

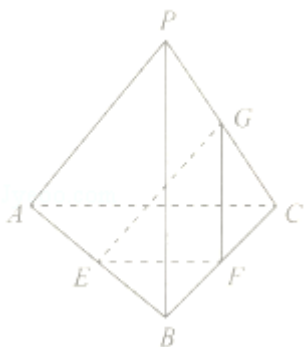
立体几何证明基础题

一. 解答题 (共 28 小题)

1. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB \perp BC$, $AC \perp BC$, 点 E, F, G 分别为 AB, BC, PC , 的中点

(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 EFG ;

(2) 求证: $BC \perp EG$.

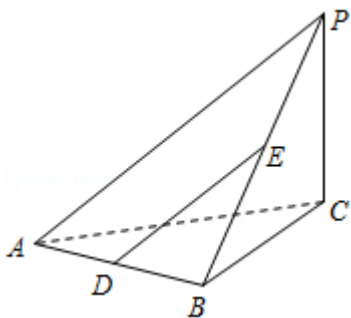


2. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 底面 ABC , $AB \perp BC$, D, E 分别是 AB, PB 的中点.

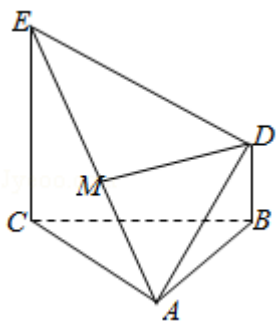
(1) 求证 $DE \parallel PA$

(2) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAC ;

(3) 求证: $AB \perp PB$.



3. 如图所示, $\triangle ABC$ 为正三角形, $CE \perp$ 平面 ABC , $BD \parallel CE$ 且 $CE=AC=2BD$, 试在 AE 上确定一点 M , 使得 $DM \parallel$ 平面 ABC .

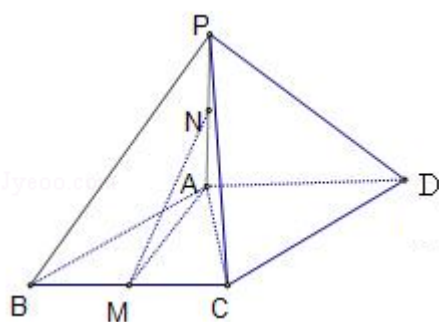


4. 如图:在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC=60^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M, N 分别为 BC, PA 的中点, 且 $PA=AB=2$.

(I) 证明: $BC \perp$ 平面 AMN ;

(II) 求三棱锥 $N-AMC$ 的体积;

(III) 在线段 PD 上是否存在一点 E , 使得 $NM \parallel$ 平面 ACE ; 若存在, 求出 PE 的长; 若不存在, 说明理由.

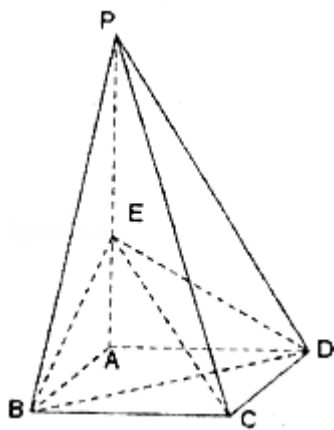


5. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=2$, E 是侧棱 PA 上的动点.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2) 如果 E 是 PA 的中点, 求证: $PC \parallel$ 平面 BDE ;

(3) 是否不论点 E 在侧棱 PA 的任何位置, 都有 $BD \perp CE$? 证明你的结论.

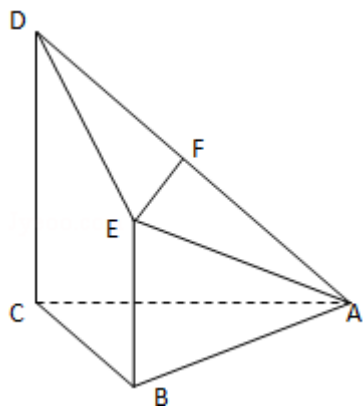


6. 已知四棱锥 $A-BCDE$ ，其中 $AB=BC=AC=BE=1$ ， $CD=2$ ， $CD \perp$ 面 ABC ， $BE \parallel CD$ ， F 为 AD 的中点。

(I) 求证： $EF \parallel$ 面 ABC ；

(II) 求证：平面 $ADE \perp$ 平面 ACD ；

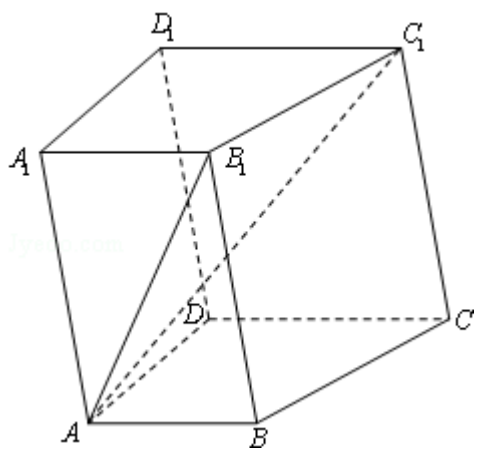
(III) 求四棱锥 $A-BCDE$ 的体积。



7. 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 。

(1) 求证： $BC \parallel$ 平面 AB_1C_1 ；

(2) 求证：平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 AB_1C_1 。

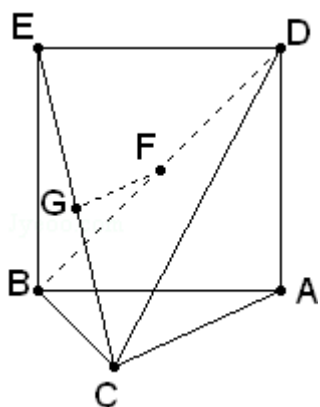


8. 如图, 三角形 ABC 中, $AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$, $ABED$ 是边长为 1 的正方形, 平面 $ABED \perp$ 底面 ABC , 若 G 、 F 分别是 EC 、 BD 的中点.

(I) 求证: $GF \parallel$ 底面 ABC ;

(II) 求证: $AC \perp$ 平面 EBC ;

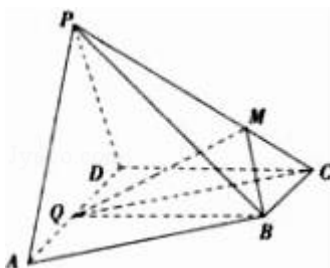
(III) 求几何体 $ADEBC$ 的体积 V .



9. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=2BC$, Q 为 AD 的中点, M 为棱 PC 的中点.

(I) 证明: $PA \parallel$ 平面 BMQ ;

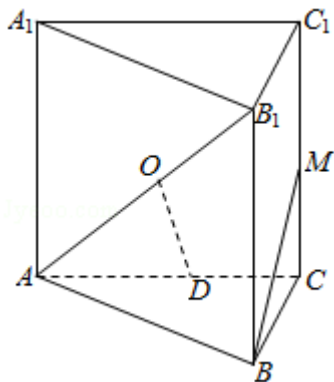
(II) 已知 $PD=DC=AD=2$, 求点 P 到平面 BMQ 的距离.



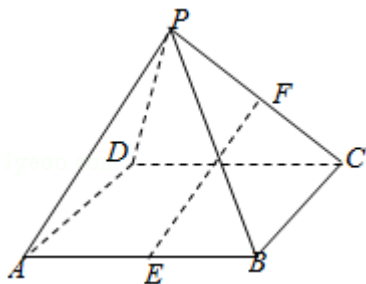
10. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=\sqrt{2}$, $BB_1=2$, O 是 AB_1 的中点, D 是 AC 的中点, M 是 CC_1 的中点,

(1) 证明: $OD \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 试证: $BM \perp AB_1$.



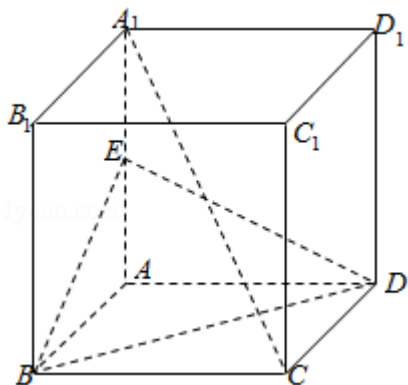
11. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, E 、 F 分别是 AB 、 PC 中点, 求证: $EF \parallel$ 面 PAD .



12. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 AA_1 的中点, 求证:

(I) $A_1C \parallel$ 平面 BDE ;

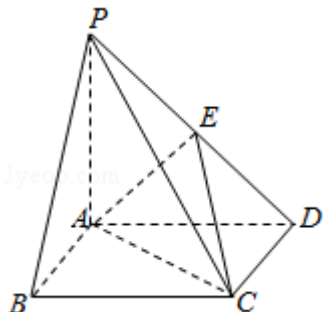
(II) 平面 $A_1AC \perp$ 平面 BDE .



13. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, E 为 PD 的中点.

(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 AEC ;

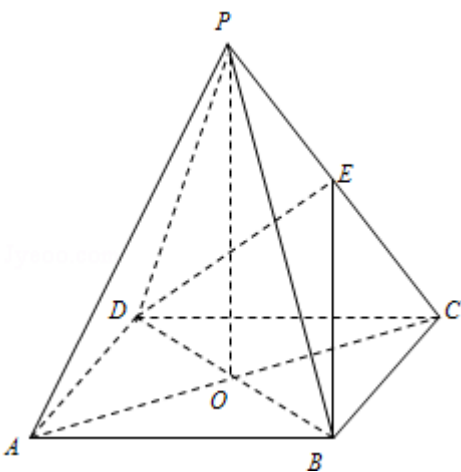
(2) 若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD$, 求证: 平面 $AEC \perp$ 平面 PCD .



14. 如图, $ABCD$ 是正方形, O 是正方形的中心, $PO \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点. 求证:

(1) $PA \parallel$ 平面 BDE ;

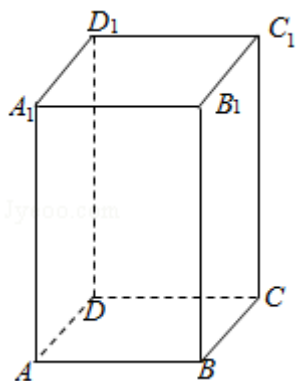
(2) $BD \perp$ 平面 PAC .



15. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 底面边长 $AB=1$, 侧棱长 $AA_1=2$.

(I) 求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积;

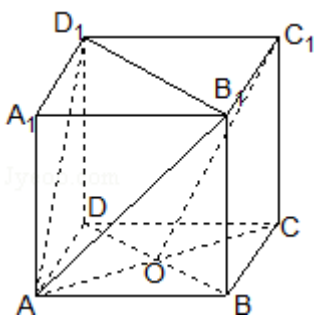
(II) 证明: $AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 .



16. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, O 是底 $ABCD$ 对角线的交点. 求证:

(1) $C_1O \parallel$ 面 AB_1D_1 ;

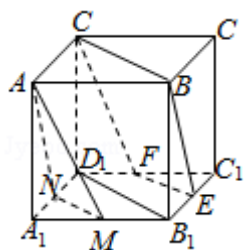
(2) $A_1C \perp$ 面 AB_1D_1 .



17. 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, E, F, N 分别为 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ 的中点, 求证:

(1) E, F, D, B 四点共面;

(2) 面 $AMN \parallel$ 平面 $EFDB$.

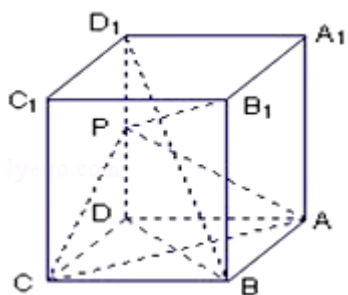


18. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=1, AA_1=2$, 点 P 是 DD_1 的中点.

求证: (1) 直线 $BD_1 \parallel$ 平面 PAC

(2) ①求异面直线 PC 与 AA_1 所成的角.

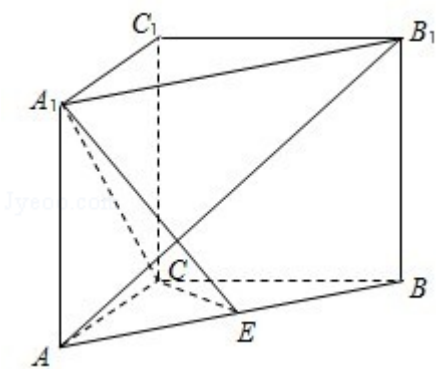
②平面 $PAC \perp$ 平面 BDD_1 .



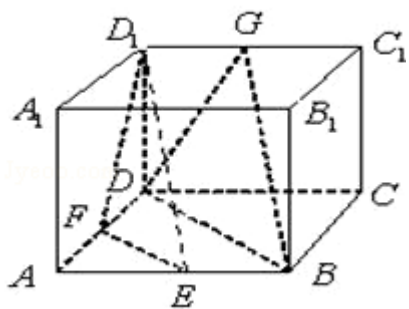
19. 如图,在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=CB=CC_1=2$, E 是 AB 中点.

(I) 求证: $AB_1 \perp$ 平面 A_1CE ;

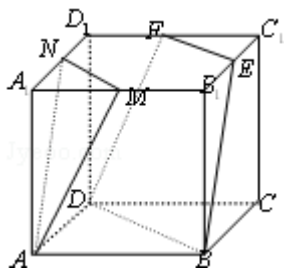
(II) 求直线 A_1C_1 与平面 A_1CE 所成角的正弦值.



20. 如图,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、G 分别是 AB、AD、 C_1D_1 的中点. 求证: 平面 $D_1EF \parallel$ 平面 BDG .



21. (文科) 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, E, F 分别是棱 A_1B_1 , A_1D_1 , B_1C_1 , C_1D_1 的中点, 求证: 平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFDB$.

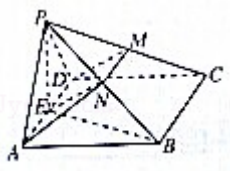


22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 是正三角形，且与底面 $ABCD$ 垂直，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle BAD=60^\circ$ ， N 是 PB 的中点，过 A 、 D 、 N 三点的平面交 PC 于 M ， E 为 AD 的中点，求证：

(1) $EN \parallel$ 平面 PDC ;

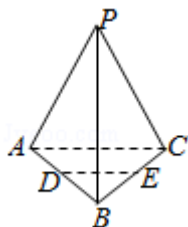
(2) $BC \perp$ 平面 PEB ;

(3) 平面 $PBC \perp$ 平面 $ADMN$.



23. 如图，在正三棱锥 $P-ABC$ 中， D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点.

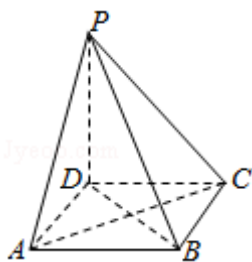
(1) 求证： $DE \parallel$ 平面 PAC ；(2) 求证： $AB \perp PC$.



24. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是边长为 1 的正方形，侧棱 $PD=1$ ， $PA=PC=\sqrt{2}$.

(1) 求证： $PD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBD .

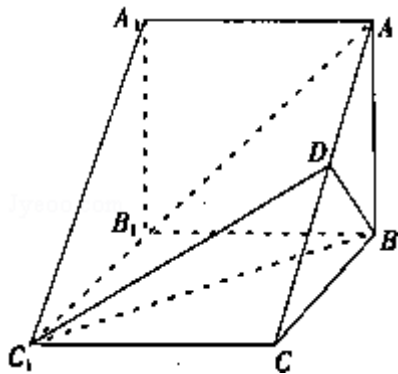


25. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AB \perp BC$, D 为 AC 的中点, $A_1A = AB = 2$.

(1) 求证: $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D ;

(2) 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E , 求证: 直线 $BE \perp$ 平面 AA_1C_1C

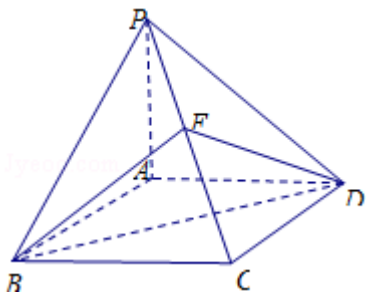
(3) 若四棱锥 $B - AA_1C_1D$ 的体积为 3, 求 BC 的长度.



26. 如图, 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 F 为 PC 的中点.

(1) 求证: $PA \parallel$ 平面 BDF ;

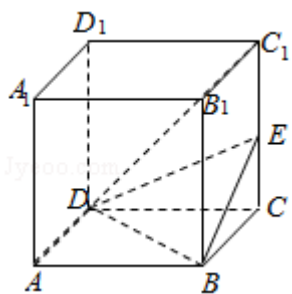
(2) 求证: $PC \perp BD$.



27. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 CC_1 的中点.

(1) 求证: $AC_1 \perp BD$.

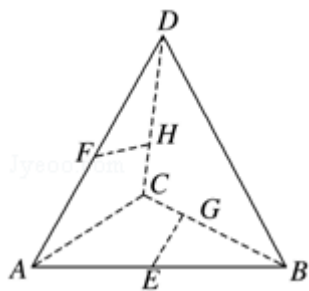
(2) 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 BDE .



28. 已知空间四边形 $ABCD$ (如图所示), E 、 F 分别是 AB 、 AD 的中点, G 、 H 分别是 BC 、 CD 上的点, 且 $CG = \frac{1}{3}BC$, $CH = \frac{1}{3}DC$. 求证:

① E 、 F 、 G 、 H 四点共面;

② 三直线 FH 、 EG 、 AC 共点.



立体几何证明基础题

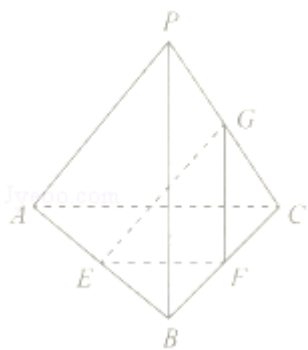
参考答案与试题解析

一. 解答题 (共 28 小题)

1. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB \perp BC$, $AC \perp BC$, 点 E, F, G 分别为 AB, BC, PC , 的中点

(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 EFG ;

(2) 求证: $BC \perp EG$.



【分析】(1) 推导出 $GF \parallel PB$, 由此能证明 $PB \parallel$ 平面 EFG .

(2) 推导出 $EF \perp BC, GF \perp BC$, 从而 $BC \perp$ 平面 EFG , 由此能证明 $BC \perp EG$.

【解答】证明: (1) \because 点 F, G 分别为 BC, PC , 的中点,

$\therefore GF \parallel PB$,

$\because PB \not\subset$ 平面 $EFG, FG \subset$ 平面 EFG ,

$\therefore PB \parallel$ 平面 EFG .

(2) \because 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB \perp BC, AC \perp BC$,

点 E, F, G 分别为 AB, BC, PC , 的中点,

$\therefore EF \parallel AC, GF \parallel PB$,

$\therefore EF \perp BC, GF \perp BC$,

$\because EF \cap FG = F, \therefore BC \perp$ 平面 EFG ,

$\because EG \subset$ 平面 $EFG, \therefore BC \perp EG$.

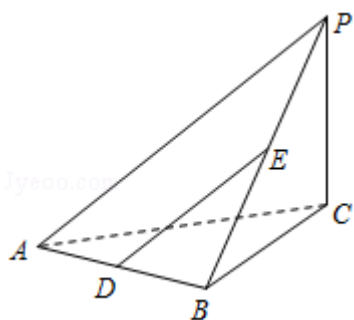
【点评】 本题考查线面平行、线线垂直的证明，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

2. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PC \perp$ 底面 ABC , $AB \perp BC$, D, E 分别是 AB, PB 的中点.

(1) 求证 $DE \parallel PA$

(2) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAC ;

(3) 求证: $AB \perp PB$.



【分析】 (1) 由 D, E 分别是 AB, PB 的中点，能证明 $DE \parallel PA$.

(2) 由 $PA \subset$ 平面 PAC , $DE \parallel PA$, 且 $DE \not\subset$ 平面 PAC , 能证明 $DE \parallel$ 平面 PAC .

(3) 推导出 $AB \perp PC$, $AB \perp BC$, 得 $AB \perp$ 平面 PBC , 由此能证明 $AB \perp PB$.

【解答】 证明: (1) 因为 D, E 分别是 AB, PB 的中点，所以 $DE \parallel PA$.

(2) 因为 $PA \subset$ 平面 PAC , $DE \parallel PA$, 且 $DE \not\subset$ 平面 PAC ,

所以 $DE \parallel$ 平面 PAC .

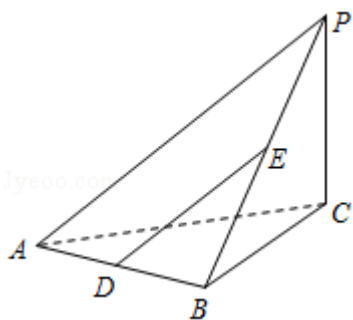
(3) 因为 $PC \perp$ 平面 ABC , 且 $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AB \perp PC$.

又因为 $AB \perp BC$, 且 $PC \cap BC = C$.

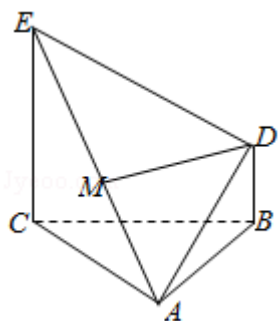
所以 $AB \perp$ 平面 PBC .

又因为 $PB \subset$ 平面 PBC , 所以 $AB \perp PB$.



【点评】 本题考查线线平行、线面平行、线线垂直的证明，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是基础题。

3. 如图所示， $\triangle ABC$ 为正三角形， $CE \perp$ 平面 ABC ， $BD \parallel CE$ 且 $CE = AC = 2BD$ ，试在 AE 上确定一点 M ，使得 $DM \parallel$ 平面 ABC 。

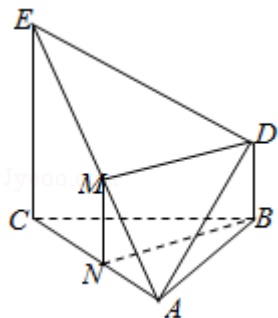


【分析】 AE 中点为 M ，取 AC 中点为 N ，通过证明四边形 $MNBD$ 是平行四边形得出 $DM \parallel BN$ ，从而可得 $DM \parallel$ 平面 ABC 。

【解答】 解：取 AE 中点为 M ，取 AC 中点为 N ，连结 MD ， MN ， NB ，
 在 $\triangle AEC$ 中， $\because M, N$ 分别是边 AE, AC 的中点， $\therefore MN \parallel CE$ 且 $MN = \frac{1}{2}CE$ ，
 又 $\because CE = 2BD$ 且 $BD \parallel CE$ ，
 $\therefore MN \parallel BD$ 且 $MN = BD$ ，
 \therefore 四边形 $MNBD$ 是平行四边形。
 $\therefore DM \parallel BN$ ，
 又 $\because BN \subset$ 平面 ABC ， $DM \not\subset$ 平面 ABC ，

$\therefore DM \parallel$ 平面 ABC .

故 M 为 AE 的中点时, $DM \parallel$ 平面 ABC .



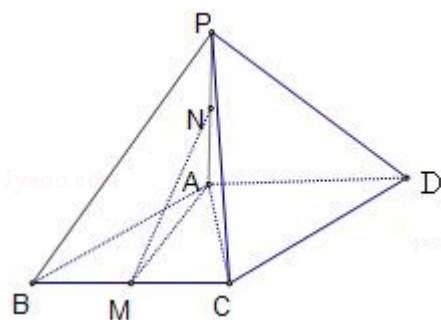
【点评】 本题考查了线面平行的判定, 属于基础题.

4. 如图: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC=60^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M, N 分别为 BC, PA 的中点, 且 $PA=AB=2$.

(I) 证明: $BC \perp$ 平面 AMN ;

(II) 求三棱锥 $N-AMC$ 的体积;

(III) 在线段 PD 上是否存在一点 E , 使得 $NM \parallel$ 平面 ACE ; 若存在, 求出 PE 的长; 若不存在, 说明理由.



【分析】 (I) 要证线与面垂直, 只要证明线与面上的两条相交线垂直, 找面上的两条线, 根据四边形是一个菱形, 从菱形出发找到一条, 再从 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 得到结论.

(II) 要求三棱锥的体积, 首先根据所给的体积确定用哪一个面做底面, 会使得计算简单一些, 选择三角形 AMC , 做出底面面积, 利用体积公式得到结果.

(III) 对于这种是否存在的问题, 首先要观察出结论, 再进行证明, 根据线面平行的判定定理, 利用中位线确定线与线平行, 得到结论.

【解答】解: (I) 证明: \because ABCD 为菱形,

$$\therefore AB=BC$$

$$\text{又 } \angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore AB=BC=AC,$$

又 M 为 BC 中点, $\therefore BC \perp AM$

而 $PA \perp$ 平面 ABCD, $BC \subset$ 平面 ABCD, $\therefore PA \perp BC$

又 $PA \cap AM=A$, $\therefore BC \perp$ 平面 AMN

$$(II) \because S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot CM = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

又 $PA \perp$ 底面 ABCD, $PA=2$, $\therefore AN=1$

\therefore 三棱锥 N-AMC 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle AMC} \cdot AN$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(III) 存在点 E,

取 PD 中点 E, 连接 NE, EC, AE,

\because N, E 分别为 PA, PD 中点,

$$\therefore NE \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2} AD$$

又在菱形 ABCD 中, $CM \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2} AD$

$\therefore NE \underline{\underline{\parallel}} MC$, 即 MCEN 是平行四边形

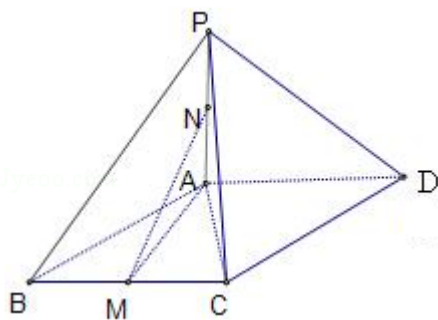
$$\therefore NM \parallel EC,$$

又 $EC \subset$ 平面 ACE, $NM \not\subset$ 平面 ACE

$\therefore MN \parallel$ 平面 ACE,

即在 PD 上存在一点 E, 使得 $NM \parallel$ 平面 ACE,

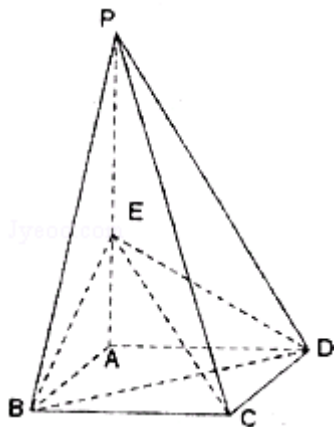
此时 $PE = \frac{1}{2}PD = \sqrt{2}$.



【点评】 本题考查空间中直线与平面之间的位置关系，是一个非常适合作为高考题目出现的问题，题目包含的知识点比较全面，重点突出，是一个好题。

5. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形，侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA=2$ ， E 是侧棱 PA 上的动点。

- (1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；
- (2) 如果 E 是 PA 的中点，求证： $PC \parallel$ 平面 BDE ；
- (3) 是否不论点 E 在侧棱 PA 的任何位置，都有 $BD \perp CE$ ？证明你的结论。



- 【分析】 (1) 利用四棱锥的体积计算公式即可；
- (2) 利用三角形的中位线定理和线面平行的判定定理即可证明；
- (3) 利用线面垂直的判定和性质即可证明。

【解答】 解：(1) $\because PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $\therefore PA$ 为此四棱锥底面上的高。

$$\therefore V_{\text{四棱锥 } P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{正方形 } ABCD} \times PA = \frac{1}{3} \times 1^2 \times 2 = \frac{2}{3}.$$

(2) 连接 AC 交 BD 于 O, 连接 OE.

\because 四边形 ABCD 是正方形, $\therefore AO=OC$,

又 $\because AE=EP$, $\therefore OE \parallel PC$.

又 $\because PC \not\subset$ 平面 BDE, $OE \subset$ 平面 BDE.

$\therefore PC \parallel$ 平面 BDE.

(3) 不论点 E 在侧棱 PA 的任何位置, 都有 $BD \perp CE$.

证明: \because 四边形 ABCD 是正方形, $\therefore BD \perp AC$.

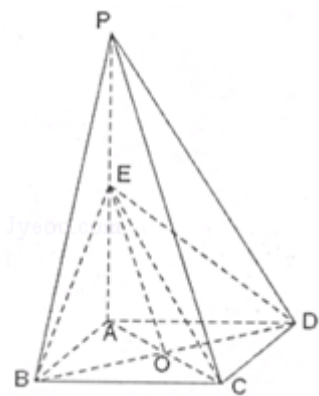
$\because PA \perp$ 底面 ABCD, $\therefore PA \perp BD$.

又 $\because PA \cap AC=A$,

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC.

$\because CE \subset$ 平面 PAC.

$\therefore BD \perp CE$.



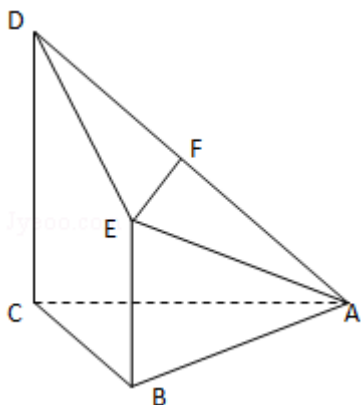
【点评】 熟练掌握线面平行、垂直的判定和性质定理及四棱锥的体积计算公式是解题的关键.

6. 已知四棱锥 A-BCDE, 其中 $AB=BC=AC=BE=1$, $CD=2$, $CD \perp$ 面 ABC, $BE \parallel CD$, F 为 AD 的中点.

(I) 求证: $EF \parallel$ 面 ABC;

(II) 求证: 平面 ADE \perp 平面 ACD;

(III) 求四棱锥 $A-BCDE$ 的体积.



【分析】(I) 取 AC 中点 G , 连接 FG 、 BG , 根据三角形中位线定理, 得到四边形 $FGBE$ 为平行四边形, 进而得到 $EF \parallel BG$, 再结合线面平行的判定定理得到 $EF \parallel$ 面 ABC ;

(II) 根据已知中 $\triangle ABC$ 为等边三角形, G 为 AC 的中点, $DC \perp$ 面 ABC 得到 $BG \perp AC$, $DC \perp BG$, 根据线面垂直的判定定理得到 $BG \perp$ 面 ADC , 则 $EF \perp$ 面 ADC , 再由面面垂直的判定定理, 可得面 $ADE \perp$ 面 ACD ;

(III) 方法一: 四棱锥 $A-BCDE$ 分为两个三棱锥 $E-ABC$ 和 $E-ADC$, 分别求出三棱锥 $E-ABC$ 和 $E-ADC$ 的体积, 即可得到四棱锥 $A-BCDE$ 的体积.

方法二: 取 BC 的中点为 O , 连接 AO , 可证 $AO \perp$ 平面 $BCDE$, 即 AO 为 V_{A-BCDE} 的高, 求出底面面积和高代入棱锥体积公式即可求出四棱锥 $A-BCDE$ 的体积.

【解答】 证明: (I) 取 AC 中点 G , 连接 FG 、 BG ,

$\because F, G$ 分别是 AD, AC 的中点

$\therefore FG \parallel CD$, 且 $FG = \frac{1}{2}DC = 1$.

$\because BE \parallel CD \therefore FG$ 与 BE 平行且相等

$\therefore EF \parallel BG$.

$EF \not\subset$ 面 ABC , $BG \subset$ 面 ABC

$\therefore EF \parallel$ 面 $ABC \cdots$ (4分)

(II) $\because \triangle ABC$ 为等边三角形 $\therefore BG \perp AC$

又 $\because DC \perp$ 面 ABC , $BG \subset$ 面 $ABC \therefore DC \perp BG$

$\therefore BG$ 垂直于面 ADC 的两条相交直线 AC, DC ,

$\therefore BG \perp$ 面 ADC (6分)

$\because EF \parallel BG$

$\therefore EF \perp$ 面 ADC

$\because EF \subset$ 面 ADE , \therefore 面 $ADE \perp$ 面 ADC (8分)

解: (III)

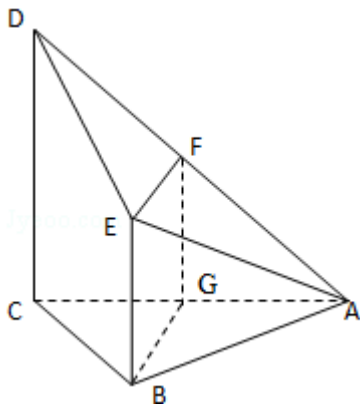
方法一: 连接 EC , 该四棱锥分为两个三棱锥 $E-ABC$ 和 $E-ADC$.

$$V_{A-BCDE} = V_{E-ABC} + V_{E-ADC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \dots (12分)$$

方法二: 取 BC 的中点为 O , 连接 AO , 则 $AO \perp BC$, 又 $CD \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore CD \perp AO$, $BC \cap CD = C$, $\therefore AO \perp$ 平面 $BCDE$,

$$\therefore AO \text{ 为 } V_{A-BCDE} \text{ 的高, } AO = \frac{\sqrt{3}}{2}, S_{BCDE} = \frac{(1+2) \times 1}{2} = \frac{3}{2}, \therefore V_{A-BCDE} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

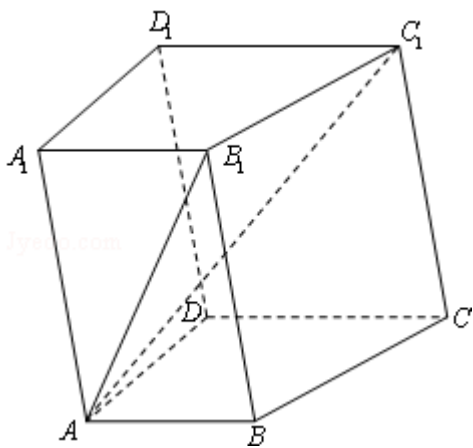


【点评】 本题考查的知识点是直线与平面平行的判定, 平面与平面垂直的判定, 棱锥的体积, 其中熟练掌握空间线面平行或垂直的判定、性质、定义、几何特征是解答此类问题的关键.

7. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$.

(1) 求证: $BC \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;

(2) 求证: 平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 AB_1C_1 .



【分析】(1) 根据 $BC \parallel B_1C_1$, 且 $B_1C_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , $BC \not\subset$ 平面 AB_1C_1 , 依据线面平行的判定定理推断出 $BC \parallel$ 平面 AB_1C_1 .

(2) 平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 推断出平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 又平面 $A_1ABB_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = A_1B_1$, $A_1B_1 \perp C_1B_1$, $C_1B_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , 根据面面垂直的性质推断出平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 AB_1C_1 .

【解答】证明: (1) $\because BC \parallel B_1C_1$, 且 $B_1C_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , $BC \not\subset$ 平面 AB_1C_1 ,

$\therefore BC \parallel$ 平面 AB_1C_1 .

(2) \because 平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

\therefore 平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

\because 平面 $A_1ABB_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = A_1B_1$, $A_1B_1 \perp C_1B_1$,

$\therefore C_1B_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 ,

\therefore 平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 AB_1C_1 .

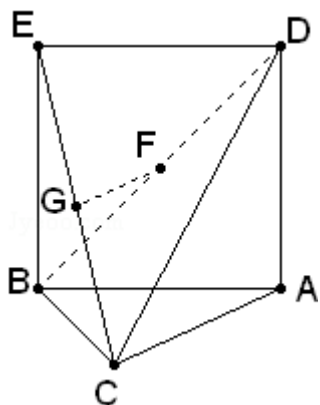
【点评】本题主要考查了线面平行和面面垂直的判定定理. 注重了对基础知识的考查.

8. 如图, 三角形 ABC 中, $AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$, $ABED$ 是边长为 1 的正方形, 平面 $ABED \perp$ 底面 ABC , 若 G 、 F 分别是 EC 、 BD 的中点.

(1) 求证: $GF \parallel$ 底面 ABC ;

(II) 求证: $AC \perp$ 平面 EBC ;

(III) 求几何体 $ADEBC$ 的体积 V .



【分析】(1) 证法一: 证明一条直线与一个平面平行, 除了可以根据直线与平面平行的判定定理以外, 通常还可以通过平面与平面平行进行转化, 比如取 BE 的中点 H , 连接 HF 、 GH , 根据中位线定理易证得: 平面 $HGF \parallel$ 平面 ABC , 进一步可得: $GF \parallel$ 平面 ABC .

证法二: 根据直线与平面平行的判定定理可知: 如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行, 那么直线和这个平面平行. 故只需在平面 ABC 中找到与 GF 平行的直线即可. 因为 G 、 F 分别是 EC 、 BD 的中点, 故平移是可以通过构造特殊的四边形、三角形来实现.

证法三: 根据直线与平面平行的判定定理可知: 如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行, 那么直线和这个平面平行. 故只需在平面 ABC 中找到与 GF 平行的直线即可. 因为 G 、 F 分别是 EC 、 BD 的中点, 所以构造中位线是常用的找到平行直线的方法.

(2) 证明直线与平面垂直, 关键要找到两条相交直线与之都垂直. 有时候题目中没有现成的直线与直线垂直, 需要我们先通过直线与平面垂直或者平面与平面垂直去转化一下. 由第一问可知: $GF \parallel$ 平面 ABC , 而平面 $ABED \perp$ 平面 ABC , 所以 $BE \perp$ 平面 ABC , 所以 $BE \perp AC$; 又由勾股定理可以证明: $AC \perp BC$.

(3) 解决棱锥、棱柱求体积的问题, 关键在于找到合适的高与对应的底面, 切忌不审图形, 盲目求解; 根据平面与平面垂直的性质定理可知: $CN \perp$ 平面 $ABED$, 而 $ABED$ 是边长为 1 的正方形, 进一步即可以求得体积.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/195040300220011141>