# 云南省昆明市2024届数学高三上期末达标检测模拟试题

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0．5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．将函数$y=\sin\left(3x+\varphi\right)$的图象沿$x$轴向左平移$\dfrac{\pi}{9}$个单位长度后，得到函数$f\left(x\right)$的图象，则“$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$”是“$f\left(x\right)$是偶函数”的（　　）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

2．在$\Delta ABC$中，角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，若$2\left(b\cos A+a\cos B\right)=c^2$，$b=3$，$3\cos A=1$，则$a=$（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．3　　C．$\sqrt{10}$　　D．4

3．设$A\left(2,-1\right)$，$B\left(4,1\right)$,则以线段$AB$为直径的圆的方程是（　　）

A．$(x-3)^2+y^2=2$　　　　B．$(x-3)^2+y^2=8$

C．$(x+3)^2+y^2=2$　　　　D．$(x+3)^2+y^2=8$

4．圆心为$\left(2,1\right)$且和$x$轴相切的圆的方程是（　　）

A．$(x-2)^2+(y-1)^2=1$　　　　B．$\left(x+2\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$

C．$\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=5$　　　　D．$\left(x+2\right)^2+\left(y+1\right)^2=5$

5．甲、乙两名学生的六次数学测验成绩(百分制)的茎叶图如图所示.

| 甲 | | 乙 |
|---|---|---|
| | 6 | 9 |
| 6 2 | 7 | 8 |
| 6 2 0 | 8 | 7 8 |
| 0 | 9 | 2 6 |

①甲同学成绩的中位数大于乙同学成绩的中位数；

②甲同学的平均分比乙同学的平均分高；

③甲同学的平均分比乙同学的平均分低；

④甲同学成绩的方差小于乙同学成绩的方差.

以上说法正确的是（　　）

A．③④　　B．①②　　C．②④　　D．①③④

6．若等差数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，且$S_{13}=0$，$a_3+a_4=21$，则$S_7$的值为（　　）.

A．21　　B．63　　C．13　　D．84

7．下列函数中，图象关于$y$轴对称的为（　　）

A．$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　B．$f(x)=\sqrt{7+2x}+\sqrt{7-2x}$，$x\in\left[-1,2\right]$

C．$f(x)=\sin 8x$　　D．$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x^2}$

8．已知定义在$\left[1,+\infty\right)$上的函数$f\left(x\right)$满足$f\left(3x\right)=3f\left(x\right)$，且当$1\le x\le 3$时，$f\left(x\right)=1-\left|x-2\right|$，则方程$f\left(x\right)=f\left(2019\right)$的最小实根的值为（　　）

A．168　　B．249　　C．411　　D．561

9．i是虚数单位，$z=\dfrac{2i}{1-i}$则$|z|=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

10．双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点为$F_1,F_2$，一条渐近线方程为$l:y=-\dfrac{b}{a}x$，过点$F_1$且与$l$垂直的直线分别交双曲线的左支及右支于$P,Q$，满足$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OF_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{10}$　　B．3　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

11．等差数列$\{a_n\}$中，已知$3a_5=7a_{10}$，且$a_1<0$，则数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$ $(n\in N^*)$中最小的是（　　）

A．$S_7$或$S_8$　　B．$S_{12}$　　C．$S_{13}$　　D．$S_{14}$

12．已知半径为2的球内有一个内接圆柱，若圆柱的高为2，则球的体积与圆柱的体积的比为（　　）

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{9}{16}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{16}{9}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知集合$A=\left\{x\,|\,x=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3\right\}$，其中$a_k\in\left\{0,1,2\right\}$，$k=0,1,2,3$.且$a_3\ne 0$，则集合$A$中所有元素的和为_________.

14．在平面直角坐标系$xOy$中，双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的右准线与渐近线的交点在抛物线$y^2=2px$上，则实数$p$

的值为________.

15．对于任意的正数$a,b$，不等式$(2ab+a^2)k\le 4b^2+4ab+3a^2$恒成立，则$k$的最大值为_____.

16．某高校组织学生辩论赛，六位评委为选手$A$成绩打出分数的茎叶图如图所示，若去掉一个最高分，去掉一个最低分，则所剩数据的平均数与中位数的差为______.

| | |
|---|---|
| 8 | 2 3 5 7 |
| 9 | 5 8 |

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数$f(x)=a\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)-x^2-ax(a>0)$是减函数.

（1）试确定 a 的值；

（2）已知数列$\{a_n\}$ $a_n=\dfrac{\ln\left(n+1\right)}{n+1}$ $T_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n\left(n\in N^*\right)$，求证：$\ln\left[\left(n+2\right)T_n\right]<1-\dfrac{n}{2}$.

18．（12 分）已知矩阵$M=\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}(a,b\in \mathrm{R})$不存在逆矩阵，且非零特低值对应的一个特征向量$\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，求$a$，$b$的值.

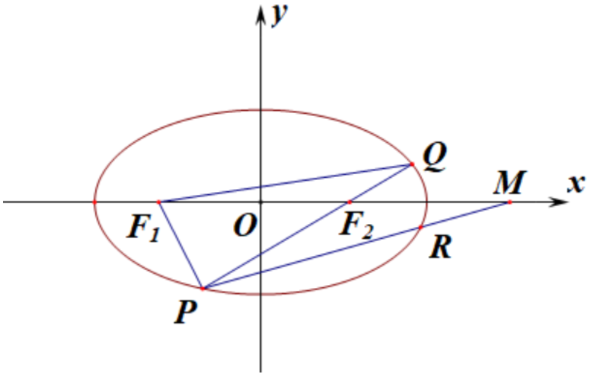
19．（12 分）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+(1-a)x-\ln x,a\in R$.

（1）讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）若$a\in(-\infty,1)$，设$g\left(x\right)=xe^x-x-\ln x+a$，证明：$\forall x_1\in(0,2]$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使

$f\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)>2-\ln 2$.

20．（12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，焦距为 4，且椭圆过点$(2,\dfrac{5}{3})$，过点$F_2$且不平行于坐标轴的直线$l$交椭圆与$P,Q$两点，点$Q$关于$x$轴的对称点为$R$，直线$PR$交$x$轴于点$M$.




（1）求$\triangle PF_1Q$的周长；

（2）求$\triangledown PF_1M$面积的最大值.

21.（12 分）已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}+ax$，$a\in R$.

（1）讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）若$f\left(x\right)$存在两个极值点$x_1$，$x_2$，证明：$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<\left(a-2\right)\left(\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}\right)$.

22.（10 分）已知向量$\vec{a}=\left(2\sin x,-\sqrt{3}\right),\vec{b}=\left(\cos x,2\cos^2 x-1\right)$，$f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

（1）求$f\left(x\right)$的最小正周期；

（2）若$\Delta ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，且$a=\sqrt{3},b=1,\ f\left(A\right)=\sqrt{3}$，求$\Delta ABC$的面积.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

求出函数$y=f\left(x\right)$的解析式，由函数$y=f\left(x\right)$为偶函数得出$\varphi$的表达式，然后利用充分条件和必要条件的定义判断即可.

【详解】

将函数$y=\sin\left(3x+\varphi\right)$的图象沿$x$轴向左平移$\dfrac{\pi}{9}$个单位长度，得到的图象对应函数的解析式为

$$f\left(x\right)=\sin\left[3\left(x+\frac{\pi}{9}\right)+\varphi\right]=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right),$$

若函数$y=f\left(x\right)$为偶函数，则$\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，解得$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{6}\left(k\in Z\right)$，

当$k=0$时，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

因此，“$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$”是“$y=f\left(x\right)$是偶函数”的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】

本题考查充分不必要条件的判断，同时也考查了利用图象变换求三角函数解析式以及利用三角函数的奇偶性求参数，考查运算求解能力与推理能力，属于中等题.

2、**B**

【解析】

由正弦定理及条件可得 $2\left(\sin B\cos A+\sin A\cos B\right)=c\sin C$，

即 $2\sin\left(A+B\right)=2\sin C=c\sin C$.

$\because \sin C>0$，

$\therefore c=2$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+3^2-2\times2\times3\times\dfrac{1}{3}=9$。

$\therefore a=3$.选 **B**。

3、**A**

【解析】

计算 $AB$ 的中点坐标为 $\left(3,0\right)$，圆半径为 $r=\sqrt{2}$，得到圆方程.

【详解】

$AB$ 的中点坐标为：$\left(3,0\right)$，圆半径为 $r=\dfrac{\left|AB\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}=\sqrt{2}$，

圆方程为 $(x-3)^2+y^2=2$.

故选：$A$.

【点睛】

本题考查了圆的标准方程，意在考查学生的计算能力.

4、**A**

【解析】

求出所求圆的半径，可得出所求圆的标准方程.

【详解】

圆心为 $\left(2,1\right)$ 且和 $x$ 轴相切的圆的半径为 $1$，因此，所求圆的方程为 $\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查圆的方程的求解，一般求出圆的圆心和半径，考查计算能力，属于基础题.

5、**A**

【解析】

由茎叶图中数据可求得中位数和平均数,即可判断①②③,再根据数据集中程度判断④.

【详解】

由茎叶图可得甲同学成绩的中位数为$\frac{80+82}{2}=81$,乙同学成绩的中位数为$\frac{87+88}{2}=87.5$,故①错误;

$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(72+76+80+82+86+90)=81$,$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{6}\times(69+78+87+88+92+96)=85$,则$\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$,故②错误,③正确;

显然甲同学的成绩更集中,即波动性更小,所以方差更小,故④正确,

故选:A

【点睛】

本题考查由茎叶图分析数据特征,考查由茎叶图求中位数、平均数.

6、B

【解析】

由已知结合等差数列的通项公式及求和公式可求$d$，$a_1$，然后结合等差数列的求和公式即可求解.

【详解】

解：因为$S_{13}=0$，$a_3+a_4=21$，

所以$\begin{cases}13a_1+13\times 6d=0\\ 2a_1+5d=21\end{cases}$，解可得，$d=-3$，$a_1=18$，

则$S_7=7\times 18+\frac{1}{2}\times 7\times 6\times(-3)=63$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础题.

7、D

【解析】

图象关于$y$轴对称的函数为偶函数,用偶函数的定义及性质对选项进行判断可解.

【详解】

图象关于$y$轴对称的函数为偶函数;

*A*中，$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-f(x)$，故$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$为奇函数;

*B*中，$f(x)=\sqrt{7+2x}+\sqrt{7-2x}$的定义域为$\left[-1,2\right]$，

不关于原点对称，故为非奇非偶函数;

***C*** 中，由正弦函数性质可知，$f(x)=\sin 8x$ 为奇函数；

***D*** 中，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{(-x)^2}=f(x)$，故 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{x^2}$ 为偶函数.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查判断函数奇偶性. 判断函数奇偶性的两种方法:

**(1)**定义法：对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$ 都有 $f(x)=-f(-x)$，则函数 $f(x)$ 是奇函数；都有 $f(x)=f(-x)$，则函数 $f(x)$ 是偶函数

**(2)**图象法：函数是奇(偶)函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点( $y$ 轴)对称.

8、**C**

【解析】

先确定解析式求出 $f(2019)$ 的函数值,然后判断出方程 $f\left(x\right)=f\left(2019\right)$ 的最小实根的范围结合此时的 $f(x)=x-3^5$，通过计算即可得到答案.

【详解】

当 $x\geq 1$ 时，$f\left(3x\right)=3f\left(x\right)$，所以 $f(x)=3f(\frac{x}{3})=3^2f(\frac{x}{3^2})=\cdots=3^n f(\frac{x}{3^n})$，故当

$3^n\leq x\leq 3^{n+1}$ 时，$\dfrac{x}{3^n}\in[1,3]$，所以 $f\left(x\right)=3^n(1-\left|\dfrac{x}{3^n}-2\right|)=\begin{cases}3^{n+1}-x, & x\geq 2\cdot 3^n\\ x-3^n, & x<2\cdot 3^n\end{cases}$，而

$2019\in[3^6,3^7]$，所以 $f(2019)=3^6(1-\left|\dfrac{2019}{3^6}-2\right|)=3^7-2109=168$，又当 $1\leq x\leq 3$ 时，

$f\left(x\right)$ 的极大值为 **1**，所以当 $3^n\leq x\leq 3^{n+1}$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $3^n$，设方程 $f\left(x\right)=168$

的最小实根为 $t$，$168\in[3^4,3^5]$，则 $t\in(3^5,\dfrac{3^5+3^6}{2})$，即 $t\in(243,468)$，此时 $f(x)=x-3^5$

令 $f(x)=x-3^5=168$，得 $t=243+168=411$，所以最小实根为 **411.**

故选：**C.**

【点睛】

本题考查函数与方程的根的最小值问题，涉及函数极大值、函数解析式的求法等知识，本题有一定的难度及高度，是一道有较好区分度的压轴选这题.

9、**C**

【解析】

由复数除法的运算法则求出$z$，再由模长公式，即可求解.

【详解】

由$z=\dfrac{2i(1+i)}{1-i^2}=-1+i,|z|=\sqrt{2}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查复数的除法和模，属于基础题.

10、A

【解析】

设$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，直线$PQ$的方程为$x=\dfrac{b}{a}y-c$，联立方程得到$y_1+y_2=\dfrac{2ab^3}{\left(b^2-a^2\right)c}$，$y_1y_2=\dfrac{a^2b^4}{\left(b^2-a^2\right)c^2}$，

根据向量关系化简到$b^2=9a^2$，得到离心率.

【详解】

设$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，直线$PQ$的方程为$x=\dfrac{b}{a}y-c$.

联立$\begin{cases}x=\dfrac{b}{a}y-c,\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$整理得$\left(b^4-a^4\right)y^2-2ab^3cy+a^2b^4=0$，

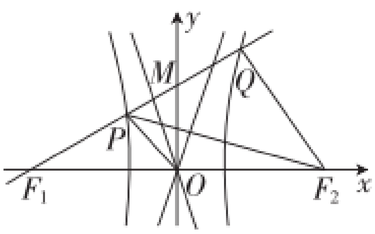
则$y_1+y_2=\dfrac{2ab^3}{\left(b^2-a^2\right)c},y_1y_2=\dfrac{a^2b^4}{\left(b^2-a^2\right)c^2}$.

因为$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OF_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$，所以$P$为线段$QF_1$的中点，所以$y_2=2y_1$，

$\dfrac{\left(y_1+y_2\right)^2}{y_1\cdot y_2}=\dfrac{9}{2}=\dfrac{4a^2b^6\left(b^2-a^2\right)c^2}{\left(b^2-a^2\right)^2c^2a^2b^4}=\dfrac{4b^2}{\left(b^2-a^2\right)}$，整理得$b^2=9a^2$，

故该双曲线的离心率$e=\sqrt{10}$.

故选：$A$.




【点睛】

本题考查了双曲线的离心率，意在考查学生的计算能力和转化能力.

11、**C**

【解析】

设公差为$d$，则由题意可得$3\left(a_1+4d\right)=7\left(a_1+9d\right)$，解得$d=-\frac{4a_1}{51}$，可得$a_n=\frac{(55-4n)a_1}{51}$.令$\frac{55-4n}{51}<0$，可得

当$n\geq 14$时，$a_n>0$，当$n\leq 13$时，$a_n<0$，由此可得数列$\{a_n\}$前$n$项和$S_n\left(n\in N^*\right)$中最小的.

【详解】

解：等差数列$\{a_n\}$中，已知$3a_5=7a_{10}$，且$a_1<0$，设公差为$d$，

则$3\left(a_1+4d\right)=7\left(a_1+9d\right)$，解得 $d=-\frac{4a_1}{51}$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=\frac{(55-4n)a_1}{51}$.

令 $\frac{55-4n}{51}<0$，可得$n>\frac{55}{4}$，故当$n\geq 14$时，$a_n>0$，当$n\leq 13$时，$a_n<0$，

故数列$\{a_n\}$前$n$项和$S_n\left(n\in N^*\right)$中最小的是$S_{13}$.

故选：**C.**

【点睛】

本题主要考查等差数列的性质，等差数列的通项公式的应用，属于中档题.

12、**D**

【解析】

分别求出球和圆柱的体积，然后可得比值.

【详解】

设圆柱的底面圆半径为$r$，则$r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以圆柱的体积$V_1=\pi\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\times 2=6\pi$.又球的体积

$V_2=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32}{3}\pi$，所以球的体积与圆柱的体积的比$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{32\pi}{3}}{6\pi}=\frac{16}{9}$，故选 **D.**

【点睛】

本题主要考查几何体的体积求解，侧重考查数学运算的核心素养.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、**2889**

【解析】

先计算集合中最小的数为$27$，最大的数为$80$，可得$A=\{27,28,\ldots,80\}$，求和即得解.

【详解】

当$a_3=1,a_2=a_1=a_0=0$时，集合中最小数$=27$；

当$a_3=a_2=a_1=a_0=2$时，得到集合中最大的数$2\times(\frac{1-3^4}{1-3})=80$；

$$\Rightarrow A=\{27,28,\ldots,80\}\Rightarrow\sum_{i=27}^{80}i=\frac{(27+80)\times 54}{2}=2889$$

故答案为：**2889**

【点睛】

本题考查了数列与集合综合，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

14、$\frac{1}{4}$

【解析】

求出双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右准线与渐近线的交点坐标，并将该交点代入抛物线的方程，即可求出实数$p$的方程.

【详解】

双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的半焦距为$2$，则双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右准线方程为$x=\frac{3}{2}$，渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，所以，该双曲线右准线与渐近线的交点为$\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

由题意得$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2p\times\frac{3}{2}$，解得$p=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

【点睛】

本题考查利用抛物线上的点求参数，涉及到双曲线的准线与渐近线方程的应用，考查计算能力，属于中等题.

15、$2\sqrt{2}$

【解析】

根据$a,b$均为正数，等价于$k\le\frac{3a^2+4ab+4b^2}{a^2+2ab}=3+\frac{4b^2-2ab}{a^2+2ab}$恒成立，令$b=xa,x>0$，转化为