

备战 2024 中考数学一轮复习

第二章方程(组)与不等式(组)

第 2 讲一元二次方程

No 考向解读

① 考点精析

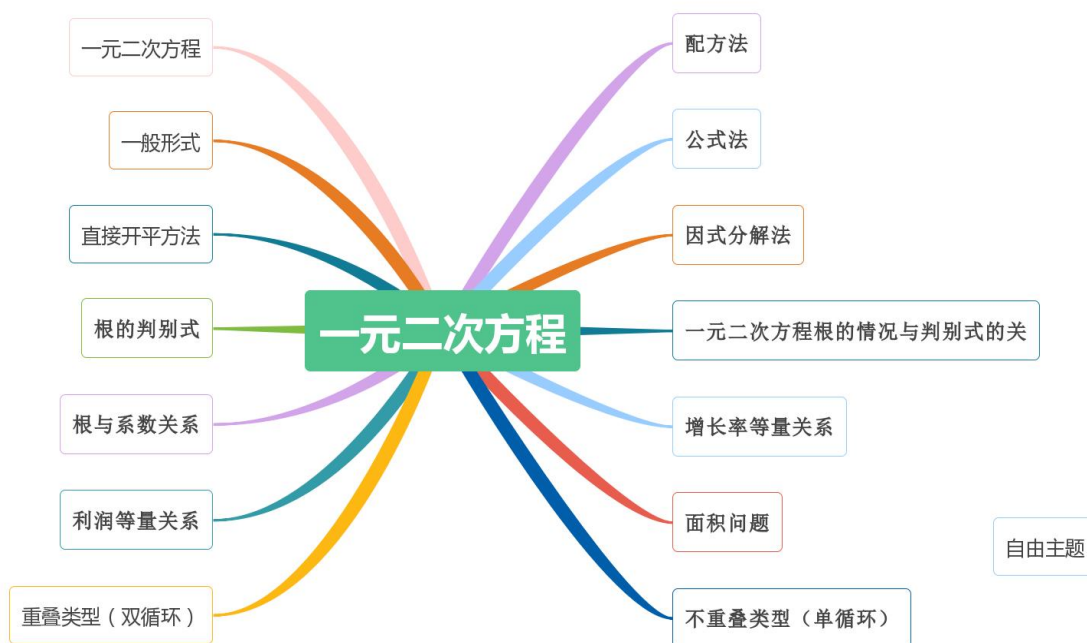
② 真题精讲

③ 题型突破

④ 专题精练

第 2 讲一元二次方程

→ ① 考点精析 ←



→ ② 真题精讲 ←

考向一 一元二次方程的解

考向二 解一元二次方程

考向三 一元二次方程根的判别式

考向四 含参问题

考向五 根与系数关系

考向六 一元二次方程在实际问题中的应用

第 2 讲一元二次方程

本考点内容以考查一元二次方程的相关概念、解一元二次方程、根的判别式、韦达定理（根与系数的关系）、一元二次方程的应用题为主，既有单独考查，也有和二次函数结合考察最值问题，年年考查，分值为 20 分左右，预计 2024 年各地中考还将继续考查上述的几个题型，为避免丢分，学生应扎实掌握。

→ ① 考点精析 ←

一、一元二次方程的概念

1. **一元二次方程**：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程。

2. **一般形式**： $ax^2 + bx + c = 0$ （其中 a, b, c 为常数， $a \neq 0$ ），其中 ax^2, bx, c 分别叫做二次项、一次项和常数项， a, b 分别称为二次项系数和一次项系数。

注意：（1）在一元二次方程的一般形式中要注意 $a \neq 0$ ，因为当 $a = 0$ 时，不含有二次项，即不是一元二次方程；（2）一元二次方程必须具备三个条件：①必须是整式方程；②必须只含有一个未知数；③所含未知数的最高次数是 2。

二、一元二次方程的解法

1. **直接开平方法**：适合于 $(x \pm a)^2 = b (b \geq 0)$ 或 $(ax \pm b)^2 = (cx \pm d)^2$ 形式的方程。

2. **配方法**：（1）化二次项系数为 1；（2）移项，使方程左边只含有二次项和一次项，右边为常数项；

（3）方程两边同时加上一次项系数一半的平方；（4）把方程整理成 $(x \pm a)^2 = b (b \geq 0)$ 的形式；

（5）运用直接开平方法解方程。

3. **公式法**：（1）把方程化为一般形式，即 $ax^2 + bx + c = 0$ ；（2）确定 a, b, c 的值；（3）

求出 $b^2 - 4ac$ 的值；（4）将 a, b, c 的值代入 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 即可。

4. **因式分解法**：基本思想是把方程化成 $(ax + b)(cx + d) = 0$ 的形式，可得 $ax + b = 0$ 或 $cx + d = 0$ 。

三、一元二次方程根的判别式及根与系数关系

1. 根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 是否有实数根，由 $b^2 - 4ac$ 的符号来确定，我们把 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程根的判别式。

2. 一元二次方程根的情况与判别式的关系

- (1) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根；
- (2) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有 1 个（两个相等的）实数根；
- (3) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 没有实数根。

3. 根与系数关系：对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ （其中 a, b, c 为常数， $a \neq 0$ ），设

其两根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 。

四、利用一元二次方程解决实际问题

列一元二次方程解应用题步骤和列一元一次方程(组)解应用题步骤一样，即审、设、列、解、验、答六步。列一元二次方程解应用题，经济类和面积类问题是常考内容。

1. 增长率等量关系

(1) 增长率 = 增长量 ÷ 基础量。(2) 设 a 为原来量， m 为平均增长率， n 为增长次数， b 为增长后的量，则 $a(1+m)^n = b$ ；当 m 为平均下降率时，则有 $a(1-m)^n = b$ 。

2. 利润等量关系：(1) 利润 = 售价 - 成本。(2) 利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{成本}} \times 100\%$ 。

3. 面积问题

(1) 类型 1：如图 1 所示的矩形 $ABCD$ 长为 a ，宽为 b ，空白“回形”道路的宽为 x ，则阴影部分的面积为 $(a-2x)(b-2x)$ 。

(2) 类型 2：如图 2 所示的矩形 $ABCD$ 长为 a ，宽为 b ，阴影道路的宽为 x ，则空白部分的面积为 $(a-x)(b-x)$ 。

(3) 类型 3：如图 3 所示的矩形 $ABCD$ 长为 a ，宽为 b ，阴影道路的宽为 x ，则 4 块空白部分的面积之和可转化为 $(a-x)(b-x)$ 。

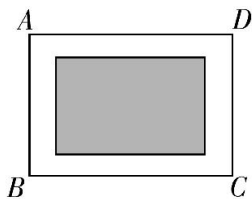


图 1

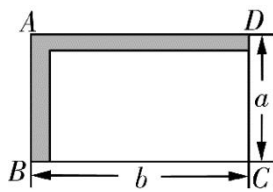


图 2

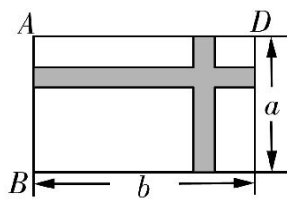


图 3

4. 碰面问题（循环问题）

（1）**重叠类型（双循环）**： n 支球队互相之间都要打一场比赛，总共比赛场次为 m 。

$\because$ 1 支球队要和剩下的 $(n-1)$ 支球队比赛， $\therefore$ 1 支球队需要比 $(n-1)$ 场

$\because$ 存在 n 支这样的球队， $\therefore$ 比赛场次为： $n(n-1)$ 场

$\because$ A 与 B 比赛和 B 与 A 比赛是同一场比赛， $\therefore$ 上述求法有重叠部分。

$$\therefore m = \frac{1}{2}n(n-1)$$

（2）**不重叠类型（单循环）**： n 支球队，每支球队要在主场与所有球队各打一场，总共比赛场次为 m 。

$\because$ 1 支球队要和剩下的 $(n-1)$ 支球队比赛， $\therefore$ 1 支球队需要比 $(n-1)$ 场

$\because$ 存在 n 支这样的球队， $\therefore$ 比赛场次为： $n(n-1)$ 场。

$\because$ A 与 B 比赛在 A 的主场， B 与 A 比赛在 B 的主场，不是同一场比赛， $\therefore$ 上述求法无重叠。

$$\therefore m = n(n-1)$$

→ ② 真题精讲 ←

考向一 一元二次方程的解

紧扣一元二次方程的概念，方程的解直接代入方程中，等式成立，化简变形求解。

1. （2020·甘肃金昌·中考真题）已知 $x=1$ 是一元二次方程 $(m-2)x^2 + 4x - m^2 = 0$ 的一个根，则 m 的值为（ ）

A. -1 或 2

B. -1

C. 2

D. 0

【答案】B

【分析】首先把 $x=1$ 代入 $(m-2)x^2 + 4x - m^2 = 0$ ，解方程可得 $m_1=2$ ， $m_2=-1$ ，再结合一元二次方程定义可得 m 的值

【解析】解：把 $x=1$ 代入 $(m-2)x^2 + 4x - m^2 = 0$ 得： $m-2+4-m^2=0$ ，解得： $m_1=2$ ， $m_2=-1$

$\because (m-2)x^2 + 4x - m^2 = 0$ 是一元二次方程, $\therefore m-2 \neq 0$, $\therefore m \neq 2$, $\therefore m = -1$, 故选:

B.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的解和定义, 关键是注意方程二次项的系数不等于 0.

考向二 解一元二次方程

一元二次方程的常见解法及适用情形:

一般形式: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$	
直接开平方法	形如 $(x+m)^2 = n (n \geq 0)$ 的方程, 可直接开方求解, 则 $x_1 = -m + \sqrt{n}$, $x_2 = -m - \sqrt{n}$
因式分解法	可化为 $a(x+m)(x+n) = 0$ 的方程, 用因式分解法求解, 则 $x_1 = -m$, $x_2 = -n$
配方法	若不易于使用分解因式法求解, 可考虑配方为 $a(x+h)^2 = k$, 再直接开方求解
公式法	利用求根公式: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (\Delta = b^2 - 4ac \geq 0)$

2. (2023 秋·辽宁沈阳·九年级统考期末) 解方程: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

【分析】首先将方程进行因式分解, 然后根据因式分解的结果求出方程的解.

【详解】解: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-2=0$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 2.$$

【点睛】本题考查了解一元二次方程, 解题的关键是掌握因式分解法求解方程.

3. (2020·黑龙江齐齐哈尔·中考真题) 解方程: $x^2 - 5x + 6 = 0$

【答案】 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

【分析】利用因式分解的方法解出方程即可.

【解析】利用因式分解法求解可得. 解: $\because x^2 - 5x + 6 = 0$, $\therefore (x - 2)(x - 3) = 0$,

则 $x - 2 = 0$ 或 $x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

【点睛】本题考查解一元二次方程因式分解法, 关键在于熟练掌握因式分解的方法步骤.

4. (2020 • 山东聊城 • 中考真题) 用配方法解一元二次方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$, 配方正确的是 ().

A. $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$ B. $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$ C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$

【答案】A

【分析】按照配方法的步骤进行求解即可得答案.

【解析】解: $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 移项得 $2x^2 - 3x = 1$, 二次项系数化 1 的 $x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$,

配方得 $x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$ 即 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$ 故选: A

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程, 配方法的一般步骤为 (1) 把常数项移到等号的右边; (2) 把二次项的系数化为 1; (3) 等式两边同时加上一项系数一半的平方.

【点睛】本题考查了解一元二次方程, 能够根据方程特点灵活选用不同的解法是解题关键.

5. (2020 • 四川乐山 • 中考真题) 已知 $y \neq 0$, 且 $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$. 则 $\frac{x}{y}$ 的值是_____.

【答案】4 或 -1

【分析】将已知等式两边同除以 y^2 进行变形, 再利用换元法和因式分解法解一元二次方程即可得.

【解析】 $\because y \neq 0 \therefore$ 将 $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$ 两边同除以 y^2 得: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{3x}{y} - 4 = 0$

令 $t = \frac{x}{y}$ 则 $t^2 - 3t - 4 = 0$ 因式分解得: $(t - 4)(t + 1) = 0$ 解得 $t = 4$ 或 $t = -1$

即 $\frac{x}{y}$ 的值是 4 或 -1 故答案为: 4 或 -1.

【点睛】本题考查了利用换元法和因式分解法解一元二次方程, 将已知等式进行正确变形是

解题关键.

考向三 一元二次方程根的判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$, ①若 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; ②若 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; ③若 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

6. (2023·四川泸州·统考中考真题) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 没有实数根
B. 有两个相等的实数根
C. 有两个不相等的实数根
D. 实数根的个数与实数 a 的取值有关

【答案】C

【分析】根据一元二次方程根的判别式求出 $\Delta = (2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4 > 0$, 即可得出答案.

【详解】解: $\because \Delta = (2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4 > 0$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 故 C 正确.

故选: C.

【点睛】本题考查了根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

7. (2023·浙江杭州·统考中考真题) 设一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$. 在下面的四组条件中选择其中一组 b, c 的值, 使这个方程有两个不相等的实数根, 并解这个方程.

① $b = 2, c = 1$; ② $b = 3, c = 1$; ③ $b = 3, c = -1$; ④ $b = 2, c = 2$.

注: 如果选择多组条件分别作答, 按第一个解答计分.

【答案】选②, $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; 选③, $x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

【分析】先根据判别式判断一元二次方程根的情况, 再利用公式法解一元二次方程即可.

【详解】解: $x^2 + bx + c = 0$ 中 $a = 1$,

① $b = 2, c = 1$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$, 方程有两个相等的实数根;

② $b = 3, c = 1$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$, 方程有两个不相等的实数根;

③ $b = 3, c = -1$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0$, 方程有两个不相等的实数根;

④ $b=2, c=2$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, 方程没有实数根;

因此可选择②或③.

选择② $b=3, c=1$ 时,

$$x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2};$$

选择③ $b=3, c=-1$ 时,

$$x^2 + 3x - 1 = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}.$$

【点睛】本题考查根据判别式判断一元二次方程根的情况, 解一元二次方程, 解题的关键是掌握: 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根.

考向四 含参问题

8. (2023·四川眉山·统考中考真题) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是 ()

A. $m < \frac{3}{2}$

B. $m > 3$

C. $m \leq 3$

D. $m < 3$

【答案】D

【分析】利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4(m - 2) > 0,$$

$$\therefore m < 3,$$

故选: D.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等

的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根。

9. (2023·山东聊城·统考中考真题) 若一元二次方程 $mx^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数解，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \geq -1$ B. $m \neq 1$ C. $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$ D. $m \neq 1$ 且 $m \neq 0$

【答案】D

【分析】由于关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根，根据一元二次方程根与系数的关系可知 $\Delta \geq 0$ ，且 $m \neq 0$ ，据此列不等式求解即可。

【详解】解：由题意得， $4 - 4m \geq 0$ ，且 $m \neq 0$ ，

解得， $m \leq 1$ ，且 $m \neq 0$ 。

故选：D。

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，熟练掌握根的判别式与根的关系式解答本题的关键。当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根。

10. (2023·山东枣庄·统考中考真题) 若 $x = 3$ 是关 x 的方程 $ax^2 - bx = 6$ 的解，则 $2023 - 6a + 2b$ 的值为_____。

【答案】2019

【分析】将 $x = 3$ 代入方程，得到 $3a - b = 2$ ，利用整体思想代入求值即可。

【详解】解： $\because x = 3$ 是关 x 的方程 $ax^2 - bx = 6$ 的解，

$$\therefore a \cdot 3^2 - 3b = 6, \text{ 即: } 3a - b = 2,$$

$$\therefore 2023 - 6a + 2b$$

$$= 2023 - 2(3a - b)$$

$$= 2023 - 2 \times 2$$

$$= 2023 - 4$$

$$= 2019;$$

故答案为：2019。

【点睛】本题考查方程的解，代数式求值。熟练掌握方程的解是使等式成立的未知数的值，是解题的关键。

11. (2023·湖北荆州·统考中考真题) 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k + 4)x + k - 6 = 0$ 有

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/195122040332011221>