

## 摘 要

在本文中, 我们采用协调间断有限元来求解时间相关 Brinkman 方程, 协调间断有限元方法 (CDG), 是一种高效求解偏微分方程的数值方法. 其主要思想是提高弱微分算子的次数以满足数值解的弱连续性. 与弱有限元方法相比, 该方法用内部函数的平均代替边界函数, 减少了自由度, 去除了稳定子, 降低了数值计算的复杂度. 本文采用协调间断有限元方法求解非稳态的 Brinkman 模型. 首先, 给出了 Sobolev 空间及弱函数空间, 离散弱梯度, 双线性形式的定义; 其次, 分别以对空间离散的半离散和对空间时间都离散的全离散两种情形分别提出相应新的变分形式, 分别建立了半离散及全离散两种情形下的误差方程, 并进一步给出在  $L^2$  范数及  $H^1$  范数下的误差估计. 最后, 给出了一些数值算例来验证该方法的精确性和有效性.

**关键词:** 时间相关的 Brinkman 方程, 协调间断有限元方法, 离散弱梯度.

## Abstract

In this paper, we use conforming discontinuous finite elements to solve the time-dependent Brinkman equation. The Conforming Discontinuous Galerkin (CDG) finite element method is an efficient numerical method for solving partial differential equations. The idea is to increase the degree of the weak differential operator to satisfy the weak continuity of the numerical solution. Compared with the Weak Galerkin finite element method, replacing the boundary function with the average of the internal function reduces the degree of freedom. Removing the stabilizer reduces the complexity of numerical computation. In this paper, the CDG method is used to solve the time-dependent Brinkman problem. Firstly, the definitions of Sobolev space and weak function space, discrete weak gradient, bilinear form are given. Secondly, the corresponding new variational forms are proposed in the case of semi-discrete space discreteness and total discreteness discretized for space time, respectively, the error equations under semi-discrete and fully discrete cases are established, and the error estimation under  $L^2$  norm and  $H^1$  norm is further given. Finally, some numerical examples are given to verify the accuracy and effectiveness of the method.

**Keywords:** time-dependent Brinkman equation, conforming discontinuous Galerkin finite element method, Discrete weak gradients.

# 目 录

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 摘 要                   | i  |
| 第一章 绪论                | 1  |
| 1.1 背景 . . . . .      | 1  |
| 1.2 主要结构 . . . . .    | 2  |
| 第二章 预备知识              | 5  |
| 2.1 空间介绍 . . . . .    | 5  |
| 2.2 离散弱梯度算子 . . . . . | 6  |
| 2.3 若干不等式 . . . . .   | 8  |
| 2.4 双线性形式 . . . . .   | 9  |
| 第三章 半离散格式             | 13 |
| 3.1 适定性分析 . . . . .   | 13 |
| 3.2 误差方程 . . . . .    | 18 |
| 3.3 误差估计 . . . . .    | 21 |
| 第四章 全离散格式             | 27 |
| 4.1 数值格式 . . . . .    | 27 |
| 4.2 误差方程 . . . . .    | 27 |
| 4.3 误差估计 . . . . .    | 29 |
| 第五章 数值实验              | 39 |
| 参考文献                  | 45 |
| 致 谢                   | 49 |



# 第一章 绪论

## 1.1 背景

多孔介质 [8, 23] 是一种表面上包含有让流体流动的细小开口的介质. 由于由多孔介质构成的物体表面有间隙, 所以流体通过这些间隙时能够渗透该物体. 多孔介质与流体问题密切相关, 从而得到许多研究人员的重视. 在科学研究和工业生产领域中, Brinkman 则是一个受到广泛关注的重要问题. 流体问题在科学研究, 工业生产和环境领域均有着广泛的应用. 数值模拟作为理论分析和实验探索的工具, 是研究流体问题的重要方法. 目前, 求解流体问题的方法也有很多, 例如: 有限体积法, 有限元方法等. Brinkman 方程是 Stokes 方程和 Darcy 方程的耦合, 所以迫切需要一个合理并且恰当的数值方法来更好地模拟这两种流体的各种特性, 并对两种流体稳定. 另一个难点, 是要在保证数值格式简单的条件下, 也能高效求解.

Brinkman [3] 方程所描述的是多孔介质内流体的流动. 这项研究结果被广泛应用于工业问题以及环境问题中, 特别是在钻井, 河流和断层附近的流体流动等 [10, 14, 16, 24, 26] 问题. Brinkman 方程可视为 Stokes 方程与 Darcy 方程的耦合 [17]. 当流体的粘性系数  $\mu$  趋于0时, 方程模拟 Darcy 流 [19], 当流体的粘性系数  $\mu$  远于0时, 方程模拟 Stokes 流 [1]. 随着人们对流体不断地认识和深入地研究, 对其求解的数值方法也在不断增多. 在其发展过程中人们发现 RT 元 [25] 和 BDM 元 [2] 对处理 Darcy 流稳定, 对 Stokes 流不稳定. 而 Mini 元 [1] 和 Taylor-Hood 元 [4] 对处理 Stokes 流稳定, 对 Darcy 流不稳定. 因此, 研究者们希望能找到既对 Stokes 流体稳定, 又对 Darcy 流体稳定的数值算法. 经过众多研究者的不断努力, 有限体积法 [18], 标准有限元方法 [6, 15] 非协调有限元方法 [37], 弱有限元法 [36, 40], 间断有限元方法 [12], 虚拟有限元法 [7, 30, 42] 等非标准有限元方法都能较好的处理这类问题.

弱有限元方法 (Weak Galerkin finite element methods) [22, 31] 是 2013 年由王军平和叶秀老师提出并应用于求解二阶椭圆方程的一种方法. 基于求解偏微分方程问题的经典有限元方法, WG 方法用弱微分算子代替经典微分算子, 并在数值格式中加入稳定子来保证数值解的弱连续性. 在弱有限元方法中, 区域的剖分单元可以是任意多边形或多面体, 因此数值的逼近形式更灵活. 在之后的发展中, 由于弱有限元方法函数选取以及网格剖分的灵活性等优点, 弱有限元方法受到国内外学者得到关

注与研究, 广泛应用于求解偏微分方程, 如 Darcy 问题 [19], 二阶椭圆混合问题 [32], 交界面问题 [22], Stokes 问题 [35], Brinkman 问题 [40, 41].

协调间断有限元方法就是在弱有限元方法 [32, 35] 的基础上加以改进的. 它的主旨在于用内部函数的平均代替边界函数. 在协调间断有限元方法下, 经典的微分算子可采用局部 Raviart-Thomas(RT) 元进行逼近, 如此, 求解泊松问题时就不需要稳定子了, 数值格式变得简单一些. 除此之外, 提高弱梯度的次数, 不仅可以取得相同的结果, 还不需要将网格限制在简单剖分上, 这点已在文献 [38] 中作了论证. 从而, CDG 方法就被应用于更广泛的领域并解决了更多的问题, 例如 Stokes 方程 [39], 椭圆边界问题 [33], 线弹性边界问题 [34] 等.

## 1.2 主要结构

本文由五部分组成. 第一部分是绪论, 介绍了流体问题中 Brinkman 问题的研究背景, 协调间断有限元方法的主要思想和优点, 以及简单介绍了本文的主要结构.

本文考虑时间相关 Brinkman 方程的形式如下:

$$\mathbf{u}_t - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p + \mu \kappa^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{在 } \Omega \times [0, T] \text{ 上}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{在 } \Omega \times [0, T] \text{ 上}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{在 } \partial\Omega \times [0, T] \text{ 上}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}^0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 上}. \quad (1.4)$$

其中  $\kappa$  是渗透率张量,  $\mu$  是流体的粘性系数,  $\mathbf{u}$  是流体速度函数,  $p$  是流体压力函数,  $\mathbf{f}$  是动量源项,  $\mathbf{g}$  表示  $\mathbf{u}$  在求解区域边界  $\partial\Omega$  上的取值,  $\mathbf{u}_t$  为  $\mathbf{u}(x, t)$  关于  $t$  的偏导数, 其中  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{u}^0$  均充分光滑.

Brinkman 问题定义在一个有界的多边形或多面体区域  $\Omega(t \in [0, T])$  上, 为计算简便, 取  $\mu = 1$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ . 此外, 假设存在  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ , 使得

$$\gamma_1 \zeta^t \zeta \leq \zeta^t \kappa^{-1} \zeta \leq \gamma_2 \zeta^t \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^d.$$

其中  $\zeta$  为任一列向量,  $\zeta^t$  为其转置.

根据问题 (1.1), 我们知道 Brinkman 问题的稳定性与渗透张量  $\kappa$  的取值紧密联系. 当渗透张量  $\kappa^{-1}$  趋于零时, Brinkman 问题更适用于 Stokes 问题, 相反, 当  $\kappa^{-1}$  很大时, Brinkman 问题又可以转化为 Darcy 问题. 综上所述, Brinkman 模型不同的渗透张量系数的选择可以得到 Stokes 问题和 Darcy 问题.

本文的目的在于用协调间断有限元方法解决时间相关的 Brinkman 方程. 对于  $k \geq 1$ , CDG 方法对于速度函数使用  $k$  次不连续多项式, 对于压力函数使用  $k-1$  次多项式. 最后可以看到该方法的几个优点, 第一, 该方法有简单的数值格式, 可以有效降低理论分析的复杂性. 第二, 由于 CDG 的弱函数空间是由标准多项式组成的, 因此更容易构造出高阶弱函数空间. 且与 WG 方法相比, CDG 方法的自由度比较少, 因为 WG 方法的弱函数空间中的  $v_b$  被  $v_0$  的平均所取代. 第三, 不会对网格有额外的限制, 有限元的剖分可以是任意的多边形或多面体.

本文第二部分会给出 Sobolev 空间以及一些弱函数空间的介绍, 并给出了向量函数离散弱梯度与标量函数离散弱梯度的定义, 还有一些论文中会用到的符号以及不等式.

在第三部分和第四部分中考虑时间相关 Brinkman 方程, 在文献 [21, 41] 的基础上分别建立关于半离散协调间断有限元格式和全离散协调间断有限元格式, 建立相应的误差方程. 最后, 分别给出速度函数和压力函数在半离散和全离散下的空间上的最优收敛阶.

在本文最后一部分中, 通过几个数值实验来验证协调间断有限元方法的有效性以及其理论分析的正确性.



## 第二章 预备知识

### 2.1 空间介绍

本节简要定义了 Sobolev 空间以及弱函数空间, 向量函数的离散弱梯度算子和标量函数的离散弱梯度算子以及后续证明会用到的一些不等式.

首先, 令  $D \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  为满足 Lipschitz 边界条件的有界开区域. 本文采用标准 Sobolev 空间  $H^s(D)$  的定义, 其对应的内积记为  $(\cdot, \cdot)_{s,D}$ , 范数为  $\|\cdot\|_{s,D}$  以及半范数  $|\cdot|_{s,D}$ , 其中  $s \geq 0$ . 空间  $H^0(D)$  与  $L^2(D)$  等价. 当  $D = \Omega$  时, 省略了范数和内积符号中的下标  $D$  和  $\partial D$ . 特别地, 我们有这样的函数空间:

$$[H_0^1(\Omega)]^d = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\},$$

和

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0\}.$$

对于函数  $\mathbf{v}$ , 它是  $D$  上的向量函数, 函数本身与其散度均在  $L^2(D)$  空间中, 将这样的函数所属的空间记为  $H(\text{div}; D)$ ,

$$H(\text{div}; D) = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in [L^2(D)]^d, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(D)\},$$

其上的范数为  $\|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}; D)} = (\|\mathbf{v}\|_D^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_D^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Brinkman 问题(1.1)-(1.4) 可以得到如下变分形式:

求  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; [H_0^1(\Omega)]^d)$  和  $p \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$ , 使得对任意的  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$  以及  $q \in L_0^2(\Omega)$ , 满足:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\kappa^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ (\mathbf{u}, \nabla q) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

## 2.2 离散弱梯度算子

在本节中, 我们将给出两个离散弱梯度算子的定义.

**定义 2.1** [32][形状正则剖分] 令  $\mathfrak{T}_h$  为区域  $\Omega$  的有限元剖分, 假定所有单元  $T \in \mathfrak{T}_h$  为闭连通多边形或多面体. 记  $|T|$  为  $T$  的面积或体积,  $|e|$  为  $e \in \mathcal{E}_h$  的长度或面积. 如果满足

(A1) 存在正常数  $\varrho_v$  和  $\varrho_e$ , 对单元  $T \in \mathfrak{T}_h$  的边或面  $e$ , 成立

$$\varrho_v h_T^d \leq |T|, \quad \varrho_e h_e^{d-1} \leq |e|.$$

(A2) 存在正常数  $\kappa$  对单元  $T \in \mathfrak{T}_h$  的边或面  $e$ , 成立

$$\kappa h_T \leq h_e.$$

(A3) 边为直线或面为平面. 对任意的  $T \in \mathfrak{T}_h$ , 存在  $T$  中棱锥体  $P(e, T, A_e)$ , 使得棱锥体以  $e \subset \partial T$  为底,  $A_e \in T$  为顶点, 高为  $\sigma_e h_T$ , 比例常数  $\sigma_e \geq \sigma_* > 0$ , 且对任意  $x_e \in e$ , 向量  $x_e - A_e$  和  $e$  的外法向形成的夹角  $\alpha$  为严格锐角, 亦即存在  $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , 使得  $0 \leq \alpha \leq \theta_0$ .

(A4) 对任意单元  $T \in \mathfrak{T}_h$ , 存在形状正则的外接单纯形  $S(T)$ , 其直径  $h_{S(T)}$  与  $h_T$  成正比, 即  $h_{S(T)} \leq \gamma_* h_T$ , 其中  $\gamma_*$  是与单元  $T$  无关的常数. 同时存在固定的整数  $m$ , 使得与单元相交的这种外接单纯形的个数不超过  $m$ .

假设系统定义在有界多边形或者多面体域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  上, 设  $\mathfrak{T}_h$  是区域  $\Omega$  上的多边形或多面体且满足形状正则条件的剖分,  $\mathcal{E}_h$  是  $\mathfrak{T}_h$  中所有边或面的集合. 用  $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$  表示所有内部边或面的集合. 对于任意的剖分单元  $T \in \mathfrak{T}_h$  和任意的剖分边  $e \in \mathcal{E}_h$ , 令  $h_T$  和  $h_e$  分别为  $T$  和  $e$  的直径, 且定义  $h = \max_{T \in \mathfrak{T}_h} h_T$ .

我们为向量值函数和标量值函数定义了与  $\mathfrak{T}_h$  相关的协调间断有限元空间. 对于给定的整数  $k \geq 1$ , 速度函数的空间定义如下:

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d : \mathbf{v}|_T \in [P_k(T)]^d, \forall T \in \mathfrak{T}_h\}.$$

定义  $\mathcal{V}_h^0$  为  $\mathcal{V}_h$  的子空间

$$\mathcal{V}_h^0 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}.$$

压力函数空间定义如下:

$$\mathcal{W}_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_T \in P_{k-1}(T), \forall T \in \mathfrak{T}_h\}.$$

假设  $T_1$  和  $T_2$  为  $\mathfrak{T}_h$  中相邻的两个单元, 公共边为  $e$ . 当  $e \in \mathcal{E}_h^0$  时,  $\mathbf{n}_1$  和  $\mathbf{n}_2$  分别为  $T_1$  和  $T_2$  在  $e$  上的单位外法向量. 特别地, 当  $e \in \partial\Omega$  时, 我们用  $\mathbf{n}_e$  表示  $T$  在  $e$  上的单位外法向量. 对于一个向量值函数  $\mathbf{v}$ , 它的平均值和跳有如下表示:

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{v}|_{T_1} + \mathbf{v}|_{T_2}), & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ \mathbf{v}|_e, & e \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\mathbf{v}] = \begin{cases} \mathbf{v}|_{T_1} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}|_{T_2} \cdot \mathbf{n}_2, & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ \mathbf{v}|_e \cdot \mathbf{n}_e, & e \in \partial\Omega. \end{cases}$$

此外, 对于  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h^0$ , 有

$$\|\mathbf{v} - \{\mathbf{v}\}\|_e = \begin{cases} \frac{1}{2}\|[\mathbf{v}]\|_e, & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ \|[\mathbf{v}]\|_e, & e \in \partial\Omega. \end{cases}$$

对于标量值函数, 它的平均值和跳有如下表示:

$$\{q\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(q|_{T_1} + q|_{T_2}), & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ q|_e, & e \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[q] = \begin{cases} q|_{T_1} \mathbf{n}_1 + q|_{T_2} \mathbf{n}_2, & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ q|_e \mathbf{n}_e, & e \in \partial\Omega. \end{cases}$$

类似地, 对于  $q \in \mathcal{W}_h$ ,

$$\|q - \{q\}\|_e = \begin{cases} \frac{1}{2}\|q\|_e, & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ 0, & e \in \partial\Omega. \end{cases}$$

接下来, 我们定义离散弱梯度算子. 对于一个向量值函数  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$ , 离散弱梯度  $\nabla_w \mathbf{v}|_T$  定义为  $[P_j(T)]^{d \times d}$  中的唯一多项式函数, 且满足:

$$(\nabla_w \mathbf{v}, \tau)_T = -(\mathbf{v}, \nabla \cdot \tau)_T + \langle \{\mathbf{v}\}, \tau \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}, \quad \forall \tau \in [P_j(T)]^{d \times d}, \quad (2.2)$$

其中,  $j$  取决于  $k$  和多边形单元  $T$  的边数  $n$ . 对于一个多边形网格,  $j = n + k - 1$ , 特别地, 当区域的剖分单元为三角形时,  $j = k + 1$ .

类似地, 对于标量值函数  $q \in \mathcal{W}_h$ , 离散弱梯度  $\widetilde{\nabla}_w q|_T$  定义为  $[P_k(T)]^d$  中的唯一多项式函数, 满足:

$$(\widetilde{\nabla}_w q, \Phi)_T = -(q, \nabla \cdot \Phi)_T + \langle \{q\}, \Phi \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}, \quad \forall \Phi \in [P_k(T)]^d. \quad (2.3)$$

### 2.3 若干不等式

**引理 2.1** [32][迹不等式] 假设  $\mathcal{T}_h$  为区域  $\Omega$  的多边形或多面体剖分. 假设  $\mathcal{T}_h$  中的所有单元都是封闭且单连通的, 并且剖分  $\mathcal{T}_h$  满足[20]中的形状正则假设, 令  $p > 1$  为任意实数, 那么存在常数  $C$  使得对任意的  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $e \in \partial T$ , 任意的  $\theta \in W^{1,p}(T)$ , 有

$$\|\theta\|_{L^p(e)}^p \leq Ch_T^{-1} \left( \|\theta\|_{L^p(T)}^p + h_T^p \|\nabla \theta\|_{L^p(T)}^p \right),$$

**引理 2.2** [32][逆不等式] 假设  $\mathcal{T}_h$  为区域  $\Omega$  的多边形或多面体剖分. 且剖分  $\mathcal{T}_h$  满足[19]中的形状正则剖分假设, 令  $p \geq 1$  为任意实数, 那么存在常数  $C(k)$ , 对  $\mathcal{T}_h$  上次数不超过  $k$  次的任意分片多项式  $\varphi$ , 有

$$\|\nabla \varphi\|_{T,p} \leq C(k) h_T^{-1} \|\varphi\|_{T,p}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

**引理 2.3** (*Cauchy – Schwarz* 不等式) [5] 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  都是任意

实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

引理 2.4 (Young 不等式) [13] 对于实数  $a, b, \epsilon > 0$ , 有

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2. \quad (2.4)$$

## 2.4 双线性形式

在构造 Brinkman 方程 (1.1) 的协调间断有限元数值格式之前, 对于  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_h^0$ ,  $p, q \in \mathcal{W}_h$ , 我们给出以下三个双线性形式:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla_w \mathbf{v}, \nabla_w \mathbf{w}) + (\kappa^{-1} \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (2.5)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{v}, \widetilde{\nabla_w q}), \quad (2.6)$$

$$s(p, q) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h \langle [p], [q] \rangle_e. \quad (2.7)$$

根据双线性形式 (2.5), 对于  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$ , 我们可以定义如下范数:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\nabla_w \mathbf{v}\|^2 + \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|^2. \quad (2.8)$$

引理 2.5 对任意的  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_h$ , 有如下的有界性

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|.$$

证明

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \mathbf{v}, \nabla_w \mathbf{w})_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}, \kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w})_T \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \|\nabla_w \mathbf{v}\|_T \|\nabla_w \mathbf{w}\|_T + \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|_T \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}\|_T \right) \\ &\leq \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \mathbf{v}\|_T^2 + \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \mathbf{w}\|_T^2 + \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{w} \|.$$

□

显然,  $\| \cdot \|$  在  $\mathcal{V}_h$  中是一个范数.

对于标量值函数  $q \in \mathcal{W}_h$ , 我们在本文的剩余部分中使用以下范数:

$$\| q \|_1^2 = \| \kappa^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla}_w q \|^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h^{-1} \| [q] \|_e^2, \quad (2.9)$$

以及半范数

$$|q|_h^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h \| [q] \|_e^2. \quad (2.10)$$

**引理 2.6**  $\| \cdot \|_1$  在  $\mathcal{W}_h$  中是一个范数.

**证明**  $\| \cdot \|_1$  显然满足非负性, 齐次性和三角不等式.

对于  $q \in \mathcal{W}_h$ , 仅需证明当  $\| q \|_1 = 0$  时,  $q = 0$  即可. 当  $\| q \|_1 = 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \| \kappa^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla}_w q \|_T &= 0, \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ \| [q] \|_e &= 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \end{aligned}$$

根据标量值函数离散弱梯度的定义 (2.3),  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ ,  $\forall \mathbf{p} \in [P_k(T)]^d$  有

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_w q, \mathbf{p})_T &= -(q, \nabla \cdot \mathbf{p})_T + \langle \{q\}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla q, \mathbf{p})_T - \langle q - \{q\}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

令其中  $\mathbf{p} = \nabla q$ , 则根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式和逆不等式有

$$\begin{aligned} \| \nabla q \|_T^2 &= (\widetilde{\nabla}_w q, \nabla q)_T + \langle q - \{q\}, \nabla q \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\ &\leq \| \widetilde{\nabla}_w q \|_T \| \nabla q \|_T + \| q - \{q\} \|_{\partial T} \| \nabla q \|_{\partial T} \\ &\leq \| \widetilde{\nabla}_w q \|_T \| \nabla q \|_T + Ch_T^{-\frac{1}{2}} \| q - \{q\} \|_{\partial T} \| \nabla q \|_T, \end{aligned}$$

则

$$\|\nabla q\|_T \leq \|\widetilde{\nabla_w q}\|_T + Ch_T^{-\frac{1}{2}} \|q - \{q\}\|_{\partial T},$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla q\|_T^2 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\widetilde{\nabla_w q}\|_T^2 + C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h^{-1} \|q - \{q\}\|_{\partial T}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\widetilde{\nabla_w q}\|_T^2 + C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h^{-1} \|[q]\|_e^2 \\ &\leq C \|q\|_1^2, \end{aligned}$$

则  $\|\nabla q\|_T = 0$ , 说明  $q$  是分片常数. 由

$$\|[q]\|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^0,$$

得到  $q$  在  $\Omega$  上是常数, 而  $q \in \mathcal{W}_h$ , 则  $q = 0$  得证. □



### 第三章 半离散格式

本章通过只对空间进行离散的方式来解决时间相关 Brinkman 问题 (1.1)-(1.4).

#### 3.1 适定性分析

令  $Q_h$  为  $[L^2(T)]^d$  到  $[P_k(T)]^d$  上的投影算子. 令  $\mathbf{Q}_h$  为  $[L^2(T)]^{d \times d}$  到  $[P_j(T)]^{d \times d}$  上的投影算子. 令  $\mathbb{Q}_h$  为  $L^2(T)$  到  $P_{k-1}(T)$  上的投影算子.

现在我们有以下关于时间相关 Brinkman 方程 (1.1)-(1.4) 的协调间断有限元格式:

求  $\mathbf{u}_h \in L^2([0, T]; \mathcal{V}_h^0)$ ,  $p_h \in L^2([0, T]; \mathcal{W}_h)$ , 使得对所有  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h^0$ ,  $q \in \mathcal{W}_h$  满足

$$((\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad (3.1)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q) - s(p_h, q) = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}_h(\cdot, 0) = Q_h \mathbf{u}^0. \quad (3.3)$$

**引理 3.1** [11] 令  $T$  为一个  $n+1$  条边(面)的多边形(多面体), 单元尺寸为  $h_T$ , 边分别表示为  $e, e_1, e_2, \dots, e_n$ , 则对于给定的边  $e$  上的多项式  $q_0 \in P_k(e)$ , 定义一个多项式  $q \in P_{k+n}(T)$  使得

$$q = \lambda_1 \cdots \lambda_n q_0, \quad q_0 \in P_k(T),$$

$$\langle q - q_0, p \rangle_e = 0, \quad \forall p \in P_k(e),$$

$$(q, p)_T = 0, \quad \forall p \in P_{k-1}(T).$$

其中  $\lambda_i \in P_1(T)$  在  $e_i$  上为 0 并且假设在  $e$  的重心上值为 1, 则有

$$\|q\|_T \leq Ch_T^{\frac{1}{2}} \|q_0\|_e.$$

**引理 3.2** [9] 对于  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$ ,

$$\sum_{e \in \varepsilon_h} h^{-1} \|[\mathbf{v}]\|_e^2 \leq C \|\mathbf{v}\|^2.$$

**引理 3.3** 对于  $\forall q \in \mathcal{W}_h$ , 存在与  $h$  无关的常数  $C_1, C_2$ , 有如下不等式成立:

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h^0} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|} \geq C_1 h \|q\|_1 - C_2 |q|_h.$$

**证明** 根据离散弱梯度的定义, 对于  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$  有

$$\|\nabla_w \mathbf{v}\|^2 = \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v})_T - \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \langle \mathbf{v} - \{\mathbf{v}\}, (\nabla_w \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}.$$

由向量值函数均值的定义,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \|\mathbf{v} - \{\mathbf{v}\}\|_{\partial T}^2 &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left( \left\| \mathbf{v}|_{T_1} - \frac{\mathbf{v}|_{T_1} + \mathbf{v}|_{T_2}}{2} \right\|_{\partial T_1 \cap e}^2 + \left\| \mathbf{v}|_{T_2} - \frac{\mathbf{v}|_{T_1} + \mathbf{v}|_{T_2}}{2} \right\|_{\partial T_2 \cap e}^2 \right) \\ &\leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left\| \frac{\mathbf{v}|_{T_1} - \mathbf{v}|_{T_2}}{2} \right\|_e^2 \\ &\leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} (\|\mathbf{v}\|_{\partial T_1 \cap e}^2 + \|\mathbf{v}\|_{\partial T_2 \cap e}^2) \leq C \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \|\mathbf{v}\|_{\partial T}^2, \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, Young 不等式, 迹不等式和逆不等式可以得到

$$\begin{aligned} \|\nabla_w \mathbf{v}\|^2 &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} (\|\nabla \mathbf{v}\|_T^2 + \|\mathbf{v} - \{\mathbf{v}\}\|_{\partial T} \|\nabla_w \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}\|_{\partial T}) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \|\nabla \mathbf{v}\|_T^2 + h^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v} - \{\mathbf{v}\}\|_{\partial T} \|\nabla_w \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}\|_T \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \|\nabla \mathbf{v}\|_T^2 + Ch^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{\partial T} (\|\nabla_w \mathbf{v}\|_T + \|\nabla \mathbf{v}\|_T) \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \|\nabla \mathbf{v}\|_T^2 + Ch^{-1} \|\mathbf{v}\|_{\partial T}^2 + \frac{1}{4} (\|\nabla_w \mathbf{v}\|_T + \|\nabla \mathbf{v}\|_T)^2 \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \|\nabla \mathbf{v}\|_T^2 + Ch^{-1} \|\mathbf{v}\|_{\partial T}^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla_w \mathbf{v}\|_T^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|_T^2) \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \frac{1}{2} \|\nabla_w \mathbf{v}\|_T^2 + Ch^{-1} \|\mathbf{v}\|_{\partial T}^2 + \frac{3}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|_T^2 \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \frac{1}{2} \|\nabla_w \mathbf{v}\|_T^2 + Ch^{-2} \|\mathbf{v}\|_T^2 + \frac{3C_1}{2} h^{-2} \|\mathbf{v}\|_T^2 \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \left( \frac{1}{2} \|\nabla_w \mathbf{v}\|_T^2 + C_2 h^{-2} \|\mathbf{v}\|_T^2 \right). \end{aligned}$$

故

$$\|\nabla_w \mathbf{v}\|^2 \leq C_2 h^{-2} \|\mathbf{v}\|^2.$$

令其中  $\mathbf{v} = \kappa \widetilde{\nabla_w q}$ , 由  $\|\cdot\|$  与  $\|\cdot\|_1$  的定义有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= \|\nabla_w \mathbf{v}\|^2 + \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|^2 \\ &\leq Ch^{-2} \|\mathbf{v}\|^2 + \|\kappa^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|^2 \\ &\leq Ch^{-2} \|\kappa \widetilde{\nabla_w q}\|^2 + \|\kappa^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla_w q}\|^2 \\ &\leq Ch^{-2} \lambda_1^{-1} \|\kappa^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla_w q}\|^2 + \|\kappa^{\frac{1}{2}} \widetilde{\nabla_w q}\|^2 \\ &\leq Ch^{-2} \|q\|_1^2, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|} &= \frac{(\mathbf{v}, \widetilde{\nabla_w q})}{\|\mathbf{v}\|} \geq \frac{\|q\|_1^2 - h^{-2} |q|_h^2}{Ch^{-1} \|q\|_1} \\ &\geq \frac{\|q\|_1^2 - h^{-1} \|q\|_1 |q|_h}{Ch^{-1} \|q\|_1} \\ &\geq C_1 h \|q\|_1 - C_2 |q|_h. \end{aligned}$$

引理证明完毕. □

**引理 3.4** (积分形式下的Gronwall不等式) [29] 用  $I$  表示区域  $[a, b](a < b)$ , 用  $\alpha$  和  $\omega$  表示定义在  $I$  上的可测函数,  $\mu$  是区域  $I$  的 Borel  $\sigma$ -代数上的 Lebesgue 测度. 假设对  $\omega$  和  $\mu$  是可积的, 满足

$$\omega(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \omega(s) ds, \quad \forall t \in I,$$

如果  $\alpha$  不是递减, 则有

$$\omega(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s) ds\right), \quad \forall t \in I.$$

通过引理 3.4和上面的一些范数定义可以证明数值解如下的稳定性.

**定理 3.5** 变分问题 (3.1)-(3.3) 的数值解具有如下稳定性:

$$\|\mathbf{u}_h(t)\|^2 \leq e^{Ct} \left( \|\mathbf{u}_h(0)\|^2 + C \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right).$$

**证明** 首先取式 (3.1), (3.2) 中的  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h(t)$ ,  $q = p_h$ , 得到

$$((\mathbf{u}_h(t))_t, \mathbf{u}_h(t)) + a(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) + b(\mathbf{u}_h(t), p_h) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_h(t)),$$

$$b(\mathbf{u}_h(t), p_h) - s(p_h, p_h) = 0.$$

则有

$$((\mathbf{u}_h(t))_t, \mathbf{u}_h(t)) + a(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) + s(p_h, p_h) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_h(t)),$$

考虑  $a(\cdot, \cdot), s(\cdot, \cdot)$  的定义得到

$$a(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) = \|\mathbf{u}_h(t)\|^2 \geq 0,$$

$$s(p_h, p_h) = |p_h|_h^2 \geq 0.$$

整理可得

$$((\mathbf{u}_h(t))_t, \mathbf{u}_h(t)) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h(t)),$$

又有

$$((\mathbf{u}_h(t))_t, \mathbf{u}_h(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t)),$$

即有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^2(t) dx \leq \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u}_h(t) dx.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^2(t) dx \leq C \left( \int_{\Omega} \mathbf{f}^2 dx + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^2(t) dx \right),$$

将上式在  $(0, t)$  上积分, 有

$$\|\mathbf{u}_h(t)\|^2 \leq \|\mathbf{u}_h(0)\|^2 + C \left( \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\mathbf{u}_h(\tau)\|^2 d\tau \right).$$

由 Gronwall 引理 3.4, 可以取得  $\omega(t) = \|\mathbf{u}_h(t)\|^2$ ,  $\alpha(t) = \|\mathbf{u}_h(0)\|^2 + C \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau$ ,  $\beta(s) = C$ , 而且在引理中的区域  $I = [0, T]$  上,  $\alpha(t)$  明显是非减的, 则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h(t)\|^2 &= \omega(t) \\ &\leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s) ds\right) \\ &\leq e^{Ct} \left( \|\mathbf{u}_h(0)\|^2 + C \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau \right), \end{aligned}$$

证明完毕. □

**定理 3.6** 半离散数值格式 (3.1)-(3.3) 具有唯一解.

**证明** 假设  $\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2 \in L^2([0, T]; \mathcal{V}_h^0)$  以及  $p_h^1, p_h^2 \in L^2([0, T]; \mathcal{W}_h)$  均为半离散数值格式的解, 使得对所有  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h^0, q \in \mathcal{W}_h$  满足

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_h^1)_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h^1) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}_h^1, q) - s(p_h^1, q) &= 0, \\ \mathbf{u}_h^1(\cdot, 0) &= Q_h \mathbf{u}^0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_h^2)_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_h^2, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h^2) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}_h^2, q) - s(p_h^2, q) &= 0, \\ \mathbf{u}_h^2(\cdot, 0) &= Q_h \mathbf{u}^0. \end{aligned}$$

记  $\gamma_h = \mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2, \zeta_h = p_h^1 - p_h^2$ , 则有

$$((\gamma_h)_t, \mathbf{v}) + a(\gamma_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \zeta_h) = 0, \quad (3.4)$$

$$b(\gamma_h, q) - s(\zeta_h, q) = 0, \quad (3.5)$$

$$\gamma_h(\cdot, 0) = 0. \quad (3.6)$$

由于  $\gamma_h$  满足上述定理 3.5 中的稳定性结论, 故有

$$\|\gamma_h\| \leq C \|\gamma_h(0)\| = 0,$$

则  $\gamma_h = 0$ , 即  $\mathbf{u}_h^1 = \mathbf{u}_h^2$ .

由  $\gamma_h = 0$  以及在式 (3.5) 中取  $q = \zeta_h$ , 有

$$s(\zeta_h, \zeta_h) = |\zeta_h|_h^2 = 0,$$

由式 (3.4) 可以得到,

$$b(\mathbf{v}, \zeta_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h^0.$$

令  $\mathbf{v} = \nabla \zeta_h$ , 根据  $b(\cdot, \cdot)$  的定义以及  $|\zeta_h|_h = 0$  有

$$\begin{aligned} 0 &= b(\mathbf{v}, \zeta_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}, \widetilde{\nabla_w \zeta_h})_T \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (-(\zeta_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_T + \langle \{\zeta_h\}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (-(\zeta_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_T + \langle \zeta_h, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} - \langle \zeta_h - \{\zeta_h\}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}, \nabla \zeta_h)_T - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle [\zeta_h], \{\mathbf{v}\} \rangle_{\partial T} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}, \nabla \zeta_h)_T \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \zeta_h, \nabla \zeta_h)_T. \end{aligned}$$

由此可以得到, 在单元  $T$  上,  $\nabla \zeta_h = 0$ , 又由  $\zeta_h$  是连续的且  $\zeta_h \in L_0^2(\Omega)$ ,

故有  $\zeta_h = 0$ , 因此有  $p_h^1 = p_h^2$ .

唯一性证明完毕. □

### 3.2 误差方程

首先, 时间相关 Brinkman 问题 (1.1)-(1.4) 的真解  $(\mathbf{u}; p) \in L^2([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d) \times L^2([0, T]; L_0^2(\Omega))$  分别在速度和压力函数的弱有限元空间上定义投影  $E_h \mathbf{u}$  和  $F_h p$ .

**定义 3.1** 对于任意给定的函数  $(\mathbf{u}; p) \in L^2([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d) \times L^2([0, T]; L_0^2(\Omega))$  和一个

固定的时间  $t \in (0, T]$ , 考虑如下的问题: 求  $E_h \mathbf{u} \in \mathcal{V}_h$  和  $F_h p \in \mathcal{W}_h$  使得

$$a(E_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, F_h p) = -(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\kappa^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla p), \quad (3.7)$$

$$b(E_h \mathbf{u}, q) - s(F_h p, q) = (\nabla \cdot \mathbf{u}, q), \quad (3.8)$$

对所有的  $(\mathbf{v}; q) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ .

我们知道  $E_h \mathbf{u}$  和  $F_h p$  是 CDG 方法在稳态 Brinkman 问题上的数值解. 所以从文献 [9] 中有如下重要的引理.

**引理 3.7** [9] 假设  $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d \cap [H^{k+1}(\Omega)]^d)$ , 以及  $p \in L^2([0, T]; L_0^2(\Omega) \cap [H^k(\Omega)])$  是给定的函数, 那么存在一个常数  $C$ , 使得

$$\|Q_h \mathbf{u} - E_h \mathbf{u}\| + |\mathbb{Q}_h p - F_h p|_h \leq Ch^k(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k), \quad (3.9)$$

$$\|\mathbb{Q}_h p - F_h p\|_1 \leq Ch^{k-1}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k), \quad (3.10)$$

$$\|Q_h \mathbf{u} - E_h \mathbf{u}\| \leq Ch^{k+1}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k), \quad (3.11)$$

而且, 假设  $\mathbf{u}_t \in C^1([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d \cap [H^{k+1}(\Omega)]^d)$  有

$$\|Q_h \mathbf{u}_t - E_h \mathbf{u}_t\| \leq Ch^{k+1}(\|\mathbf{u}_t\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (3.12)$$

对于精确解  $\mathbf{u} \in C^2([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d \cap [H^{k+1}(\Omega)]^d)$  与  $p \in L^2([0, T]; L_0^2(\Omega)) \cap H^k(\Omega)$ , 令  $\mathbf{e}_h = Q_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  和  $\varepsilon_h = \mathbb{Q}_h p - p_h$  分别表示时间相关 Brinkman 问题 (1.1)-(1.4) 中速度函数与压力函数的误差.

并且

$$\mathbf{e}_h = Q_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h = Q_h \mathbf{u} - E_h \mathbf{u} + E_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h,$$

$$\varepsilon_h = \mathbb{Q}_h p - p_h = \mathbb{Q}_h p - F_h p + F_h p - p_h,$$

记

$$\rho = Q_h \mathbf{u} - E_h \mathbf{u}, \quad \theta = E_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h,$$

$$\eta = \mathbb{Q}_h p - F_h p, \quad \omega = F_h p - p_h.$$

可建立如下误差方程.

**引理 3.8** 设  $\mathbf{u}_h \in L^2([0, T]; \mathcal{V}_h^0)$  以及  $p_h \in L^2([0, T]; \mathcal{W}_h)$  为变分问题 (3.1)-(3.3) 的数值解,  $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d)$  以及  $p \in L^2([0, T]; L_0^2(\Omega))$  为问题 (1.1)-(1.4) 的精确解, 有如下方程成立. 对于  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h^0, q \in \mathcal{W}_h$  以及  $0 \leq t \leq T$ , 有

$$(\theta_t, \mathbf{v}) + a(\theta, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \omega) = -(\rho_t, \mathbf{v}), \quad (3.13)$$

$$b(\theta, q) - s(\omega, q) = 0. \quad (3.14)$$

**证明** 由变分问题 (3.1), 式 (3.7) 以及原方程 (1.1), 有

$$\begin{aligned} (\theta_t, \mathbf{v}) + a(\theta, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \omega) &= (E_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{v}) \\ &\quad + a(E_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, F_h p) - b(\mathbf{v}, p_h) \\ &= (E_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(E_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, F_h p) \\ &\quad - ((\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p_h) \\ &= (E_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(E_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, F_h p) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ &= (E_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\kappa^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla p) \\ &= (E_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) \\ &= (E_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - (Q_h \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) \\ &= -(\rho_t, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

则 (3.13) 得证.

由变分问题 (3.2) 和式 (3.8) 可得

$$\begin{aligned} b(\theta, q) - s(\omega, q) &= b(E_h \mathbf{u}, q) - b(\mathbf{u}_h, q) - [s(F_h p, q) - s(p_h, q)] \\ &= b(E_h \mathbf{u}, q) - s(F_h p, q) - [b(\mathbf{u}_h, q) - s(p_h, q)] \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) - [b(\mathbf{u}_h, q) - s(p_h, q)] \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

则 (3.14) 得证. 综上, 证明完毕.  $\square$

### 3.3 误差估计

针对上述方程, 证明半离散格式在  $L^2$  范数和能量范数下有最优收敛阶.

**定理 3.9** 设  $\mathbf{u}_h \in L^2([0, T]; \mathcal{V}_h^0)$  以及  $p_h \in L^2([0, T]; \mathcal{W}_h)$  为变分问题 (3.1)-(3.3) 的数值解,  $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^d \cap [H^{k+1}(\Omega)]^d)$  以及  $p \in L^2([0, T]; L_0^2(\Omega) \cap H^k(\Omega))$  为问题 (1.1)-(1.4) 的精确解, 存在一个常数  $C$ , 使得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h\| \leq & \|\mathbf{u}_h(0) - Q_h \mathbf{u}(0)\| + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{k+1} + \|p(\cdot, 0)\|_k + \|p\|_k) \\ & + Ch^{k+1} \int_0^t (\|\mathbf{u}_\tau\|_{k+1} + \|p\|_k) d\tau. \end{aligned}$$

**证明** 在式 (3.13) 和 (3.14) 中分别令  $\mathbf{v} = \theta, q = \omega$ , 可得

$$(\theta_t, \theta) + a(\theta, \theta) + b(\theta, \omega) = -(\rho_t, \theta),$$

$$b(\theta, \omega) - s(\omega, \omega) = 0,$$

则有

$$(\theta_t, \theta) + a(\theta, \theta) + s(\omega, \omega) = -(\rho_t, \theta). \quad (3.15)$$

根据  $\|\cdot\|$  以及  $|\cdot|_h$  的定义可以得到

$$(\theta_t, \theta) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\theta, \theta) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2,$$

$$s(\omega, \omega) = |\omega|_h^2,$$

$$a(\theta, \theta) = \|\theta\|^2,$$

由于  $a(\theta, \theta) + s(\omega, \omega) \geq 0$ , 故

$$(\theta_t, \theta) \leq -(\rho_t, \theta).$$

因此有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = \|\theta\| \cdot \frac{d}{dt} \|\theta\| \leq \|\rho_t\| \cdot \|\theta\|,$$

即

$$\frac{d}{dt} \|\theta\| \leq \|\rho_t\|.$$

将其在  $(0, t)$  上进行积分, 可得

$$\|\theta\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_\tau\| d\tau.$$

其中

$$\begin{aligned} \|\theta(0)\| &= \|E_h \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_h(0)\| \\ &\leq \|E_h \mathbf{u}(0) - Q_h \mathbf{u}(0)\| + \|Q_h \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_h(0)\| \\ &\leq \|\mathbf{u}_h(0) - Q_h \mathbf{u}(0)\| + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{k+1} + \|p(\cdot, 0)\|_k) \end{aligned}$$

代入上式可得

$$\begin{aligned} \|\theta\| &\leq \|\mathbf{u}_h(0) - Q_h \mathbf{u}(0)\| + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{k+1} + \|p(\cdot, 0)\|_k) \\ &\quad + Ch^{k+1} \int_0^t (\|\mathbf{u}_\tau\|_{k+1} + \|p\|_k) d\tau. \end{aligned}$$

另外, 根据式 (3.11), 对于  $\rho$  有

$$\begin{aligned} \|\rho\| &\leq Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \\ &\leq Ch^{k+1} [\|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{k+1} + \|p(\cdot, 0)\|_k + \int_0^t \|\mathbf{u}_\tau\|_{k+1} d\tau]. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h\| &\leq \|\theta\| + \|\rho\| \\ &\leq \|\mathbf{u}_h(0) - Q_h \mathbf{u}(0)\| + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{k+1} + \|p(\cdot, 0)\|_k + \|p\|_k) \\ &\quad + Ch^{k+1} \int_0^t (\|\mathbf{u}_\tau\|_{k+1} + \|p\|_k) d\tau. \end{aligned}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/195234024244011111>