写出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

一次函数综合题

压轴题密押

通用的解题思路：

(1) 一次函数与几何图形的面积问题

首先要根据题意画出草图，结合图形分析其中的几何图形，再求出面积.

(2) 一次函数的优化问题

通常一次函数的最值问题首先由不等式找到 x 的取值范围，进而利用一次函数的增减性在前面范围内的前提下求出最值.

(3) 用函数图象解决实际问题

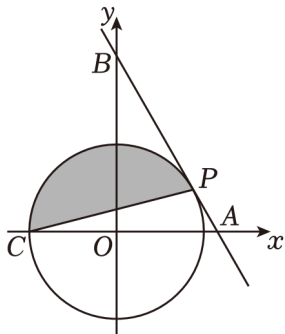
从已知函数图象中获取信息，求出函数值、函数表达式，并解答相应的问题.

压轴题预测

题目 1 (2024·鼓楼区一模) 如图，直线 $y = -\sqrt{3}x + 6$ 与 $\odot O$ 相切，切点为 P ，与 x 轴 y 轴分别交于 A 、 B 两点. $\odot O$ 与 x 轴负半轴交于点 C .

(1) 求 $\odot O$ 的半径；

(2) 求图中阴影部分的面积.



【分析】(1) 由 $OP = OA \cdot \sin 60^\circ$ ，即可求解；

(2) 由图中阴影部分的面积 $= S_{\text{扇形} COP} - S_{\triangle POC}$ ，即可求解.

【解答】解：(1) 对于直线 $y = -\sqrt{3}x + 6$ ，令 $y = -\sqrt{3}x + 6 = 0$ ，

则 $x = 2\sqrt{3}$ ，即 $OA = 2\sqrt{3}$ ，

由一次函数的表达式知， $OB = 6$ ，

则 $\tan \angle BAC = \frac{OB}{AO} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ，

则 $\angle BAC = 60^\circ$

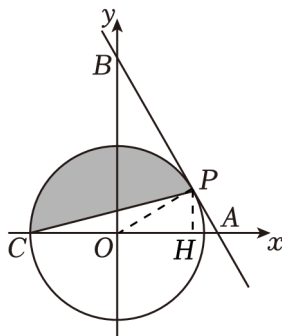
连接 OP ，则 $OP \perp AB$ ，

则 $OP = OA \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ ；

(2) 过点 P 作 $PH \perp AC$ 于点 H ，

$\therefore \angle POH = 30^\circ$ ，则 $\angle POC = 150^\circ$ ，

$PH = \frac{1}{2}OP = \frac{3}{2}$ ，



则图中阴影部分的面积 $= S_{\text{扇形} COP} - S_{\triangle POC} = \frac{150^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 3^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{15\pi - 9}{4}$.

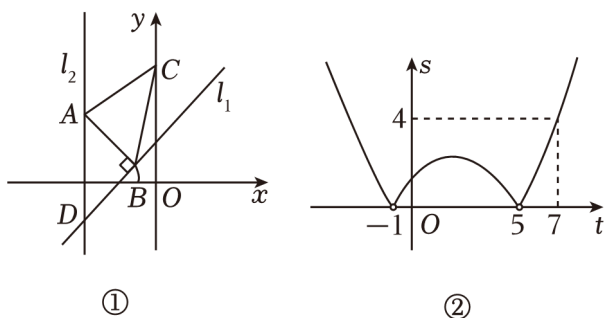
【点评】本题考查了一次函数和圆的综合运用,涉及到圆切线的和一次函数的性质,解直角三角形,面积的计算等,综合性强,难度适中.

题目 2 (2023·宿豫区三模) 如图①,在平面直角坐标系中,直线 $l_1: y = x + 1$ 与直线 $l_2: x = -2$ 相交于点 D ,点 A 是直线 l_2 上的动点,过点 A 作 $AB \perp l_1$ 于点 B ,点 C 的坐标为 $(0, 3)$,连接 AC, BC . 设点 A 的纵坐标为 t , $\triangle ABC$ 的面积为 s .

(1) 当 $t = 2$ 时,求点 B 的坐标;

(2) s 关于 t 的函数解析式为 $s = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 + bt - \frac{5}{4}(t < -1 \text{ 或 } t > 5) \\ a(t+1)(t-5)(-1 < t < 5) \end{cases}$, 其图象如图②所示,结合图①、②的信息,求出 a 与 b 的值;

(3) 在直线 l_2 上是否存在点 A ,使得 $\angle ACB = 90^\circ$,若存在,请求出此时点 A 的坐标;若不存在,请说明理由.



【分析】(1) 解法一:先根据 $t = 2$ 可得点 $A(-2, 2)$, 因为 B 在直线 l_1 上, 所以设 $B(x, x + 1)$, 利用 $y = 0$ 代入 $y = x + 1$ 可得 G 点的坐标, 在 $Rt\triangle ABG$ 中, 利用勾股定理列方程可得点 B 的坐标;

解法二:根据可以使用 $y = x + 1$ 与 x 轴正半轴夹角为 45° 来解答;

(2) 先把 $(7, 4)$ 代入 $s = \frac{1}{4}t^2 + bt - \frac{5}{4}$ 中计算得 b 的值, 计算在 $-1 < t < 5$ 范围内图象上一个点的坐标值: 当

$t = 2$ 时, 根据 (1) 中的数据可计算此时 $s = \frac{9}{4}$, 可得坐标 $(2, \frac{9}{4})$, 代入 $s = a(t+1)(t-5)$ 中可得 a 的值;

(3) 存在, 设 $B(x, x + 1)$, 如图 5 和图 6, 分别根据两点的距离公式和勾股定理列方程可解答.

【解答】解: (1) 解法一: 如图 1, 连接 AG ,

当 $t = 2$ 时, $A(-2, 2)$,

设 $B(x, x + 1)$,

在 $y = x + 1$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

$\therefore G(0, 1)$,

$\therefore AB \perp l_1$,

$\therefore \angle ABG = 90^\circ$,

$\therefore AB^2 + BG^2 = AG^2$,

即 $(x + 2)^2 + (x + 1 - 2)^2 + x^2 + (x + 1 - 1)^2 = (-2)^2 + (2 - 1)^2$,

解得: $x_1 = 0$ (舍), $x_2 = -\frac{1}{2}$,

$\therefore B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

解法二: 如图 1-1, 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于 E , 过点 A 作 $AH \perp BE$ 于 H ,

当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

当 $y = 0$ 时, $x + 1 = 0$,

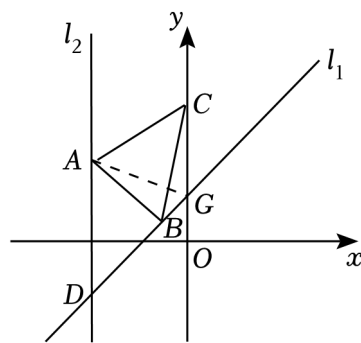


图1

则 $x = -1$,
 $\therefore OF = OG = 1$,
 $\therefore \angle GOF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle OGF = \angle OFG = 45^\circ$,
 $\therefore BE = EF$,
 $\therefore \angle ABD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABH = \angle BAH = 45^\circ$,
 $\therefore \triangle ABH$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore AH = BH$,

当 $t = 2$ 时, $A(-2, 2)$,

设 $B(x, x + 1)$,

$\therefore x + 2 = 2 - (x + 1)$,

$\therefore x = -\frac{1}{2}$,

$\therefore B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

(2) 如图 2 可知: 当 $t = 7$ 时, $s = 4$,

把 $(7, 4)$ 代入 $s = \frac{1}{4}t^2 + bt - \frac{5}{4}$ 中得: $\frac{49}{4} + 7b - \frac{5}{4} = 4$,

解得: $b = -1$,

如图 3, 过 B 作 $BH \parallel y$ 轴, 交 AC 于 H ,

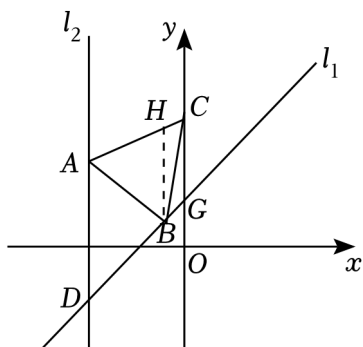


图3

由 (1) 知: 当 $t = 2$ 时, $A(-2, 2)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$\therefore C(0, 3)$,

设 AC 的解析式为: $y = kx + n$,

则 $\begin{cases} -2k + n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ n = 3 \end{cases}$,

$\therefore AC$ 的解析式为: $y = \frac{1}{2}x + 3$,

$\therefore H(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$,

$\therefore BH = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$,

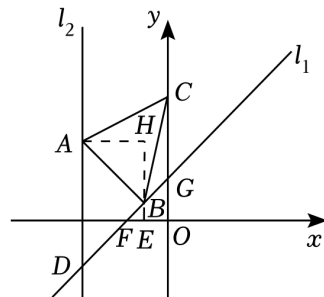


图1-1

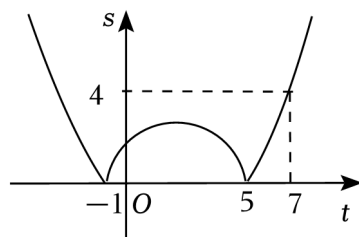


图2

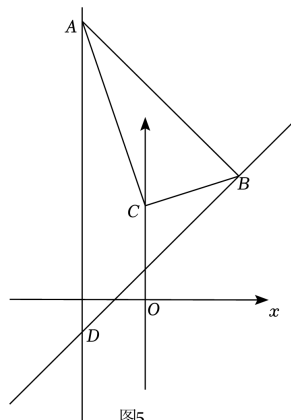


图5

$$\therefore s = \frac{1}{2}BH \cdot |x_C - x_A| = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times 2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{把 } \left(2, \frac{9}{4}\right) \text{ 代入 } s = a(t+1)(t-5) \text{ 得: } a(2+1)(2-5) = \frac{9}{4},$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{4};$$

(3) 存在, 设 $B(x, x+1)$,

当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 如图 5,

$$\because \angle ABD = 90^\circ, \angle ADB = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = BD,$$

$$\because A(-2, t), D(-2, -1),$$

$$\therefore (x+2)^2 + (x+1-t)^2 = (x+2)^2 + (x+1+1)^2,$$

$$(x+1-t)^2 = (x+2)^2,$$

$$x+1-t = x+2 \text{ 或 } x+1-t = -x-2,$$

$$\text{解得: } t = -1 \text{ (舍) 或 } t = 2x+3,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ACB \text{ 中, } AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\text{即 } (-2)^2 + (t-3)^2 + x^2 + (x+1-3)^2 = (x+2)^2 + (x+1-t)^2,$$

$$\text{把 } t = 2x+3 \text{ 代入得: } x^2 - 3x = 0,$$

$$\text{解得: } x = 0 \text{ 或 } 3,$$

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时, 如图 5, 则 } t = 2 \times 3 + 3 = 9,$$

$$\therefore A(-2, 9);$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, 如图 6,}$$

$$\text{此时, } A(-2, 3),$$

综上, 点 A 的坐标为: $(-2, 9)$ 或 $(-2, 3)$.

【点评】本题考查二次函数综合题、一次函数的性质、等腰直角三角形的判定和性质、三角形的面积、两点间距离公式等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

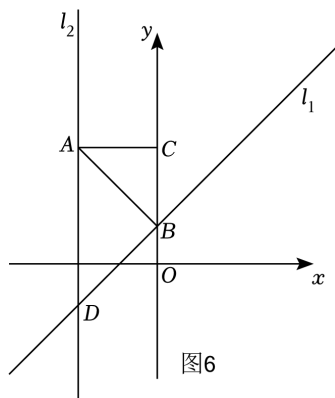


图6

题目 3 (2023·溧阳市一模) 如图 1, 将矩形 $AOBC$ 放在平面直角坐标系中, 点 O 是原点, 点 A 坐标为 $(0, 4)$, 点 B 坐标为 $(5, 0)$, 点 P 是 x 轴正半轴上的动点, 连接 AP , $\triangle AQP$ 是由 $\triangle AOP$ 沿 AP 翻折所得到的图形.

(1) 当点 Q 落在对角线 OC 上时, $OP = \underline{\frac{16}{5}}$;

(2) 当直线 PQ 经过点 C 时, 求 PQ 所在的直线函数表达式;

(3) 如图 2, 点 M 是 BC 的中点, 连接 MP 、 MQ .

① MQ 的最小值为 _____;

② 当 $\triangle PMQ$ 是以 PM 为腰的等腰三角形时, 请直接写出点 P 的坐标.

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\therefore PQ \text{ 所在直线的表达式为: } y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3};$$

(3) 如图,

$$\textcircled{1} \because AQ = AO = 4,$$

$\therefore Q$ 点的运动轨迹, 是以 A 为圆心, 4 为半径的圆弧,

$\therefore MQ$ 的最小值在 AM 的连线上, 如图, MQ' 即为所求,

$$\because M \text{ 是 } BC \text{ 中点, } CM = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\therefore AM = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29},$$

$$MQ' = MA - AQ' = \sqrt{29} - 4,$$

故答案为: $\sqrt{29} - 4$;

$\textcircled{2}$ 如图,

$$\text{设 } OP = PQ = x, BP = 5 - x,$$

$$\therefore PM^2 = (5 - x)^2 + 2^2 = x^2 - 10x + 29,$$

当 $PM = PQ$ 时,

$$PM^2 = PQ^2,$$

$$\therefore x^2 - 10x + 29 = x^2,$$

$$x = \frac{29}{10},$$

$$\therefore P\left(\frac{29}{10}, 0\right),$$

当 $MP = MQ$ 时, 如图, 若点 Q 在 AC 上,

则 $AQ = OA = 4$,

$$\because MP = MQ, MB = MC, \angle PBM = \angle QCM,$$

$$\therefore \triangle PMB \cong \triangle QMC (HL),$$

$$\therefore PB = QC,$$

$$QC = AC - AQ = 5 - 4 = 1,$$

$$\therefore PB = 1,$$

$$\therefore OP = BO - PB = 5 - 1 = 4,$$

$$\therefore P(4, 0);$$

若点 Q 在 AC 上方时,

由对称性可知 $OM = MQ$,

$$\because MQ = MQ,$$

$$\therefore MO = MP,$$

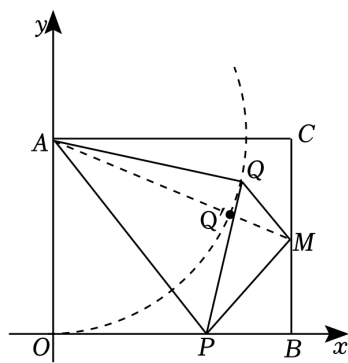
$$\therefore P(10, 0);$$

当 $MQ = PQ$ 时, 不符合题意, 不成立,

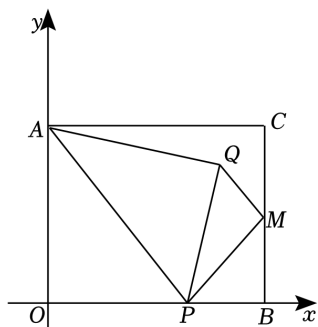
故 P 点坐标为 $P\left(\frac{29}{10}, 0\right)$ 或 $P(4, 0)$ 或 $(10, 0)$.

【点评】本题考查一次函数的图象及应用, 通过一次函数坐标图象的性质, 三角函数的性质, 全等三角形的性质和勾股定理, 来求得对应的解.

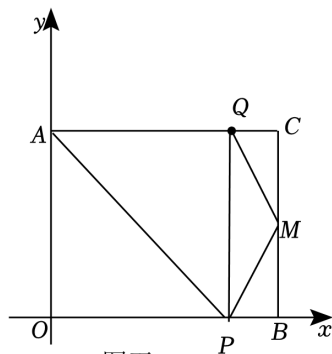
题目 4 (2022·启东市模拟) 我们知道一次函数 $y = mx + n$ 与 $y = -mx + n (m \neq 0)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以我们定义: 函数 $y = mx + n$ 与 $y = -mx + n (m \neq 0)$ 互为“ M ”函数.



图三



图四

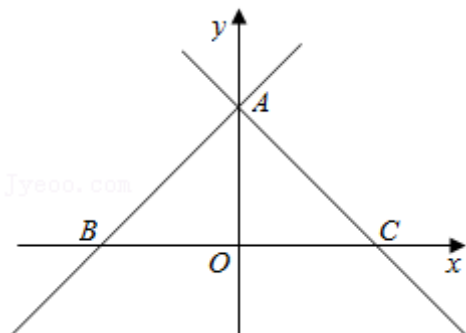


图五

(1) 请直接写出函数 $y=2x+5$ 的“M”函数；

(2) 如果一对“M”函数 $y=mx+n$ 与 $y=-mx+n(m \neq 0)$ 的图象交于点 A , 且与 x 轴交于 B, C 两点, 如图所示, 若 $\angle BAC=90^\circ$, 且 $\triangle ABC$ 的面积是 8, 求这对“M”函数的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下, 若点 D 是 y 轴上的一个动点, 当 $\triangle ABD$ 为等腰三角形时, 请求出点 D 的坐标.



【分析】(1) 根据互为“M”函数的定义, 直接写出函数 $y=2x+5$ 的“M”函数；

(2) 现根据已知条件判断 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 再根据互为“M”函数的图象关于 y 轴对称, 得出 $OA=OB=OC$, 再根据函数解析式求出点 A, B, C 的坐标, 再根据 $\triangle ABC$ 的面积是 8 求出 m, n 的值, 从而求出函数解析式；

(3) $\triangle ABD$ 为等腰三角形, 分以 A 为顶点, 以 B 为顶点, 以 D 为顶点三种情况讨论即可.

【解答】(1) 解: 根据互为“M”函数的定义,

$\therefore$ 函数 $y=2x+5$ 的“M”函数为 $y=-2x+5$;

(2) 解: 根据题意, $y=mx+n$ 和 $y=-mx+n$ 为一对“M函数”.

$\therefore AB=AC$,

又 $\because \angle BAC=90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ$,

$\therefore OB=OC$,

$\therefore \angle BAO=\angle CAO=45^\circ$,

$\therefore OA=OB=OC$,

又 $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times BC \times AO=8$ 且 $BC=2AO$,

$\therefore AO=2\sqrt{2}$,

$\therefore A, B, C$ 是一次函数 $y=mx+n$ 与 $y=-mx+n(m \neq 0)$ 的图象于坐标轴的交点,

$\therefore A(0, n), B(-\frac{n}{m}, 0), C(\frac{n}{m}, 0)$,

$\therefore OA=OB=n$,

$\therefore \frac{n}{m}=2\sqrt{2}$,

$\therefore m=1$,

$\therefore y=x+2\sqrt{2}$ 和 $y=-x+2\sqrt{2}$;

(3) 解: 根据等腰三角形的性质, 分情况,

$\therefore AO=BO=2\sqrt{2}$,

$\therefore AB=4$,

由 (2) 知, $A(0, 2\sqrt{2}), B(-2\sqrt{2}, 0), C(2\sqrt{2}, 0)$,

$\therefore$ ①以 A 为顶点, 则 $AB=AD$,

当点 D 在点 A 上方时, $AD = 2\sqrt{2} + 4$,

当点 D 在点 A 下方时, $AD = 2\sqrt{2} - 4$,

$\therefore D_1(0, 2\sqrt{2} + 4), D_2(0, 2\sqrt{2} - 4)$,

②以 B 为顶点, 则 $BA = BD$,

此时点 D 在 y 轴负半轴,

$\therefore D_3(0, -2\sqrt{2})$,

③以 D 为顶点, 则 $DA = DB$,

此时 D 为坐标原点,

$\therefore D_4(0, 0)$.

$\therefore D$ 点坐标为 $D_1(0, 2\sqrt{2} + 4), D_2(0, 2\sqrt{2} - 4), D_3(0, -2\sqrt{2}), \therefore D_4(0, 0)$.

【点评】本题考查一次函数的综合应用, 以及新定义、等腰三角形的性质等知识, 关键是理解新定义, 用新定义解题.

题目 5 (2024·新北区校级模拟) 如图①, 动点 P 从矩形 $ABCD$ 的顶点 A 出发, 以 v_1 的速度沿折线 $A-B-C$ 向终点 C 运动; 同时, 一动点 Q 从点 D 出发, 以 v_2 的速度沿 DC 向终点 C 运动, 当一个点到达终点时, 另一个点也停止运动. 点 E 为 CD 的中点, 连接 PE, PQ , 记 $\triangle EPQ$ 的面积为 S , 点 P 运动的时间为 t , 其函数图象为折线 $MN-NF$ 和曲线 FG (图②), 已知, $ON = 4, NH = 1$, 点 G 的坐标为 $(8, 0)$.

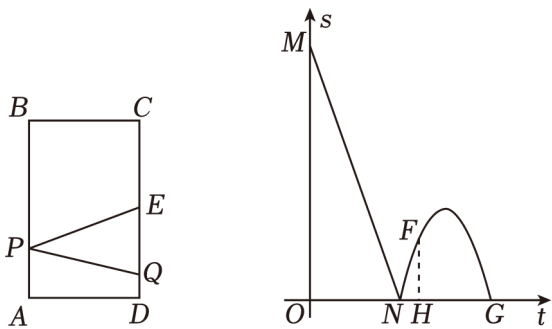
(1) 点 P 与点 Q 的速度之比 $\frac{v_1}{v_2}$ 的值为 $\frac{8}{5}$; $\frac{AB}{AD}$ 的值为 $\frac{5}{3}$;

(2) 如果 $OM = 15$.

①求线段 NF 所在直线的函数表达式;

②求 FG 所在曲线的函数表达式;

③是否存在某个时刻 t , 使得 $S \geq \frac{15}{4}$? 若存在, 求出 t 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.



图①

图②

【分析】(1) 由函数图象可知 $t = 3$ 时, Q 与 E 重合, $t = 4$ 时, P 与 B 重合, $t = 6$ 时, P 与 C 重合, 则 Q 的速度 $v_2 = \frac{DE}{4}$, P 的速度 $v_1 = \frac{AB}{4}$, 从而得出答案;

(2) ①当 $t = 0$ 时, P 与 A 重合, Q 与 D 重合, 此时 $S_{\triangle ADE} = 2$, 可得 $AD = BC = DE = 15$, $AB = CD = \frac{5}{3}AD = 10$, 从而得出点 P 与 Q 的速度, 即可得出点 F 的坐标, 利用待定系数法可得答案;

②设 FG 所在的曲线的函数解析式为 $S = a(t - 6)^2 + k (a \neq 0)$, 把 $F(5, \frac{15}{4})$, $G(8, 0)$ 代入解析式求得 a, k 值即可求解;

③利用待定系数法求出直线 MN 的函数解析式, 当 $S = \frac{15}{4}$ 时, 可得 t 的值, 根据图象可得答案.

【解答】解: (1) $\because ON = 4, NH = 1, G(8, 0)$,

$\therefore N(4, 0), H(5, 0)$,

由图象可知: $t=4$ 时, Q 与 E 重合, $t=5$ 时, P 与 B 重合, $t=8$ 时, P 与 C 重合,

$$\therefore Q \text{ 的速度 } v_2 = \frac{DE}{4}, P \text{ 的速度 } v_1 = \frac{AB}{5},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB=CD, AD=BC,$$

$\therefore E$ 为 CD 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{AB}{5}}{\frac{DE}{4}} = \frac{AB}{5} \cdot \frac{4}{DE} = \frac{8}{5},$$

$\therefore P$ 从 A 到 B 用了 5 秒, 从 B 到 C 用了 3 秒,

$$\therefore AB=5v_1, BC=3v_1,$$

$$\therefore AB = \frac{5}{3}BC,$$

$$\therefore AB:AD \text{ 的值为 } \frac{5}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{8}{5}, \frac{5}{3};$$

$$(2) \textcircled{1} \because OM=15,$$

$$\therefore M(0,15),$$

由题知, $t=0$ 时, P 与 A 重合, Q 与 D 重合,

$$\therefore S_{\triangle EPQ} = \frac{1}{2}AD \cdot DE = 15,$$

$$\therefore AB:AD = \frac{5}{3}, DE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore DE = \frac{5}{6}AD,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AD \cdot \frac{5}{6}AD = 15,$$

$$\therefore AD=BC=6(\text{舍去负值}),$$

$$\therefore AB=CD=\frac{5}{3}AD=10,$$

$$\therefore v_2 = \frac{DE}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{当 } t=5 \text{ 时, } DQ = v_2 t = \frac{5}{4} \times 5 = \frac{25}{4},$$

$$\therefore QE = DQ - DE = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}, \text{ 此时 } P \text{ 与 } B \text{ 重合},$$

$$\therefore S_{\triangle EPQ} = \frac{1}{2}EQ \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times 6 = \frac{15}{4},$$

$$\therefore F\left(5, \frac{15}{4}\right),$$

设直线 NF 的解析式为 $S=kt+b(k \neq 0)$,

$$\text{将 } N(4,0) \text{ 与 } F\left(5, \frac{15}{4}\right) \text{ 代入得: } \begin{cases} 4k+b=0 \\ 5k+b=\frac{15}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=\frac{15}{4} \\ b=-15 \end{cases},$$

$$\therefore \text{线段 } NF \text{ 所在直线的函数表达式为 } S = \frac{15}{4}t - 15 (4 < t \leq 5);$$

②设 FG 所在的曲线的数解析式为 $S = \frac{1}{2}(\frac{5}{4}t - 5)(16 - 2t) = -\frac{5}{4}t^2 + 15t - 40$,

$\therefore FG$ 所在的曲线的函数解析式为 $S = -\frac{5}{4}t^2 + 15t - 40 (5 \leq t \leq 8)$;

③存在,分情况讨论如下:

当 Q 在 DE 上, P 在 AB 上时,

$\because$ 直线 MN 经过点 $M(0, 15)$, $N(4, 0)$,

可求得直线 MN 的解析式为 $S = -\frac{5}{4}t + 15 (0 \leq t \leq 4)$,

当 $s = \frac{15}{4}$ 时, $-\frac{15}{4}t + 15 = \frac{15}{4}$,

$\therefore x = 3$,

$\because s$ 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, $S \geq \frac{15}{4}$,

当 Q 在 CE 上, P 在 BC 上时,

直线 NF 的解析式为 $S = \frac{15}{4}t - 15 (4 < t \leq 5)$;

由 $F(5, \frac{15}{4})$ 知: 当 $t = 5$ 时, $S = \frac{15}{4}$,

当 $S = \frac{15}{4}$ 时, $-\frac{5}{4}t^2 + 15t - 40 = \frac{15}{4}$,

$\therefore t = 7$ 或 5 ,

由图象知: 当 $5 \leq x \leq 7$,

x 的取值范围为 $0 \leq t \leq 3$ 或 $5 \leq t \leq 7$.

【点评】本题是一次函数综合题,主要考查了待定系数法求函数解析式,三角形的面积,矩形的性质等知识,理解函数图象中每一个拐点的意义是解题的关键.

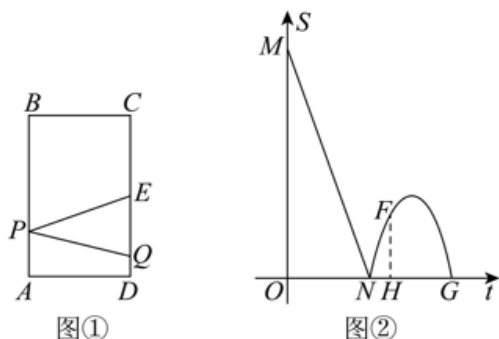
点”,请直接写出 b 的取值范围是_____.

28. 如图①, 动点 P 从矩形 $ABCD$ 的顶点 A 出发, 以 v_1 的速度沿折线 $A-B-C$ 向终点 C 运动; 同时, 一

动点 Q 从点 D 出发以 v_2 的速度沿 DC 向终点 C 运动, 当一个点到达终点时, 另一个点也停止运动. 点 E 为

CD 的中点, 连接 PE, PQ , 记 $\triangle EPQ$ 的面积为 S , 其函数图象为折线 $MN-NF$ 和曲线 FG (图②), 已知

$ON = 4$, $NH = 1$, 点 G 的坐标为 $(8, 0)$.



(1) 点 P 与点 Q 的速度之比 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值为 _____; $\frac{AB}{AD}$ 的值为 _____;

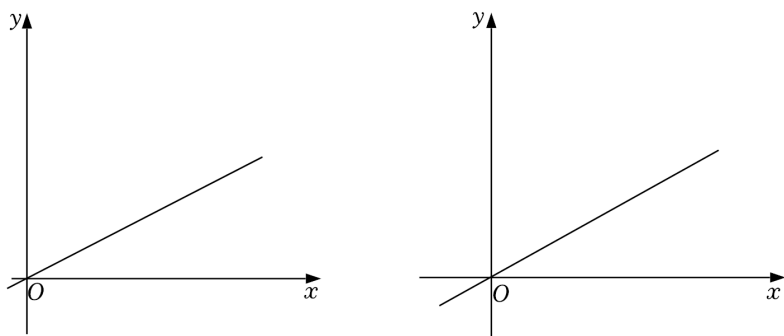
(2) 如果 $OM = 15$.

题目 6 (2024·梁溪区校级模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = -ax^2 + 3ax + 4a$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴正半轴交于点 C , 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 交于第一象限内的 D 点, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 10.

(1) 求二次函数的表达式;

(2) 点 E 为 x 轴上一点, 过点 E 作 y 轴的平行线交线段 OD 于点 F , 交抛物线于点 G , 当 $GF = \sqrt{5}OF$ 时, 求点 G 的坐标;

(3) 已知点 $P(n, 0)$ 是 x 轴上的点, 若点 P 关于直线 OD 的对称点 Q 恰好落在二次函数的图象上, 求 n 的值.



(备用图)

【分析】(1) 在 $y = -ax^2 + 3ax + 4a$ 中, 令 $y = 0$ 得 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, 根据 $\triangle ABC$ 的面积为 10, 即得 $OC = 4$, $C(0, 4)$, 用待定系数法即得二次函数的表达式为 $y = -x^2 + 3x + 4$;

(2) 设 $E(m, 0)$, 则 $F(m, \frac{1}{2}m)$, $G(m, -m^2 + 3m + 4)$, 由 $GF = \sqrt{5}OF$, 可得 $-m^2 + \frac{5}{2}m + 4 = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}m$, 即可解得 $G(2, 6)$;

(3) 连接 PQ 交直线 OD 于 K , 过 Q 作 $QT \perp x$ 轴于 T , 设 $Q(r, s)$, 可得 $K(\frac{n+r}{2}, \frac{s}{2})$, 即得 $\frac{s}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{n+r}{2}$, $n+r = 2s$ ①, 又 $r^2 + s^2 = n^2$, $(n+r)(n-r) = s^2$ ②, 可解得 $r = \frac{3}{5}n$, $s = \frac{4}{5}n$, 故 $Q(\frac{3}{5}n, \frac{4}{5}n)$, 代入 $y = -x^2 + 3x + 4$ 得 $\frac{4}{5}n = -(\frac{3}{5}n)^2 + 3 \times \frac{3}{5}n + 4$, 解得 $n = 5$ 或 $n = -\frac{20}{9}$.

【解答】解: (1) 如图:

在 $y = -ax^2 + 3ax + 4a$ 中, 令 $y = 0$ 得 $-ax^2 + 3ax + 4a = 0$,

解得 $x = 4$ 或 $x = -1$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(4, 0)$,

$\therefore AB = 5$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 10,

$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot OC = 10$, 即 $\frac{1}{2} \times 5 \cdot OC = 10$,

$\therefore OC = 4$,

$\therefore C(0, 4)$,

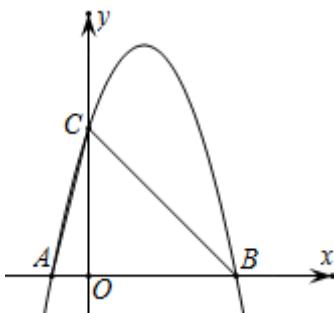
把 $C(0, 4)$ 代入 $y = -ax^2 + 3ax + 4a$ 得:

$4a = 4$,

$\therefore a = 1$,

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y = -x^2 + 3x + 4$;

(2) 如图:



$$\therefore GF = \sqrt{5}OF,$$

解得 $m=2$ 或 $m=-2$ (舍去),

$$\therefore G(2,6);$$

$\therefore P(n,0)$ 关于直线对称点为 Q ,

$$\therefore OQ = OP = |n|, K \text{ 是 } PQ \text{ 中点,}$$

设 $Q(r, s)$,

$$\therefore \frac{s}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{n+r}{2},$$

整理得: $n+r=2s$ ①,

$$\because OT^2 + QT^2 = OQ^2,$$

$$\therefore r^2 + s^2 = n^2,$$

变形得: $(n+r)(n-r)=s^2$ ②,

把①代入②得: $2s(n-r) = s^2$,

$$\because s \neq 0,$$

$$\therefore n - r = \frac{s}{2} \quad (3),$$

由①③可得 $r = \frac{3}{5}n, s = \frac{4}{5}n,$

$$\therefore Q\left(\frac{3}{5}n, \frac{4}{5}n\right),$$

$\therefore Q$ 在抛物线 $y = -x^2 + 3x + 4$ 上,

$$\therefore \frac{4}{5}n = -\left(\frac{3}{5}n\right)^2 + 3 \times \frac{3}{5}n + 4,$$

解得 $n=5$ 或 $n=-\frac{20}{9}$,

答: n 的值为 5 或 $-\frac{20}{9}$.

【点评】本题考查一次函数、二次函数综合应用,涉及待定系数法,三角形面积,对称变换等知识,解题的关键是用含 n 的代数式表示 Q 的坐标.

题目 7 (2023·邗江区校级一模) 如图1, 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 点和 B 点, 过 O 点作 $OD \perp AB$ 于 D 点, 以 OD 为边构造等边 $\triangle EDF$ (F 点在 x 轴的正半轴上).

- (1) 求 A 、 B 点的坐标, 以及 OD 的长;
- (2) 将等边 $\triangle EDF$, 从图 1 的位置沿 x 轴的正方向以每秒 1 个单位的长度平移, 移动的时间为 $t(s)$, 同时点 P 从 E 出发, 以每秒 2 个单位的速度沿着折线 $ED-DF$ 运动 (如图 2 所示), 当 P 点到 F 点停止, $\triangle DEF$ 也随之停止.

- ① $t = 3$ 或 6 (s) 时, 直线 l 恰好经过等边 $\triangle EDF$ 其中一条边的中点;
 ② 当点 P 在线段 DE 上运动, 若 $DM = 2PM$, 求 t 的值;
 ③ 当点 P 在线段 DF 上运动时, 若 $\triangle PMN$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求出 t 的值.

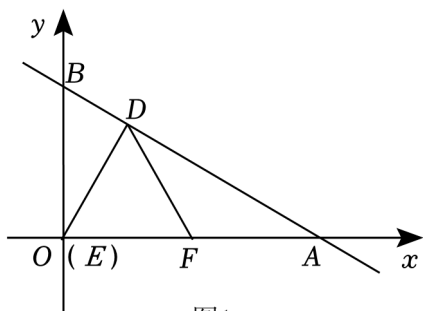


图1

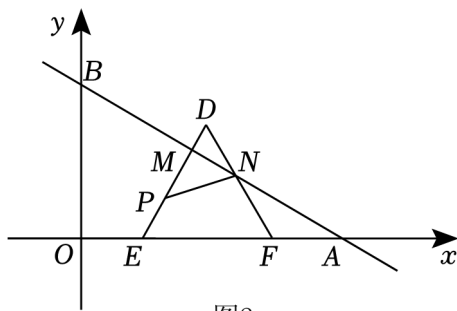


图2

【分析】(1) 把 $x=0, y=0$ 分别代入 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$, 即可求出点 A, B 的坐标, 求出 $\angle BAO = 30^\circ$, 根据直角三角形的性质, 即可得出 $OD = \frac{1}{2}OA = 6$;

(2) ① 当直线 l 分别过 DE, DF, EF 的中点, 分三种情况进行讨论, 得出 t 的值, 并注意点 P 运动的最长时间;

② 分点 P 在直线 l 的下方和直线 l 上方两种情况进行讨论, 求出 t 的值即可;

③ 分点 P 在 DN 之间和点 P 在 NF 之间两种情况进行讨论, 求出 t 的值即可.

【解答】解: (1) 令 $x=0$, 则 $y=4\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4\sqrt{3})$,

令 $y=0$, 则 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3} = 0$,

解得 $x=12$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(12, 0)$,

$\therefore \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle BAO = 30^\circ$,

$\therefore OD \perp AB$,

$\therefore \angle ODA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ODA$ 为直角三角形,

$\therefore OD = \frac{1}{2}OA = 6$;

(2) ① 当直线 l 过 DF 的中点 G 时,

$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形,

$\therefore \angle DFE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAO = 30^\circ$,

$\therefore \angle FGA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,

$\therefore \angle FGA = \angle BAO$,

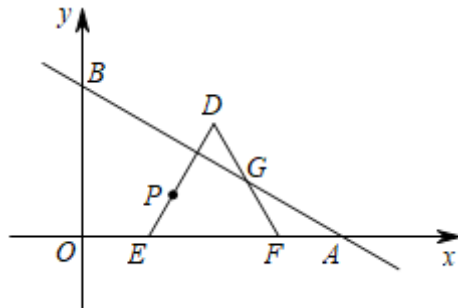
$\therefore FA = FG = \frac{1}{2}DF = 3$,

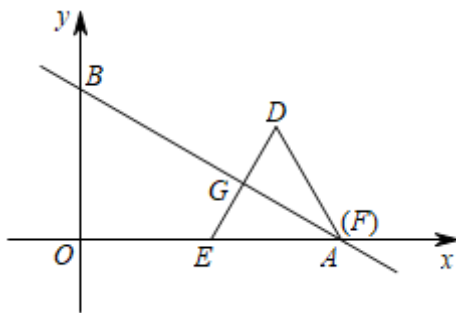
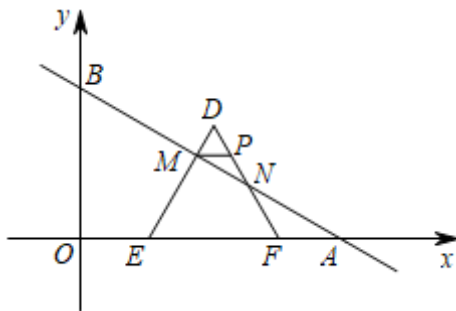
$\therefore OF = OA - FA = 9$,

$\therefore OE = OF - EF = 9 - 6 = 3$,

$\therefore t = 3$;

当 l 过 DE 的中点时,



$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} t \left(3 - \frac{1}{2} t \right) = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} t \left(3 - \frac{1}{2} t \right) = \sqrt{3},$$


综上所述, t 的值为 $4s$.

图3

【分析】(1) ①根据点 B 位于 y 轴上, 可以设点 B 的坐标为 $(0, y)$. 由“非常距离”的定义可以确定 $|0 - y| = 2$, 据此可以求得 y 的值;

②设点 B 的坐标为 $(0, y)$. 因为 $\left| -\frac{1}{2} - 0 \right| \geq |0 - y|$, 所以点 A 与点 B 的“非常距离”最小值为 $\left| -\frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2}$;

(2) ①设点 C 的坐标为 $(x_0, \frac{3}{4}x_0 + 3)$. 根据材料“若 $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$, 则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|x_1 - x_2|$ ”知, C 、 D 两点的“非常距离”的最小值为 $-x_0 = \frac{3}{4}x_0 + 2$, 据此可以求得点 C 的坐标;

②根据“非常距离”的定义, 点 E 在过原点且与直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 垂直的直线上, 且 C 与 E 的横纵坐标差相等时, 点 C 与点 E 的“非常距离”取最小值, 据此求出 C 与 E 的坐标及“非常距离”的最小值.

【解答】解: (1) ① $\because B$ 为 y 轴上的一个动点,

$\therefore$ 设点 B 的坐标为 $(0, y)$.

$$\because \left| -\frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2} \neq 2,$$

$$\therefore |0 - y| = 2,$$

解得, $y = 2$ 或 $y = -2$;

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$;

②点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值为 $\frac{1}{2}$.

(2) ①如图 2, 当点 C 与点 D 的“非常距离”取最小值时, 需要根据运算定义“若 $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$, 则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|x_1 - x_2|$ ”解答, 此时 $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$. 即 $AC = AD$,

$\therefore C$ 是直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 上的一个动点, 点 D 的坐标是 $(0, 1)$,

$\therefore$ 设点 C 的坐标为 $(x_0, \frac{3}{4}x_0 + 3)$,

$$\therefore -x_0 = \frac{3}{4}x_0 + 2,$$

$$\text{此时, } x_0 = -\frac{8}{7},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 与点 } D \text{ 的“非常距离”的最小值为: } |x_0| = \frac{8}{7},$$

$$\text{此时 } C\left(-\frac{8}{7}, \frac{15}{7}\right);$$

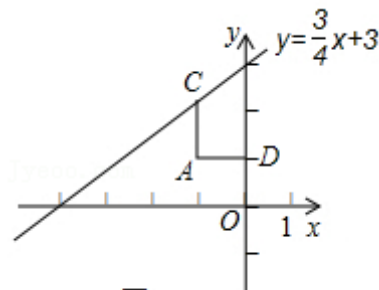


图2

②如图 3, 当点 E 在过原点且与直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 垂直的直线上, 且 $CF = EF$ 时, 点 C 与点 E 的“非常距离”最小,

设 $E(x, y)$ (点 E 位于第二象限). 则

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -\frac{3}{5}, \\ y = \frac{4}{5} \end{cases},$$

$$\text{故 } E\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

设点 C 的坐标为 $(x_0, \frac{3}{4}x_0 + 3)$,

$$-\frac{3}{5} - x_0 = \frac{3}{4}x_0 + 3 - \frac{4}{5},$$

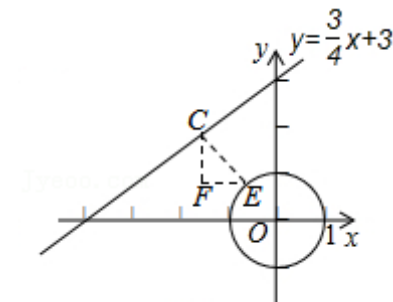


图3

解得 $x_0 = -\frac{8}{5}$,

则点 C 的坐标为 $(-\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$, 点 C 与点 E 的“非常距离”的最小值为 1.

【点评】本题考查了一次函数综合题. 对于信息给予题, 一定要弄清楚题干中的已知条件. 本题中的“非常距离”的定义是正确解题的关键.

题目 9 (2023·海安市一模) 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W 和点 P , 给出如下定义: F 为图形 W 上任意一点, 将 P, F 两点间距离的最小值记为 m , 最大值记为 M , 称 M 与 m 的差为点 P 到图形 W 的“差距离”, 记作 $d(P, W)$, 即 $d(P, W) = M - m$, 已知点 $A(2, 1), B(-2, 1)$

(1) 求 $d(O, AB)$;

(2) 点 C 为直线 $y = -1$ 上的一个动点, 当 $d(C, AB) = 1$ 时, 点 C 的横坐标是 $2 - \sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5} - 2$;

(3) 点 D 为函数 $y = x + b (-2 \leq x \leq 2)$ 图象上的任意一点, 当 $d(D, AB) \leq 2$ 时, 直接写出 b 的取值范围.

【分析】(1) 画出图形, 根据点 P 到图形 W 的“差距离”的定义即可解决问题.

(2) 如图 2 中, 设 $C(m, -1)$. 由此构建方程即可解决问题.

(3) 如图 3 中, 取特殊位置当 $b = 6$ 时, 当 $b = -4$ 时, 分别求解即可解决问题.

【解答】解: (1) 如图 1 中,

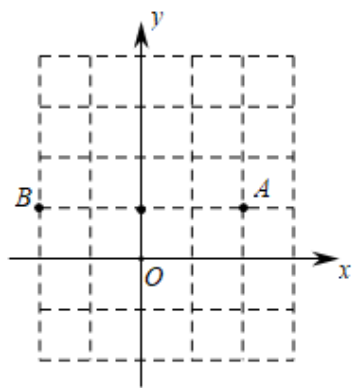


图1

$\because A(2, 1), B(-2, 1),$

$\therefore AB \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 点 O 到线段 AB 的最小距离为 1, 最大距离为 $\sqrt{5}$,

$\therefore d(O, AB) = \sqrt{5} - 1.$

(2) 如图 2 中, 设 $C(m, -1)$.

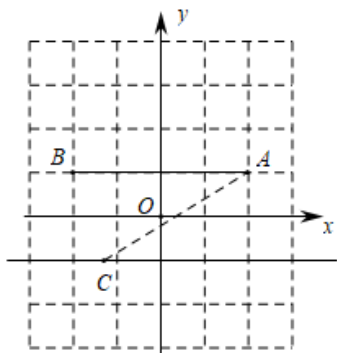


图2

当点 C 在 y 轴的左侧时, 由题意 $AC - 2 = 1$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/188035136072006065>