

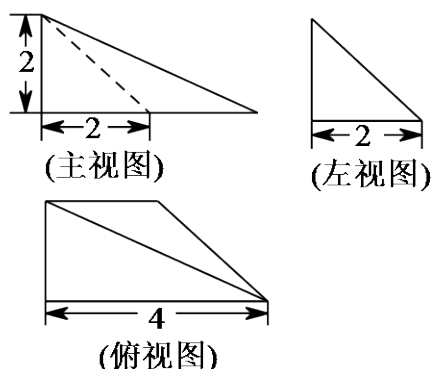
2023-2024 学年安徽省定远育才实验学校高三第四次模拟考试数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 一个四棱锥的三视图如图所示（其中主视图也叫正视图，左视图也叫侧视图），则这个四棱锥中最最长棱的长度是（ ）。



- A. $2\sqrt{6}$
 - B. 4
 - C. $2\sqrt{3}$
 - D. $2\sqrt{2}$
2. 在三棱锥 $S-ABC$ 中， $SB=SA=AB=BC=AC=4$ ， $SC=2\sqrt{6}$ ，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是（ ）
- A. $\frac{40\pi}{3}$
 - B. $\frac{80\pi}{3}$
 - C. $\frac{40\pi}{9}$
 - D. $\frac{80\pi}{9}$

3. 过直线 $x+y=0$ 上一点 P 作圆 $(x+1)^2+(y-5)^2=2$ 的两条切线 l_1, l_2 ， A, B 为切点，当直线 l_1, l_2 关于直线 $x+y=0$ 对称时， $\angle APB=$ （ ）

- A. 30°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 90°

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ ，点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点，若圆

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则双曲线的离心率取值范围是（ ）。

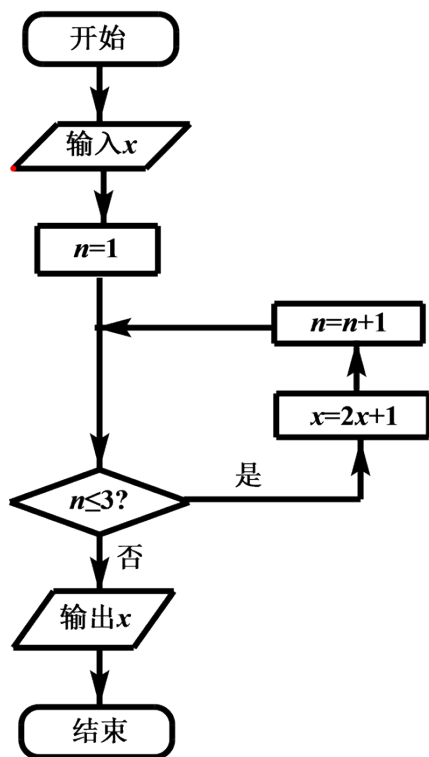
- A. $(1, 2]$
- B. $(1, 4]$
- C. $[2, +\infty)$
- D. $[4, +\infty)$

5. 抛物线 $y^2 = 2px (p>0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A, B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB = \frac{2\pi}{3}$ ，设线段 AB

的中点 M 在 l 上的投影为 N ，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

6. 当输入的实数 $x \in [2, 30]$ 时, 执行如图所示的程序框图, 则输出的 x 不小于 103 的概率是 ()

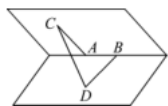


- A. $\frac{9}{14}$ B. $\frac{5}{14}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{9}{28}$

7. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则双曲线的焦距为 ()

- A. $2\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 6 D. 8

8. 如图在一个 60° 的二面角的棱有两个点 A, B , 线段 AC, BD 分别在这个二面角的两个半平面内, 且都垂直于棱 AB , 且 $AB = AC = 2, BD = 4$, 则 CD 的长为 ()



- A. 4 B. $2\sqrt{5}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

9. 设 O 为坐标原点, P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上任意一点, M 是线段 PF 上的点, 且

$|PM| = 2|MF|$, 则直线 OM 的斜率的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

10. 羽毛球混合双打比赛每队由一男一女两名运动员组成. 某班级从3名男生 A_1, A_2, A_3 和3名女生 B_1, B_2, B_3 中各随机选出两名, 把选出的4人随机分成两队进行羽毛球混合双打比赛, 则 A_1 和 B_1 两人组成一队参加比赛的概率为 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

11. 若向量 $\vec{a} = (1, 5), \vec{b} = (-2, 1)$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$ ()

- A. 30 B. 31 C. 32 D. 33

12. 已知倾斜角为 θ 的直线 l 与直线 $x + 2y - 3 = 0$ 垂直, 则 $\sin \theta =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 作直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相切于点 A , 且与双曲线的右支相交于点 B , 若 A 是 BF_1 上的一个靠近点 F_1 的三等分点, 且 $|BF_2| = 10$, 则四边形 AOF_2B 的面积为_____.

14. 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 都是边长为2的等边三角形, 且平面 $ABD \perp$ 平面 BDC , 则该四面体外接球的体积为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $3a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 0$ 恒成立, 则 a_6 的值为_____.

16. 为激发学生团结协作, 敢于拼搏, 不言放弃的精神, 某校高三5个班进行班级间的拔河比赛. 每两班之间只比赛1场, 目前(一)班已赛了4场, (二)班已赛了3场, (三)班已赛了2场, (四)班已赛了1场. 则目前(五)班已经参加比赛的场次为_____.

三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 某企业为了了解该企业工人组装某产品所用时间, 对每个工人组装一个该产品的用时作了记录, 得到大量统计数据. 从这些统计数据中随机抽取了9个数据作为样本, 得到如图所示的茎叶图(单位: 分钟). 若用时不超过40(分钟), 则称这个工人为优秀员工.

3	3	6	5	
4	7	2	3	7
5	3	5		

- (1) 求这个样本数据的中位数和众数；
- (2) 以这9个样本数据中优秀员工的频率作为概率，任意调查4名工人，求被调查的4名工人中优秀员工的数量 x 分布列和数学期望.

18. (12分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{4\sin A}$.

- (1) 求 $\sin B \sin C$ ；
- (2) 若 $10\cos B \cos C = -1$ ， $a = \sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

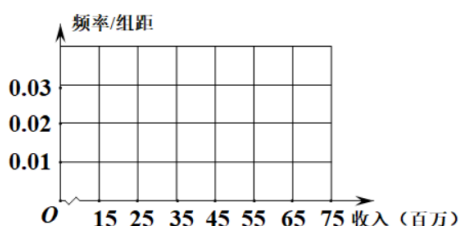
19. (12分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + ax + 1 - e^{2x}$.

- (1) 若函数 $g(x) = f'(x)$ ，试讨论 $g(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) < 0$ ，求 a 的取值范围.

20. (12分) 某市调研机构对该市工薪阶层对“楼市限购令”态度进行调查，抽调了50名市民，他们月收入频数分布表和对“楼市限购令”赞成人数如下表：

月收入(单位:百元)	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55)	[55,65)	[65,75)
频数	5	c		10	5	5
频率	0.1	a	b	0.2	0.1	0.1
赞成人数	4	8	12	5	2	1

- (1) 若所抽调的50名市民中，收入在 $[35,45)$ 的有15名，求 a, b, c 的值，并完成频率分布直方图.



- (2) 若从收入(单位:百元)在 $[55,65)$ 的被调查者中随机选取2人进行追踪调查，选中的2人中恰有 X

人赞成“楼市限购令”，求 X 的分布列与数学期望.

(3) 从月收入频率分布表的 6 组市民中分别随机抽取 3 名市民，恰有一组的 3 名市民都不赞成“楼市限购令”，根据表格数据，判断这 3 名市民来自哪组的可能性最大？请直接写出你的判断结果.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in R$.

(I) 求 $f(2019\pi)$ 的值;

(II) 若 $f(\alpha) = 1$, 且 $0 < \alpha < \pi$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

22. (10 分) 已知 $f(x) = |x-1| + |x+a|$ ($a \in R$).

(I) 若 $a=1$, 求不等式 $f(x) > 4$ 的解集;

(II) $\forall m \in (0,1)$, $\exists x_0 \in R$, $\frac{1}{m} + \frac{4}{1-m} > f(x_0)$, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

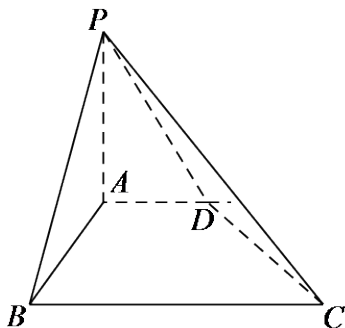
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

作出其直观图，然后结合数据根据勾股定理计算每一条棱长即可.

【详解】



根据三视图作出该四棱锥的直观图，如图所示，其中底面是直角梯形，且 $AD = AB = 2$, $BC = 4$,

$PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = 2$,

$$\therefore PB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad PD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad CD = 2\sqrt{2}, \quad PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6},$$

$\therefore$ 这个四棱锥中最长棱的长度是 $2\sqrt{6}$.

故选 A.

【点睛】

本题考查了四棱锥的三视图的有关计算，正确还原直观图是解题关键，属于基础题.

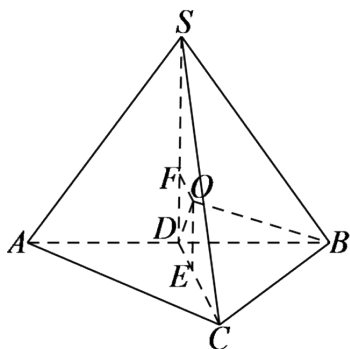
2、B

【解析】

取 AB 的中点 D ，连接 SD 、 CD ，推导出 $\angle SDC = 90^\circ$ ，设球心为 O ， $\triangle ABC$ 和 $\triangle SAB$ 的中心分别为 E 、 F ，可得出 $OE \perp$ 平面 ABC ， $OF \perp$ 平面 SAB ，利用勾股定理计算出球 O 的半径，再利用球体的表面积公式可得出结果.

【详解】

取 AB 的中点 D ，连接 SD 、 CD ，



由 $\triangle SAB$ 和 $\triangle ABC$ 都是正三角形，得 $SD \perp AB$ ， $CD \perp AB$ ，则 $SD = CD = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ，则

$$SD^2 + CD^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6})^2 = SC^2, \text{ 由勾股定理的逆定理，得 } \angle SDC = 90^\circ.$$

设球心为 O ， $\triangle ABC$ 和 $\triangle SAB$ 的中心分别为 E 、 F 。

由球的性质可知： $OE \perp$ 平面 ABC ， $OF \perp$ 平面 SAB ，

$$\text{又 } OE = DF = OE = OF = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 由勾股定理得 } OD = \sqrt{OE^2 + DE^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{所以外接球半径为 } R = \sqrt{OD^2 + BD^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{60}}{3}.$$

$$\text{所以外接球的表面积为 } S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{60}}{3}\right)^2 = \frac{80\pi}{3}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查三棱锥外接球表面积的计算，解题时要分析几何体的结构，找出球心的位置，并以此计算出球的半径长，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

3、C

【解析】

判断圆心与直线 $x+y=0$ 的关系，确定直线 l_1 ， l_2 关于直线 $x+y=0$ 对称的充要条件是 PC 与直线 $x+y=0$ 垂直，从而 $|PC|$ 等于 C 到直线 $x+y=0$ 的距离，由切线性质求出 $\sin \angle APC$ ，得 $\angle APC$ ，从而得 $\angle APB$.

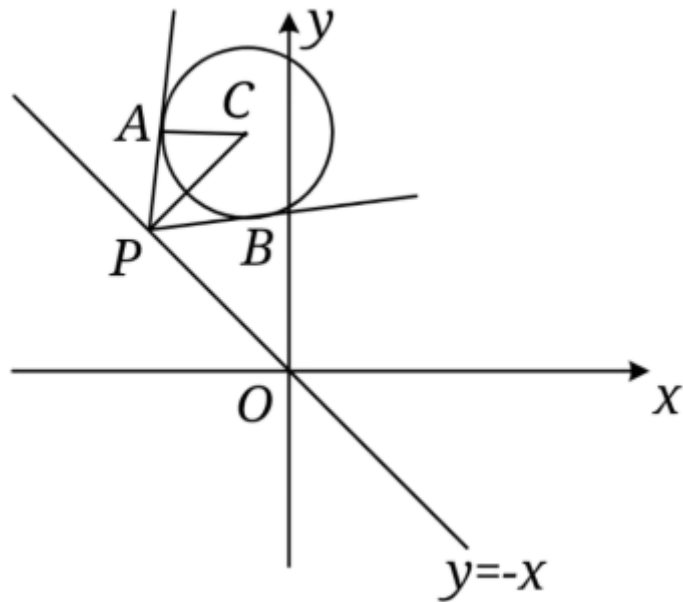
【详解】

如图，设圆 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 2$ 的圆心为 $C(-1,5)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，点 C 不在直线 $x+y=0$ 上，要满足直线 l_1 ， l_2 关

于直线 $x+y=0$ 对称，则 PC 必垂直于直线 $x+y=0$ ， $\therefore |PC| = \frac{|-1+5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ，

设 $\angle APC = \theta$ ，则 $\angle APB = 2\theta$ ， $\sin \theta = \frac{|AC|}{|PC|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \theta = 30^\circ$ ， $\angle APB = 2\theta = 60^\circ$.

故选：C.



【点睛】

本题考查直线与圆的位置关系，考查直线的对称性，解题关键是由圆的两条切线关于直线 $x+y=0$ 对称，得出 PC 与直线 $x+y=0$ 垂直，从而得 $|PC|$ 就是圆心到直线的距离，这样在直角三角形中可求得角.

4、B

【解析】

先求出双曲线的渐近线方程，可得则直线 $bx - ay + 2a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 d ，根据圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，可得 $d \geq 1$ ，解得即可。

【详解】

由题意，双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

$\because P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点，

则直线 $bx - ay + 4a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 $d = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4a}{c}$ ，

$\because$ 圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则 $d \geq 1$ ，

$\therefore \frac{4a}{c} \geq 1$ ，即 $e = \frac{c}{a} \leq 4$ ，又 $e > 1$

故 e 的取值范围为 $(1, 4]$ ，

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了直线和双曲线的位置关系，以及两平行线间的距离公式，其中解答中根据圆与双曲线 C 的右支没有公共点得出 $d \geq 1$ 是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题。

5、B

【解析】

试题分析：设 A, B 在直线 l 上的投影分别是 A_1, B_1 ，则 $|AF| = |AA_1|$ ， $|BF| = |BB_1|$ ，又 M 是 AB 中点，所以

$|MN| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|)$ ，则 $\frac{|MN|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AA_1| + |BB_1|}{|AB|} = \frac{|AF| + |BF|}{2|AB|}$ ，在 $\triangle ABF$ 中

$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2|AF||BF|\cos\frac{2\pi}{3} = |AF|^2 + |BF|^2 + |AF||BF| = (|AF| + |BF|)^2 - |AF||BF| \geq (|AF| + |BF|)^2 - (\frac{|AF| + |BF|}{2})^2 = \frac{3}{4}(|AF| + |BF|)^2$ ，所以 $\frac{(|AF| + |BF|)^2}{|AB|^2} \leq \frac{4}{3}$ ，即 $\frac{|AF| + |BF|}{|AB|} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\frac{|MN|}{|AB|} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故选

B.

考点：抛物线的性质。

【名师点睛】

在直线与抛物线的位置关系问题中，涉及到抛物线上的点到焦点的距离，焦点弦长，抛物线上的点到准线（或与准线

平行的直线) 的距离时, 常常考虑用抛物线的定义进行问题的转化. 象本题弦 AB 的中点 M 到准线的距离首先等于

A, B 两点到准线距离之和的一半, 然后转化为 A, B 两点到焦点 F 的距离, 从而与弦长 $|AB|$ 之间可通过余弦定理建立关系.

6、A

【解析】

根据循环结构的运行, 直至不满足条件退出循环体, 求出 x 的范围, 利用几何概型概率公式, 即可求出结论.

【详解】

程序框图共运行 3 次, 输出的 x 的范围是 $[23, 247]$,

所以输出的 x 不小于 103 的概率为 $\frac{247-103}{247-23} = \frac{144}{224} = \frac{9}{14}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查循环结构输出结果、几何概型的概率, 模拟程序运行是解题的关键, 属于基础题.

7、A

【解析】

依题意可得 $b^2 = 4$, 再根据离心率求出 a^2 , 即可求出 c , 从而得解;

【详解】

解: $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$,

所以 $e^2 = 1 + \frac{4}{a^2} = 3$, $\therefore a^2 = 2$, $\therefore c = \sqrt{6}$, 双曲线的焦距为 $2\sqrt{6}$.

故选: A

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质, 属于基础题.

8、A

【解析】

由 $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BD}$, 两边平方后展开整理, 即可求得 $\overline{CD}^2$, 则 CD 的长可求.

【详解】

解: $\because \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BD}$,

$\therefore \overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{CAgAB} + 2\overline{CAgBD} + 2\overline{ABgBD}$,

$\because \overline{CA} \perp \overline{AB}$, $\overline{BD} \perp \overline{AB}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/188076016137006055>