2023—2024 学年第一学期第二次阶段考试

高一数学试题卷

一、单选题（每题 5 分，共 40 分）

1. 集合 $A=\left\{x\in \mathrm{Z}\middle|x^2-3x-4\le 0\right\}, B=\{0,2,4,6\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】B

【解析】

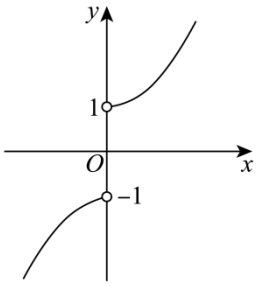
【分析】解不等式 $x^2-3x-4\le 0$，求出集合 A，再根据交集的运算性质，即可解题.

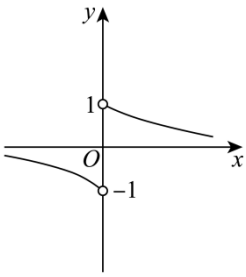
【详解】解不等式 $x^2-3x-4\le 0$ 可得 $-1\le x\le 4$，所以 $A=\left\{x\in \mathrm{Z}\middle|x^2-3x-4\le 0\right\}=\left\{x\in \mathrm{Z}\middle|-1\le x\le 4\right\}$，

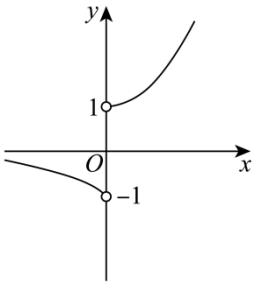
又 $B=\{0,2,4,6\}$，所以 $A\cap B=\{0,2,4\}$，所以 $A\cap B$ 中元素的个数为 3 个.

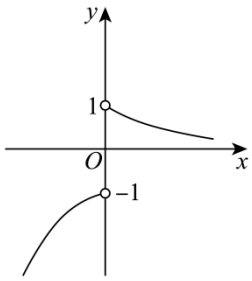
故选：B

2. 函数 $y=\dfrac{xa^x}{|x|}(a>1)$ 的图象的大致形状是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】分类讨论 $x>0$ 与 $x<0$，结合指数函数的单调性即可得解.

【详解】因为 $y=f(x)=\dfrac{xa^x}{|x|}(a>1)$，

当$x>0$时，$f(x)=\frac{xa^x}{x}=a^x$，由于$a>1$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，排除 BD；

当$x<0$时，$f(x)=\frac{xa^x}{-x}=-a^x$，由于$a>1$，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，排除 A；

而 C 选项满足上述性质，故 C 正确.

故选：C.

3. 已知$a=2^{-\frac{1}{3}},b=\log_2\frac{1}{3},c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则三个数的大小顺序是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$

C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数与对数函数的性质结合中间值 0 和 1 比较后可得.

【详解】由$0<a=2^{-\frac{1}{3}}<2^0=1$，

$b=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$，

$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>1$，

所以$c>a>b$.

故选：B.

4. 已知函数$f(x)=\log_a(x+2)+1$（$a>0$，且$a\neq1$）的图像恒过点 P，若点 P 是角θ终边上的一点，则$\sin\theta=$（　　）

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据对数型函数过定点求得 P，利用三角函数的定义求解即可.

【详解】解：$\because f(-1)=\log_a(-1+2)+1=1$，

$\therefore$函数$f(x)=\log_a(x+2)+1$（$a>0$，且$a\neq1$）的图像恒过点$P(-1,1)$，

∴由三角函数定义得 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：D

5. 若函数 $f(x)=\ln\left(x^2-ax+1\right)$ 在区间 $[3,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,6]$　　B. $\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{10}{3},6\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复合函数单调性之间的关系进行求解即可.

【详解】设 $g(x)=x^2-ax+1$，

则要使 $f(x)=\ln\left(x^2-ax+1\right)$ 在区间 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

由复合函数单调性可得：

满足 $\begin{cases}-\frac{-a}{2}=\frac{a}{2}\le 3\\ g(3)=10-3a>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a\le 6\\ a<\frac{10}{3}\end{cases}$，

得 $a<\frac{10}{3}$，

即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$.

故选：D

6. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(2,3)$，则不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为（　　）

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$

C. $(-3,-2)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次不等式与对应方程的关系，利用根与系数的关系，求出 b、c 与 a 的关系，代入所求不等式，求出解集即可.

【详解】一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(2,3)$，

∴$a<0$，且 2，3 是方程$ax^2+bx+c=0$的两个实数根，

∴$\begin{cases}2+3=-\dfrac{b}{a}\\2\times3=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，解得$b=-5a,c=6a$，其中$a<0$；

∴不等式$cx^2+bx+a<0$化为$6ax^2-5ax+a<0$，即$6x^2-5x+1>0$，

解得$x<\dfrac{1}{3}$或$x>\dfrac{1}{2}$，因此所求不等式的解集为$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

故选：D.

7. 中国的 5G 技术领先世界，5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式$C=W\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right)$，它表示在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率$C$取决于信通带宽$W$、信道内信号的平均功率S、信道内部的高斯噪声功率$N$的大小，其中$\dfrac{S}{N}$叫做信噪比.当信噪比比较大时，公式中真数中的 1 可以忽略不计，按照香农公式，由于技术提升，带宽W在原来的基础上增加 20%，信噪比$\dfrac{S}{N}$从 1000 提升至 4000，则C大约增加了（　　）（附：$\lg5\approx0.6990$）

A. 22%　　B. 33%　　C. 44%　　D. 55%

【答案】C

【解析】

【分析】根据题中所给公式，利用代入法，结合对数的运算公式和换底公式进行即可.

【详解】由题意可知：C大约增加了

$$\frac{120\%W\log_2 4000-W\log_2 1000}{W\log_2 1000}=\frac{1.2\log_2 4000}{\log_2 1000}-1=1.2\log_{1000}4000-1=0.4\lg4000-1$$

$$=0.4(3+2\lg2)-1=0.2+0.8(1-\lg5)\approx0.4408,$$

故选：C

8. 设函数$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}(a,b,c\in\mathrm{R}$，且$a<0)$的定义域为$D$，若所在点$(s,f(t))(s,t\in D)$构成一个正方形区域，则$a=$（　　）

A. -4　　B. -5　　C. -6　　D. -8

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，求出$f(x)$的定义域和值域，根据构成一个正方形区域，列出等式关系，求出a的值.

【详解】因为ax^2+bx+c的值域为$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$，

所以$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$的值域为$\left[0,\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}\right]$.

设$ax^2+bx+c=0$的两根是x_1,x_2，且$x_1<x_2$，则定义域$D=[x_1,x_2]$.

而点$(s,f(t))$，$(s,t\in D)$构成一个正方形区域，

于是$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{b^2-4ac}{a^2}=\dfrac{4ac-b^2}{4a},a^2+4a=0,a=-4$.

故选：A.

二、多选题（每题 5 分，全选对 5 分部分选对得 2 分，有选错不得分，共 20 分）

9. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 若$a>b>0$，则$ac^2>bc^2$

B. 若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$

C. 若$a>b>0$且$c<0$，则$\dfrac{c}{a^2}>\dfrac{c}{b^2}$

D. 若$a>b$且$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，则$ab<0$

【答案】BCD

【解析】

【分析】取$c=0$可判断 A 选项；利用不等式的基本性质可判断 BC 选项；利用作差法可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，当$c=0$时，$ac^2=bc^2$，A 错；

对于 B 选项，若$a<b<0$，由不等式的性质可得$a^2>ab$，$ab>b^2$，则$a^2>ab>b^2$，B 对；

对于 C 选项，若$a>b>0$，则$a^2>b^2>0$，则$\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{b^2}$，

又因为$c<0$，由不等式的性质可得$\dfrac{c}{a^2}>\dfrac{c}{b^2}$，C 对；

对于 D 选项，若 $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}<0$，所以，$ab<0$，D 对.

故选：BCD.

10. 下列命题中为真命题的是（　　）

A. 函数 $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$ 与 $g(x)=x^2-1$ 为同一个函数

B. 若函数 $f(x)=-x^2+ax+4$ 有两零点，一个大于 2，另一个小于 -1，则 a 的取值范围是 $(0,3)$

C. 不等式 $\frac{x+1}{(x-1)^2}>1$ 的解集为 $[0,3]$

D. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

【答案】ABD

【解析】

【分析】由函数的三要素判断 A；由二次函数根的分布判断 B；由一元二次不等式的解法判断 C；由抽象函数的定义域判断 D.

【详解】解：对于 A，由题意可知 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 R，

且 $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2-1=g(x)$，所以 $f(x)$，$g(x)$ 为同一函数，故正确；

对于 B，由题意可得 $\begin{cases} f(-1)=3-a>0 \\ f(2)=2a>0 \\ \Delta=a^2+16>0 \end{cases}$，解得 $0<a<3$，故正确；

对于 C，由题意可知 $x\neq 1$，所以 $\frac{x+1}{(x-1)^2}>1 \Leftrightarrow x+1>(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x<0$，解得 $0<x<3$ 且 $x\neq 1$，

所以不等式 $\frac{x+1}{(x-1)^2}>1$ 的解集为 $(0,1)\cup(1,3)$，故错误；

对于 D，因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，由 $-2\le 2x-1\le 2$，解得 $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$，

所以 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，故正确.

故选：ABD.

11. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为高斯函数，例如：$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$．已知函数$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}$，则关于函数$g(x)=[f(x)]$的叙述中正确的是（　　）

A. $g(x)$是偶函数

B. $f(x)$是奇函数

C. $f(x)$在R上是增函数

D. $g(x)$的值域是$\{-1,0,1\}$

【答案】BC

【解析】

【分析】计算出$g(1)$和$g(-1)$的值后结合奇偶性定义可判断A，由奇偶性定义判断B，由复合函数的单调性判断C，确定出$f(x)$的取值范围后得出$g(x)$的值域判断D.

【详解】根据题意知，$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^x}$.

$\because g(1)=[f(1)]=\left[\frac{e}{1+e}-\frac{1}{2}\right]=0$，

$g(-1)=[f(-1)]=\left[\frac{1}{e+1}-\frac{1}{2}\right]=-1$，

$\therefore g(1)\neq g(-1), g(1)\neq -g(-1)$，

$\therefore$函数$g(x)$既不是奇函数也不是偶函数，A错误；

$\because f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{2}=-f(x)$，

$\therefore f(x)$是奇函数，B正确；

$\because y=e^x$在R上是增函数，由复合函数的单调性知$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^x}$在R上是增函数，C正确；

$\because e^x>0$，$\therefore 1+e^x>1$，$0<\frac{1}{1+e^x}<1, -1<-\frac{1}{1+e^x}<0$，

$\therefore -\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$，

$\therefore g(x)=[f(x)]=\{-1,0\}$，D 错误.

故选：BC.

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(1+x)=-f(1-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，则下列结论错误的是（　　）

A. $f(x)=f(x+2)$

B. $f(2021)+f(2022)=-2$

C. 函数 $y=f(x)-\log_2(x+1)$ 有 3 个零点

D. 当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x^2-9x+18$

【答案】AB

【解析】

【分析】根据函数对称性和奇偶性，可得 $f(x)$ 的周期，即可判断 A 的正误，根据 $f(x)$ 解析式及周期，代入数据，可判断 B 的正误；分别作出 $y=\log_2(x+1)$ 和 $y=f(x)$ 的图像，即可判断 C 的正误；根据函数周期及奇偶性，化简整理，可判断 D 的正误，即可得答案.

【详解】因为当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，则 $f(0)=-2$，

因为 $f(1+x)=-f(1-x)$，　所以 $f(2)=-f(0)=2$，

则 $f(2)\neq f(0)$，所以 $f(x)=f(x+2)$ 不成立，故 A 错误；

又函数 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $f(x+4)=f(1+x+3)=-f(1-(x+3))=-f(-2-x)=-f(-(2+x))$

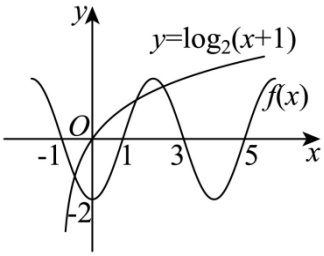
$=-f(2+x)=-f(1+1+x)=f(1-(1+x))=f(-x)=f(x)$，

故 $f(x)$ 的周期为 4，由函数 $f(x)$ 的周期为 4，则 $f(2021)=f(1)=0$，$f(2022)=f(2)=2$，

所以 $f(2021)+f(2022)=2$，故选项 B 错误；

令 $y=f(x)-\log_2(x+1)=0$ 可得 $f(x)=\log_2(x+1)$，

作出函数 $y=\log_2(x+1)$ 和 $y=f(x)$ 的图像如下图所示，



由图可知，两个函数图像有 3 个交点，故选项 C 正确；

当 $x\in[3,4]$ 时，$4-x\in[0,1]$，则 $f(x)=f(-x)=f(4-x)=(4-x)^2+(4-x)-2=x^2-9x+18$，

故选项 D 正确，

故选：AB.

三、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13. 已知扇形的弧长为 6，圆心角弧度数为 3，则其面积为_____；

【答案】6

【解析】

【分析】

根据扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$ 求解即可.

【详解】扇形的弧长为 6，圆心角弧度数为 3，

则扇形的半径 $r=\frac{6}{3}=2$，

所以该扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr=6$.

故答案为：6

【点睛】此题考查求扇形的面积，根据圆心角、半径、弧长的关系求解.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=5x+\frac{4}{x}$，则 $f(x)$ 的最小值为_____.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先利用方程组法求出函数的解析式，再根据基本不等式即可得出.

【详解】因为 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=5x+\frac{4}{x}$，所以 $f(\frac{1}{x})+2f(x)=4x+\frac{5}{x}$

两式联立得 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 得 $f(x)=\frac{2}{x}+x\geq 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{2}{x}=x(x>0)$，即 $x=\sqrt{2}$ 时取等号.所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$

15. 方程 $9^x+(3+a)\cdot 3^x+4=0$ 有解，则 a 的取值范围是_____.

【答案】$(-\infty,-7]$

【解析】

【分析】根据题意，令 $3^x=t(t>0)$，得 $a=\left(t+\frac{4}{t}+3\right)$，利用基本不等式即可求解.

【详解】方程 $9^x+(3+a)\cdot 3^x+4=0$ 有解等价于方程 $a=\frac{-4-9^x}{3^x}-3$ 有解.

令 $3^x=t(t>0)$，则 $a=\frac{-4-t^2}{t}-3=-\left(t+\frac{4}{t}+3\right)$.

因为 $t+\frac{4}{t}\geq 4$，所以 $a\leq -7$，当且仅当 $t=2$，即 $x=\log_3 2$ 时等号成立.

故 $a\leq -7$ 时，方程 $9^x+(3+a)\cdot 3^x+4=0$ 有解.

故答案为：$(-\infty,-7]$.

16. 已知实数 a，b 满足 $2^{a-2}+a=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}b^2+\log_2 b=-\frac{3}{4}$，则 $\frac{2^a}{b^2}=$ _____.

【答案】4

【解析】

【分析】构造同源函数，根据函数的单调性可得 $a-2=\log_2 b^2$，即可得解.

【详解】由 $\frac{1}{2}b^2+\log_2 b=-\frac{3}{4}$，得 $b^2+2\log_2 b=-\frac{3}{2}$，

即 $b^2+\log_2 b^2+\frac{3}{2}=0$，即 $2^{\log_2 b^2}+\log_2 b^2+\frac{3}{2}=0$

又 $2^{a-2}+a=\frac{1}{2}$，即 $2^{a-2}+(a-2)+\frac{3}{2}=0$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/196022034020010242