



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

《复变函数与积分变换》习题册

合肥工业大学

《复变函数与积分变换》校定平台课程建设项目资助

2018 年 9 月

《复变函数与积分变换》第一章习题

1. 求下列各复数的实部、虚部、模、辐角和辐角主值:

$$(1) \frac{1+2i}{3-4i} - \frac{2-i}{5i}; \quad (2) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^3.$$

2. 将下列复数写成三角表达式和指数形式:

$$(1) 1-\sqrt{3}i; \quad (2) \frac{2i}{1+i}.$$

3. 利用复数的三角表示计算下列各式:

$$(1) \sqrt[4]{-2+2i}; \quad (2) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{103}$$

4. 解方程 $z^3+1=0$.

5. 设 $z + z^{-1} = 2\cos\theta$ ($z \neq 0, \theta$ 是 z 的辐角), 求证: $z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta$.

6. 指出满足下列各式的点 z 的轨迹或所在范围.

(1) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$;

(2) $\overline{z}z + a\overline{z} + \overline{a}z + b = 0$, 其中 a 为复数, b 为实常数. (选做)

7. 用复参数方程表示曲线: 连接 $1+i$ 与 $-1-4i$ 的直线段.

8. 画出下列不等式所确定的图形，指出它们是否为区域、闭区域，并指明它是有界的还是无界的？是单连通区域还是多连通区域？并标出区域边界的方向。

(1) $|z| < 1, \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$; (2) $0 < \operatorname{Re} z < 1$;

9. 函数 $w = \frac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成 w 平面上怎么样的曲线？

(1) $x^2 + y^2 = 4$; (2) $y = x$; (3) $x = 1$.

10. 试证： $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$ 不存在.

《复变函数与积分变换》第二章习题

1. 用导数定义求 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的导数.

2. 下列函数在何处可导，何处不可导？何处解析，何处不解析？

(1) $f(z) = \frac{1}{z}$;

(2) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;

3. 试讨论 $f(z) = xy^2 + ix^2y$ 的解析性，并由此回答：若复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 中的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均可微，那么 $f(z) = u + iv$ 一定可导吗？

4. 设 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数, 试确定 l, m, n 的值.

5. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 试证明在 D 内下列条件是彼此等价的:

- (1) $f(z) = \text{常数}$; (2) $\operatorname{Re} f(z) = \text{常数}$; (3) $\overline{f(z)}$ 解析.

6. 试解下列方程:

- (1) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$; (2) $\cos z = 0$; (3) $\sin z + \cos z = 0$.

7.求下列各式的值:

(1) $\operatorname{Ln}(-3+4i)$;

(2) 3^{3-i} ;

(3) e^{2+i} .

8.等式 $3\operatorname{Ln} z^3 = 3\operatorname{Ln} z$ 是否正确? 请给出理由.

《复变函数与积分变换》第三章习题

3.1 复积分的概念与基本计算公式

1. 计算积分 $\int_C (x - y + ix^2) dz$ ，其中 C 为从原点到点 $1+i$ 的直线段.

2. 计算积分 $\int_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$ 的值，其中 C 为 $|z|=2$

3. 当积分路径是自 $-i$ 沿虚轴到 i ，利用积分性质证明： $\left| \int_{-i}^i (x^2 + iy^2) dz \right| \leq 2$

3.2 柯西古萨基本定理

1. 计算积分 $\int_C \frac{1}{\bar{z}} dz$, 其中 C 为 $|z| = 2$

2. 计算积分 $\int_C (|z| - e^z \cdot \sin z) dz$, 其中 C 为 $|z| = a$.

3.3 基本定理的推广

1. 计算积分 $\int_C \frac{e^z}{z} dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z| = 2$ 与负向圆周 $|z| = 1$ 所组成。

2. 计算积分 $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 C 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线。

3.4 原函数与不定积分

1. $\int_0^{\sqrt{\pi i}} z \sin z^2 dz$

2. $\int_1^{1+i} z e^{\bar{z}} dz$

3.5 柯西积分公式

1. 计算下列积分

(1) $\oint_C \frac{3z-1}{z^2-2z-3} dz$, 其中 $C: |z|=4$, 正向;

(2) $\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz$, 其中 $C: |z|=2$, 正向;

(3) $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz, C: |z-2i|=\frac{3}{2}$, 正向

--

2. 计算积分 $\int_C \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$, 其中 C 为

(1) $|z - i| = 1$ (2) $|z + i| = 1$ (3) $|z| = 2$

3. 已知 $f(z) = \int_{|\xi|=R} \frac{e^{\frac{\pi}{3}\xi}}{\xi - z} d\xi (R \neq 1)$ 求 $f(i), f(-i)$

--

3.6 高阶导公式

1. 计算下列积分

(1) $\oint_C \frac{\cos z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz$, 其中 $C: |z| = 2$, 正向

(2) $\oint_C \frac{e^{\bar{z}}}{z^{100}} dz$, 其中 $C: |z| = 1$, 正向

(3) $\oint_C \frac{\ln(z+2)}{(z-a)^3} dz$, 其中 $C: |z| = 1$, 正向, $|a| \neq 1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/188127076041006135>