

焦作市普通高中 2023-2024 学年

高三第三次模拟考试

数学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

注意事项:

- 1.答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -e < x \leq 0\}$ ， $B = \{x | 0 < x^2 - x \leq 2\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | -1 \leq x < 0\}$ C. $\{x | -e < x \leq 2\}$ D. $\{x | -e < x < -1\}$

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式组化简集合 B，再利用交集的定义求解即得.

【详解】依题意，解不等式组 $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ ，得 $-1 \leq x < 0$ 或 $1 < x \leq 2$ ，

则 $B = \{x | -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$ ，而 $A = \{x | -e < x \leq 0\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 0\}$.

故选：B

2. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $|z+1|=|z+i|=\sqrt{5}$ ，则 $|z|$ 的值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$ D. 1 或 $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则和复数模的概念列方程求解.

【详解】设 $z = a + bi$ ，则 $z + 1 = (a + 1) + bi$ ， $z + i = a + (b + 1)i$ ，

因为 $|z + 1| = |z + i| = \sqrt{5}$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = 5 \\ a^2 + (b+1)^2 = 5 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$$

当 $a = b = 1$ 时， $|z| = \sqrt{2}$ ；当 $a = b = -2$ 时， $|z| = 2\sqrt{2}$ 。

故选：C

3. 为了备战学校举办的数学竞赛，某班推选小明、小红、小刚三位学生组成竞赛小组，并对他们三人前三次月考的数学成绩（单位：分）进行分析，三次数学成绩如下表：

学生	月份		
	9 月	10 月	11 月
小明	135	131	133
小红	132	140	136
小刚	140	130	135

针对这三次月考的数学成绩，下列分析中正确的是（ ）

- A. 这个竞赛小组 11 月份月考数学成绩的平均分最低
- B. 小刚三次月考数学成绩的平均分最高
- C. 小明三次月考数学成绩的成绩最稳定
- D. 小红三次月考数学成绩的方差最大

【答案】C

【解析】

【分析】选项 A，利用平均数的计算公式，直接计算 3 个月的平均分，即可判断出选项 A 的正误；选项 B，利用平均数的计算公式，直接计算 3 人的平均分，即可判断出选项 B 的正误；再利用方差的计算公式，直接求出 3 人的方差，即可判断出 CD 的正误，从而求出结果。

【详解】对于选项 A，9 月份月考数学成绩的平均分为 $\frac{135+132+140}{3} = \frac{407}{3}$ ，
10 月份月考数学成绩的平均分为 $\frac{131+140+130}{3} = \frac{401}{3}$ ，
11 月份月考数学成绩的平均分为 $\frac{133+136+135}{3} = \frac{404}{3}$ ，故选项 A 错误；

对于选项 B，三次月考数学成绩中，小明平均分 $\frac{135+131+133}{3} = \frac{399}{3} = 133$ ，

小红的平均分 $\frac{132+140+136}{3} = \frac{408}{3} = 136$ ，

小刚的平均分 $\frac{140+130+135}{3} = \frac{405}{3} = 135$ ，所以选项 B 错误；

对于选项 C，三次月考数学成绩中，小明的方差为 $\frac{1}{3}[(135-133)^2 + (131-133)^2 + (133-133)^2] = \frac{8}{3}$ ，

小红的方差为 $\frac{1}{3}[(132-136)^2 + (140-136)^2 + (136-136)^2] = \frac{32}{3}$ ，

小刚的方差为 $\frac{1}{3}[(140-135)^2 + (130-135)^2 + (135-135)^2] = \frac{50}{3}$ ，所以小明最稳定，故选项 C 正确，

对于选项 D，由选项 C 知，小刚的成绩波动性最大，方差最大，故选项 D 错误，

故选：C.

4. 已知正数 x ， y 满足 $2\sqrt{3}x + 2y - xy = 0$ ，则当 xy 取得最小值时， $x + 2y =$ ()

A. $4 + 8\sqrt{3}$

B. $2 + 4\sqrt{3}$

C. $3 + 6\sqrt{3}$

D. $8 + 6\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据条件，利用基本不等式及取等号的条件，可得 $x = 4$ ， $y = 4\sqrt{3}$ ，即可求出结果.

【详解】由题意可得 $\sqrt{3}x + y = \frac{1}{2}xy \geq 2\sqrt{\sqrt{3}xy}$ ，平方得 $xy \geq 16\sqrt{3}$ ，

当且仅当 $\sqrt{3}x = y$ ，即 $x = 4$ ， $y = 4\sqrt{3}$ 时取得等号，

故 xy 取得最小值时， $x + 2y = 4 + 8\sqrt{3}$.

故选：A.

5. 已知直线 $y = x - 1$ 交曲线 $C: y^2 = 4x$ 于 A，B 两点（点 A 在点 B 的上方），F 为 C 的焦点，则

$$\frac{|AB|}{|AF| - |BF|} = ()$$

A. $2\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出直线与抛物线交点的横坐标，利用抛物线定义求出 $|AF|$ ， $|BF|$ 即可得解.

【详解】联立方程组 $\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，消元得 $x^2 - 6x + 1 = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 解得 $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$,

易知 $F(1, 0)$ 过直线 AB , 根据抛物线的定义,

可得 $|AF| = x_1 + \frac{p}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$, $|BF| = x_2 + \frac{p}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$,

所以 $\frac{|AB|}{|AF| - |BF|} = \frac{|AF| + |BF|}{|AF| - |BF|} = \sqrt{2}$.

故选: D.

6. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 设甲: $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列; 乙: 存在一个非零常数 t , 使

$\left\{\frac{S_n}{t} + 1\right\}$ 是等比数列, 则 ()

A. 甲是乙的充要条件

B. 甲是乙的充分不必要条件

C. 甲是乙的必要不充分条件

D. 甲是乙的既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用等比数列前 n 项和公式, 结合充分条件、必要条件的定义判断即得.

【详解】设数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比分别为 a_1 , $q (q \neq 1)$,

则 $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, 取 $t = \frac{a_1}{q - 1}$, 得 $\frac{S_n}{t} + 1 = q^n$, 显然数列 $\left\{\frac{S_n}{t} + 1\right\}$ 是等比数列;

反之, 取 $t = 1$, $a_n = 0$, 此时 $S_n + 1 = 1$, 数列 $\left\{\frac{S_n}{t} + 1\right\}$ 为等比数列, 而 $\{a_n\}$ 不是等比数列,

所以甲是乙的充分不必要条件.

故选: B

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin \frac{A}{2} + 3\cos \frac{B}{2} = 2\sqrt{2}$, $\cos \frac{A}{2} + 3\sin \frac{B}{2} = 2$, 则 $\cos C =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $-\frac{7}{9}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方关系、两角和的正弦公式、诱导公式及二倍角余弦公式可得结果.

【详解】将已知两式平方得,

$\sin^2 \frac{A}{2} + 6\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + 9\cos^2 \frac{B}{2} = 8$, $\cos^2 \frac{A}{2} + 6\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 9\sin^2 \frac{B}{2} = 4$,

两式相加，得到 $1 + 6\left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}\right) + 9 = 12$ ，

因为 $0 < A + B < \pi \Rightarrow 0 < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$

即 $\sin \frac{A+B}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ ，

故 $\cos C = 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1 = -\frac{7}{9}$ 。

故选：D。

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形， $PA = PB = 2PC = 2PD$ ，平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且该四棱锥的各个顶点均在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为（ ）

- A. 17π B. 19π C. 21π D. 23π

【答案】C

【解析】

【分析】由面面垂直的性质得到 $BC \perp$ 平面 PCD ，即可得到 $PC \perp BC$ ，利用勾股定理求出 PB 、 PC ，再求出点 P 到底面 $ABCD$ 的距离，依题意可得球心 O 在经过底面中心且与底面垂直的直线上，设 O 到底面 $ABCD$ 的距离为 x ，利用勾股定理求出 x ，即可得到外接球的半径，最后根据球的表面积公式计算可得。

【详解】因为底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，所以 $BC \perp CD$ ，

又平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$ ， $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PCD ，又 $PC \subset$ 平面 PCD ，则 $PC \perp BC$ ，

又 $BC = 3$ ， $PB = 2PC$ ， $PC^2 + BC^2 = BP^2$ ，解得 $PB = 2PC = 2\sqrt{3}$ （负值舍去），

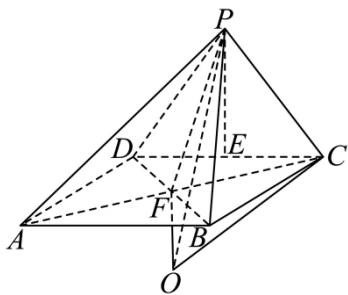
所以 $PA = 2PD = 2\sqrt{3}$ ，

取 DC 的中点 E ，连接 PE ，则 $PE \perp DC$ ，

又平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$ ， $PE \subset$ 平面 PCD ，

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$ ，

又 $PE = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，



设 $AC \cap BD = F$ ，则 $FC = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ， $PF = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ ，

球心 O 在经过底面中心且与底面垂直的直线上，

设 O 到底面 $ABCD$ 的距离为 x ($x > 0$)，

那么 $OC = \sqrt{x^2 + \frac{9}{2}}$ ， $OP = \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$ ，

由 $OC = OP$ 可解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 $OC = \frac{\sqrt{21}}{2}$ ，即外接球的半径 $r = OC = \frac{\sqrt{21}}{2}$ ，

故球 O 的表面积为 $S = 4\pi r^2 = 21\pi$ 。

故选：C。

【点睛】关键点点睛：本题解答的关键是求出 PB 、 PC 的长度，再确定外接球的球心在经过底面中心且与底面垂直的直线上，利用勾股定理求出外接球的半径。

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin 2x$ ，则 ()

A. 函数 $f\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ 为奇函数

B. 曲线 $y = f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 在 $x = \frac{5\pi}{8}$ 处取得极小值 $-\sqrt{2}$

【答案】AB

【解析】

【分析】根据题意整理可得 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. 对于 A: 整理可得 $f\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$, 结合正弦函数奇偶性分析判断; 对于 B: 令 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 运算求解即可; 对于 C: 令 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$, 结合正弦函数单调性分析判断; 对于 D: 根据三角函数极值与最值之间的关系分析判断.

【详解】由题意可得: $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

对于选项 A: 因为 $f\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$ 为奇函数, 故 A 正确;

对于选项 B: 令 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 故 B 正确;

对于选项 C: 令 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$,

因为 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $t = 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$,

而 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 故 C 错误;

对于选项 D: 因为 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f(x)$ 在 $x = \frac{5\pi}{8}$ 处取得极小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 D 错误.

故选: AB.

10. 设 A, B, C 均为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $0 < P(C) < 1$, 则下列结论中一定成立的是 ()

A. $P(B) = P(B|A) + P(B|\bar{A})$

B. $\frac{P(ABC)}{P(A)} = P(B|A)P(C|AB)$

C. 若 $B \subseteq A$, 则 $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$

D. 若 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据事件之间的关系可得 $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$ ，结合概率的性质即可判断 A；利用条件概率公式化简 $P(A)P(B|A)P(C|AB)$ 即可判断 B；根据事件的包含关系，结合条件概率公式即可判断 C；根据对立事件与条件概率公式即可判断 D。

【详解】对于 A，因为 $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$ ，

且 $0 < P(\bar{A}) < 1$ ， $0 < P(A) < 1$ ，所以 $P(B) < P(B|A) + P(B|\bar{A})$ ，故 A 错误；

对于 B， $P(A)P(B|A)P(C|AB) = P(A) \cdot \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(ABC)}{P(AB)} = P(ABC)$ ，故 B 正确；

对于 C，当 $B \subseteq A$ 时， $P(AB) = P(B)$ ，此时 $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ ，故 C 正确；

对于 D，因为 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ ，由条件概率公式可得 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}$ ，

即 $P(AB)[1 - P(A)] = P(A)P(\bar{A}B) = P(A)[P(B) - P(AB)]$ ，

所以 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，故 D 正确。

故选：BCD。

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & 0 < x \leq 4 \\ 2f(x-4), & x > 4 \end{cases}$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. 函数 $f(x)$ 在 $(4k, 4k+e)$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 上单调递增

B. 函数 $f(x)$ 在 $(4k+e, 4k+4)$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 上单调递减

C. 若方程 $f(x) = a$ ($x < 1$) 有两个实数根 x_1, x_2 ，则 $\frac{x_1}{x_2} = a$

D. 当方程 $f(x) = bx$ ($0 \leq x \leq 8$) 的实数根最多时， b 的最小值为 $\frac{\ln 2}{8}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】先利用导数分析函数在 $(0, 4]$ 上的单调性，再结合函数的已知性质，分析函数在 $(4k, 4k+4]$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ 的单调性，可判断 AB 的真假；对 C：分 $x_1 < x_2$ 和 $x_1 > x_2$ 两种情况讨论，可判断 C 的真假；借助函数单调性的结论，分析方程 $f(x) = bx (0 \leq x \leq 8)$ 解的个数，判断 D 的真假。

【详解】当 $x \in (0, 4]$ 时， $f(x) = \frac{1}{2}f(x+4)$ ，

即 $f(x+4) = 2f(x)$ ，故 $f'(x+4) = 2f'(x)$ ，

又当 $x \in (0, 4]$ 时， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

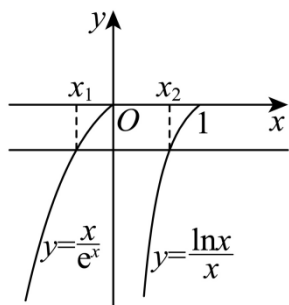
由 $f'(x+4) = 0$ 得 $2f'(x) = 0$ ，解得 $x = e$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, 4]$ 上单调递减。

故 $f(x)$ ， $x \in (4, 8]$ 在 $(4, 4+e)$ 上单调递增，在 $(4+e, 8]$ 上单调递减，

同理得 $f(x)$ 在 $(4k, 4k+e)$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 上单调递增，在 $(4k+e, 4k+4)$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 上单调递减，故 A，B 正确；

若方程 $f(x) = a (x < 1)$ 有两个实数根 x_1 ， x_2 ，由图象可知：



则当 $x < 0$ 时 $\frac{x}{e^x} = a$ ，当 $x \in (0, 1)$ 时， $\frac{\ln x}{x} = a$ ，

不妨设 $x_1 < 0 < x_2 < 1$ ，则 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_2}{e^{\ln x_2}} = a$ ，

又 $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1-x}{e^x}$ ，当 $x < 0$ 时， $\frac{1-x}{e^x} > 0$ 恒成立。

所以函数 $y = \frac{x}{e^x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，则 $x_2 = e^{x_1}$ ， $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{e^{x_1}} = a$ ，

若 $x_1 > x_2$ ，则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{a}$ ，故 C 错误；

由 $f(x) = bx$ 知 $x = 0$ 时有 1 个根，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/195242104042011201>