力的时间累积效应 $\Rightarrow$ 冲量、动量、动量定理.

力矩的时间累积效应 $\Longrightarrow$ 冲量矩、角动量、角动量定理.

一　质点的角动量定理和角动量守恒定律

质点运动状态的描述

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad E_{\mathrm{k}} = mv^2/2$$

刚体定轴转动运动状态的描述

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \qquad E_{\mathrm{k}} = J\omega^2/2$$

1 质点的角动量

质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 O 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

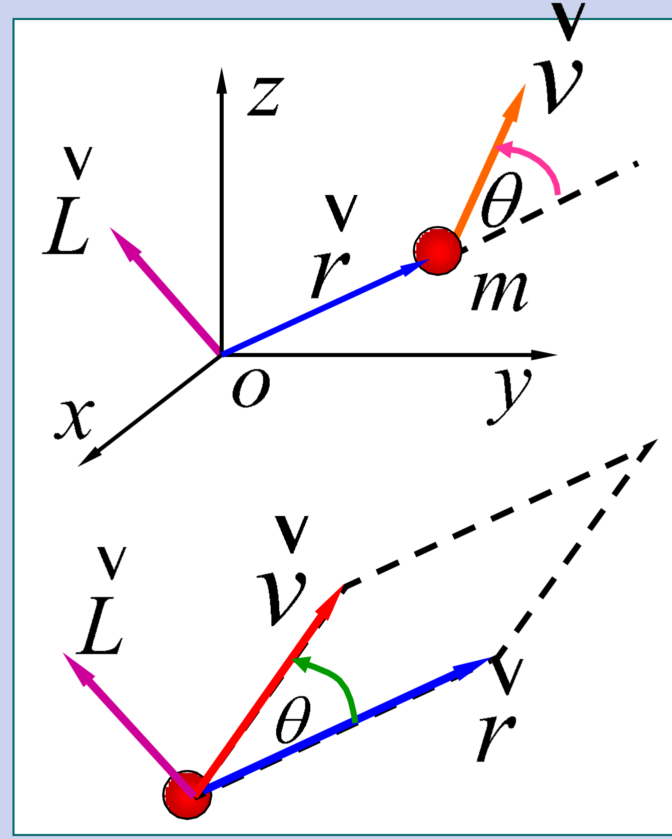
$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

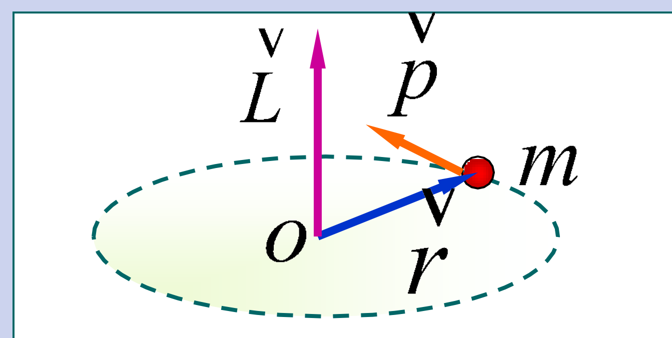
大小 $L = rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.

质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

$$L = mr^2\omega = J\omega$$





2 质点的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = ?\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = ?$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}, \quad \vec{v} \times \vec{p} = 0 \qquad = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

作用于质点的合力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率.

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量.

3 质点的角动量守恒定律

$$\vec{M} = 0, \quad \vec{L} = \text{恒矢量}$$

质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量.

二　刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1 刚体定轴转动的角动量

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$$

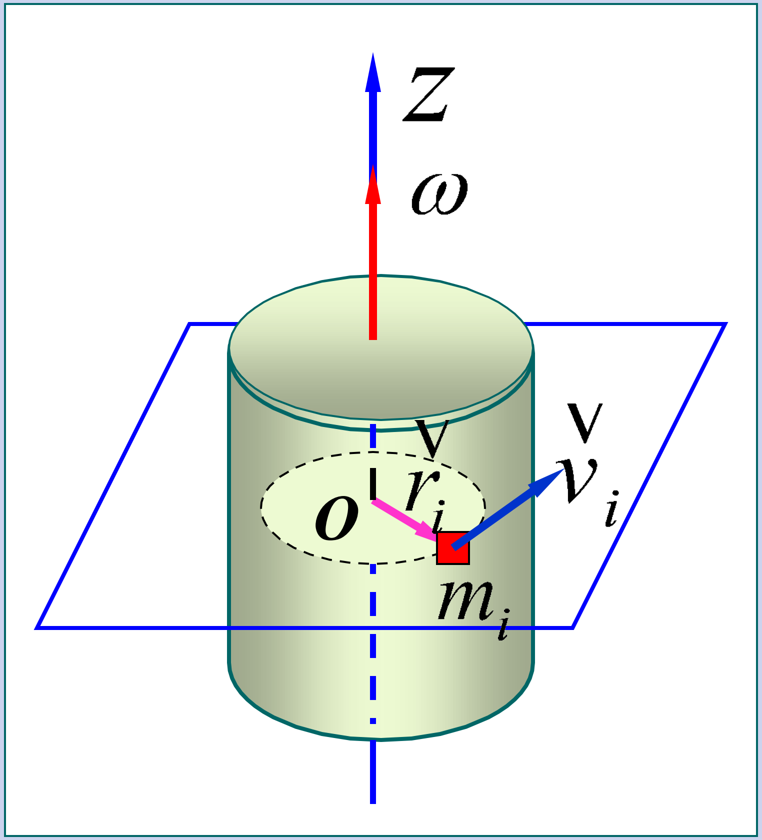
$$L = \sum_i m_i r_i v_i = (\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$

2 刚体定轴转动的角动量定理

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$$



刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1$

刚体转动的角动量定理：刚体所受的冲量矩等于刚体转动角动量的增量.

3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $M=0$，则 $\boxed{L = J\omega = \text{常量}}$

刚体所受的合力矩为零时，刚体转动角动量为一恒矢量.

刚体定轴转动的角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1$$

讨论

- 守 恒条件　　$M = 0$

若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L = J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的角动量.
- 在冲击等问题中　Q $M^{\mathrm{in}} >> M^{\mathrm{ex}}$ $\therefore L \approx$ 常量
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

有许多现象都可以用角动量守恒来说明.

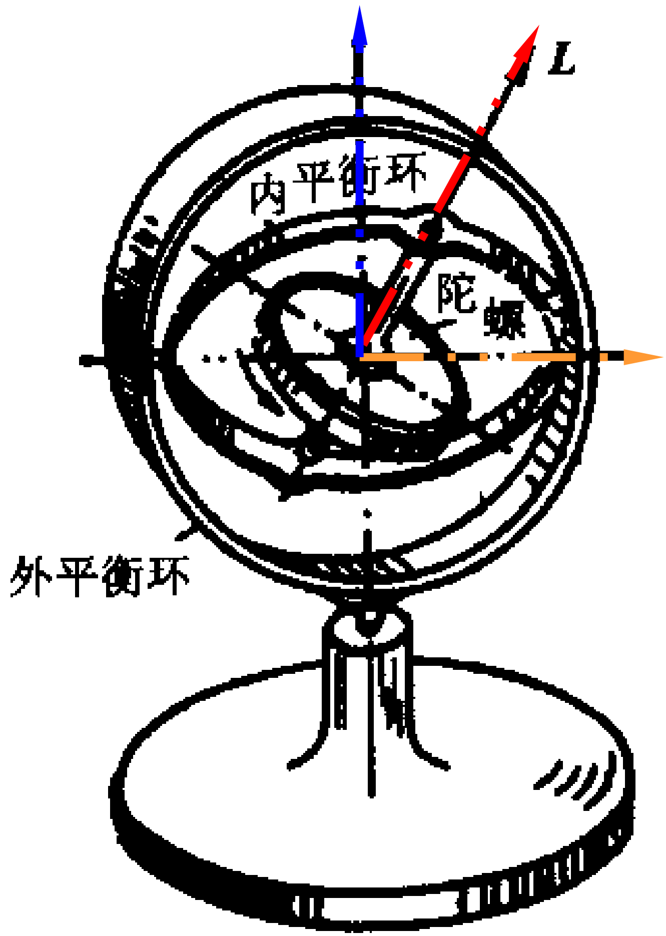
$$L = J\omega = \text{常量}$$

➢花样滑冰
➢跳水运动员跳水

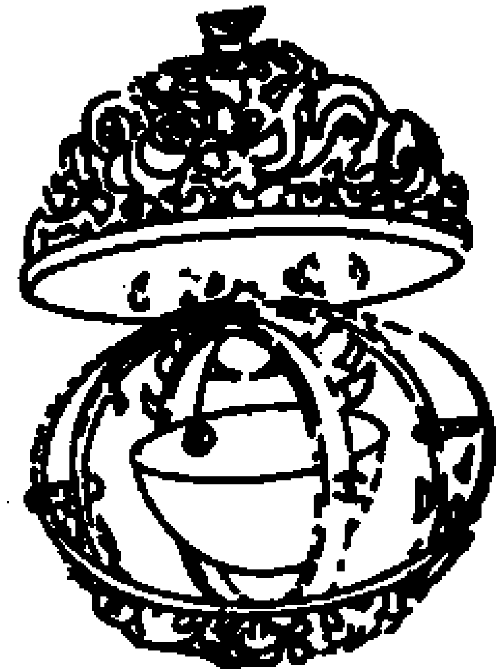
自然界中存在多种守恒定律

- 动量守恒定律
- 能量守恒定律
- 角动量守恒定律
- 电荷守恒定律
- 质量守恒定律
- 宇称守恒定律等

角动量守恒定律在技术中的应用



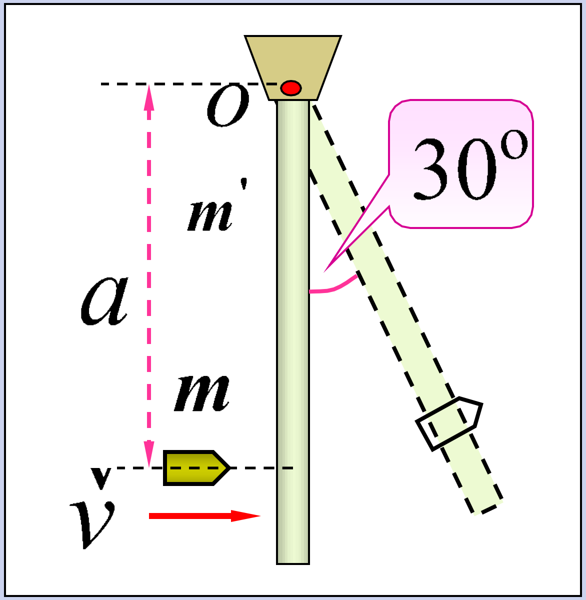
惯性导航仪（陀螺）



被 中 香 炉

例1 一长为 l ，质量为 m' 的竿可绕支点O自由转动．一质量为m、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为30°．问子弹的初速率为多少？

解 把子弹和竿看作一个系统．子弹射入竿的过程系统角动量守恒



$$L = mr^2\omega = J\omega$$

$$mva = \left(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$