

第九章 平面解析几何章末检测

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求。

1. 若圆 C 的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴都相切, 则该圆的标准方程是

- A. $(x-3)^2 + (y-\frac{7}{3})^2 = 1$ B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ D. $(x-\frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 = 1$

【答案】B

【详解】考点: 圆的标准方程。

分析: 设圆心, 然后圆心到直线的距离等于半径可解本题。

解答: 解:

设圆心为 $(a, 1)$, 由已知得 $d = \frac{|4a-3|}{5} = 1$, $\therefore a = 2$ (舍 $-\frac{1}{2}$)。

故选 B。

点评: 本小题主要考查圆与直线相切问题。还可以数形结合, 观察判定即可。

2. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 准线为 l , 点 $A(0, 8\sqrt{2})$, 线段 AF 的中点 B 在 C 上, 则点 B 到直线 l 的距离为 ()

- A. $3\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. 8

【答案】C

【分析】求得 B 点的坐标, 代入抛物线方程, 由此求得 p , 进而求得点 B 到直线 l 的距离。

【详解】焦点 F 为 $(\frac{p}{2}, 0)$, 线段 AF 的中点 B 为 $(\frac{p}{4}, 4\sqrt{2})$, 将点 B 代入 C 得 $32 = 2p \cdot \frac{p}{4}$, 解得 $p = 8$, 点 B

到直线 l 的距离为 $d = |BF| = \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = \frac{3}{4}p = 6$.

故选：C

3. 若直线 $y = kx + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A 、 B 两点，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ (其中 O 是原点)，则 k 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】

由 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 得 $\triangle OAB$ 是等边三角形，从而得 O 到直线 AB 的距离，然后由点到直线距离公式求解.

【详解】 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle OAB$ 是等边三角形，圆半径为 1，因此 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以 $\frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

故选：A.

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，过其右焦点且垂直于实轴的直线与双曲线交于 M 、 N 两点， O 是坐标原点. 若 $OM \perp ON$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{1 + \sqrt{7}}{2}$

【答案】C

【详解】 设右焦点 $F(c, 0)$ ；则 $|MF| = \frac{b^2}{a}$ ；由对称性知 $\angle MOF = 45^\circ$ ， $\therefore c = \frac{b^2}{a}$ ，即

$b^2 = ac = c^2 - a^2$ ；所以 $e^2 - e - 1 = 0 (e > 1)$ ，解得 $e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. 故选 C

5. 画法几何学的创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. 若圆 $(x - 3)^2 + (y - \lambda)^2 = 9$ 与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的蒙日圆有且仅有一个公共点，则 λ 的值为 ()

- A. ± 3 B. ± 4 C. ± 5 D. $2\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】 根据题意先写出椭圆的蒙日圆方程，然后根据条件判断出两圆内切或外切，由此列出方程求解出结果.

【详解】由题意可知 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = 4$,

因为圆 $(x-3)^2 + (y-\lambda)^2 = 9$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 仅有一个公共点,

所以两圆内切或外切, 故圆心距等于半径之和或者圆心距等于半径差的绝对值,

所以 $\sqrt{(3-0)^2 + (\lambda-0)^2} = 3+2$ 或 $\sqrt{(3-0)^2 + (\lambda-0)^2} = |3-2|$,

由此解得 $\lambda = \pm 4$,

故选: B.

6. 已知 F_1, F_2 为椭圆的焦点且 $|F_1F_2| = 2\sqrt{5}$, M, N 是椭圆上两点, 且 $\overline{MF_1} = 2\overline{F_1N}$, 以 F_1F_2 为直径的圆经过 M 点, 则 $\triangle MNF_2$ 的周长为()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

【答案】D

【分析】根据椭圆定义, 结合勾股定理即可求解 $a=3, x=1$, 由焦点三角形的周长公式即可求解.

【详解】由于 F_1F_2 为直径的圆经过 M 点, 所以 $MF_1 \perp MF_2$,

不妨设 $|NF_1| = x$, 则 $|MF_1| = 2x$,

由椭圆定义可得 $|MF_2| = 2a - 2x, |NF_2| = 2a - x, |MN| = 3x$,

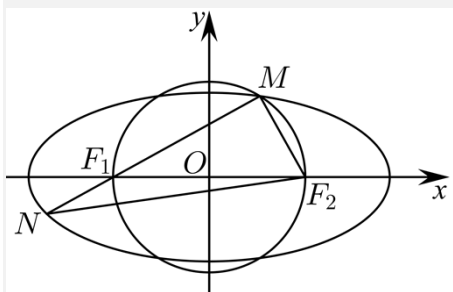
由勾股定理可得 $|F_1F_2|^2 = |MF_1|^2 + |MF_2|^2$ 和 $|NF_2|^2 = |MN|^2 + |MF_2|^2$,

即 $20 = 4x^2 + (2a - 2x)^2$ 和 $(2a - x)^2 = 9x^2 + (2a - 2x)^2$,

解得 $a=3, x=1$,

故 $\triangle MNF_2$ 的周长为 $4a = 12$,

故选: D



7. 设抛物线 $x^2 = 4y$ 上一点 P 到 x 轴的距离为 d , 点 Q 为圆 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$ 任一点, 则 $d + |PQ|$ 的最小值为()

A. $2\sqrt{5}-1$

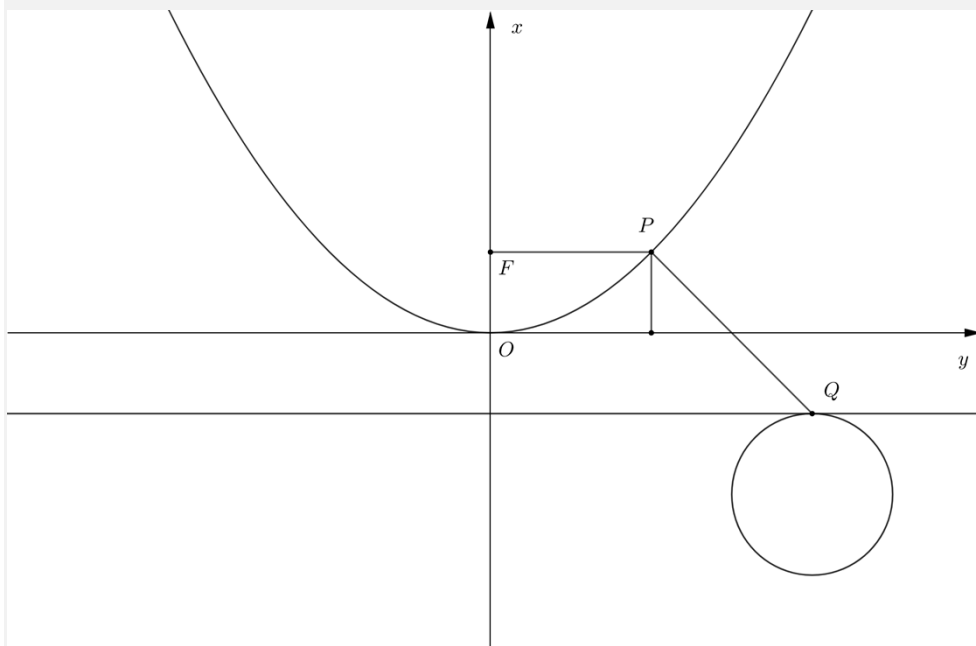
B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C**【分析】**根据抛物线定义结合圆外一点到圆上一点最值问题即可得到答案.**【详解】**因为 $x^2 = 2 \times 2y$, 则抛物线焦点坐标为 $(0,1)$, 准线方程为 $y = -1$,则 $d+1 = |PF|$, 即 $d = |PF| - 1$,所以 $d + |PQ| = |PF| - 1 + |PQ|$, 则要使其最小, 则需 $|PF| + |PQ|$ 最小,因为圆 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$ 的圆心为 $(4, -2)$, 半径 $r = 1$,所以 $d + |PQ| = |PF| - 1 + |PQ| \geq \sqrt{4^2 + (-2-1)^2} - 1 - r = 3$.

故选: C.

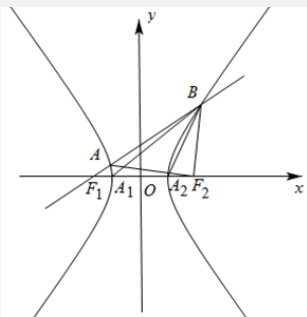


8. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 2|BF_2|$, 且 $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{1}{4}$, 则直线 A_1B 与 A_2B 的斜率之积为 ()

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$ **【答案】A****【分析】**设 $|BF_2| = m$, 利用双曲线定义推出相关线段的长, 进而在 $\triangle ABF_2$ 和 $\triangle F_1BF_2$ 中利用余弦定理, 求出

$m = \frac{4}{3}a$ 以及 $3c^2 = 8a^2$ ，继而求得 $3b^2 = 5a^2$ ，再结合双曲线方程推出 $k_{A_1B} \cdot k_{A_2B} = \frac{b^2}{a^2}$ ，即可求得答案.

【详解】由题意结合双曲线定义可知 $\begin{cases} |AF_2| - |AF_1| = 2a \\ |BF_1| - |BF_2| = 2a \end{cases}$ ，且 $|AB| = 2|BF_2|$ ，



不妨设 $|BF_2| = m$ ，则 $|AB| = 2m$ ， $|BF_1| = m + 2a$ ， $|AF_1| = |BF_1| - |AB| = 2a - m$ ，

$$|AF_2| = 4a - m.$$

在 $\triangle ABF_2$ 中， $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{1}{4}$ ，由余弦定理得 $|AF_2|^2 = |AB|^2 + |BF_2|^2 - 2|AB| \cdot |BF_2| \cdot \cos \angle F_1BF_2$ ，

即 $(4a - m)^2 = 4m^2 + m^2 - 4m^2 \times \frac{1}{4}$ ，即 $3m^2 + 8am - 16a^2 = 0$ ，

解得 $m = \frac{4}{3}a$ 。

在 $\triangle F_1BF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2 = |BF_1|^2 + |BF_2|^2 - 2|BF_1| \cdot |BF_2| \cdot \cos \angle F_1BF_2$ ，

即 $4c^2 = (m + 2a)^2 + m^2 - 2(m + 2a)m \times \frac{1}{4}$ ，即 $8c^2 = 3m^2 + 6ma + 8a^2$ ，结合 $m = \frac{4}{3}a$ ，

即得 $3c^2 = 8a^2$ ，故得 $3(a^2 + b^2) = 8a^2$ ，即 $3b^2 = 5a^2$ 。

又可设 $B(x_0, y_0)$ ，则 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ， $\therefore y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)$ ，

而 $A_1(-a, 0)$ ， $A_2(a, 0)$ ，故 $k_{A_1B} \cdot k_{A_2B} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{3}$ ，

故选：A

【点睛】关键点睛：解答本题的关键在于根据所给 $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{1}{4}$ ，分别在 $\triangle ABF_2$ 和 $\triangle F_1BF_2$ 中利用余弦定理，

求出 $m = \frac{4}{3}a$ ，继而求得 $3b^2 = 5a^2$ ，再结合双曲线方程推出 $k_{A_1B} \cdot k_{A_2B} = \frac{b^2}{a^2}$ ，即可求解.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知直线 $l: (1-2m)x - (m-1)y + 7m - 4 = 0$ ，圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ ，则 ()

A. 直线 l 恒过定点 $(1,3)$

B. 直线 l 与圆 C 相交

C. 圆 C 被 x 轴截得的弦长为 $3\sqrt{21}$

D. 当圆 C 被直线 l 截得的弦最短时, $m = \frac{3}{4}$

【答案】BD

【分析】根据给定条件求出直线 l 经过的定点及圆 C 的圆心、半径,再逐一分析、计算各选项判断作答.

【详解】依题意, 直线 $l: (1-2m)x - (m-1)y + 7m - 4 = 0$ 可化为 $(-2x - y + 7)m + x + y - 4 = 0$,

由 $\begin{cases} -2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ 解得 $x = 3, y = 1$, 即直线 l 过定点 $P(3,1)$, A 不正确;

圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的圆心 $C(1,2)$, 半径 $r = 5$, $|PC| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} < r$,

即点 P 在圆 C 内, 直线 l 与圆 C 恒相交, B 正确;

圆心 C 到 x 轴的距离 $d = 2$, 则圆 C 被 x 轴截得的弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21}$, C 不正确;

由于直线 l 过定点 $P(3,1)$, 圆心 $C(1,2)$, 则直线 PC 的斜率 $k = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$,

当圆 C 被直线 l 截得的弦最短时, 由圆的性质知, $l \perp PC$, 于是得 $\frac{1-2m}{m-1} = 2$, 解得 $m = \frac{3}{4}$, D 正确.

故选: BD

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆上两点 A, B 关于原点对称, 点 P (异于 A, B 两点) 为椭圆上的动点, 则下列说法正确的是 ()

A. $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 12

B. 椭圆的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $|PF_2|$ 的最大值为 $3 + 2\sqrt{2}$

D. 若直线 PA, PB 的斜率都存在, 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{9}$

【答案】BCD

【分析】根据椭圆定义判断 A, 直接计算离心率判断 B, 根据椭圆的几何性质判断 C, 利用作差法求 $k_{PA} \cdot k_{PB}$ 判断 D.

【详解】由椭圆方程 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 可知, $a^2 = 9, b^2 = 1$,

所以 $a = 3, b = 1, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}$,

由椭圆定义知, $\triangle PF_1F_2$ 的周长等于 $|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2a + 2c = 6 + 4\sqrt{2}$, 故 A 错误;

椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故 B 正确;

由椭圆的几何性质可知， $|PF_2|$ 的最大值为 $a+c=3+2\sqrt{2}$ ，故 C 正确；

设 $P(x_0, y_0)$ ， $A(x_1, y_1)$ ，则 $B(-x_1, -y_1)$ ，所以 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2}$ ，

由点在椭圆上可得 $\begin{cases} \frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1 \\ \frac{x_1^2}{9} + y_1^2 = 1 \end{cases}$ ，两式相减可得 $\frac{x_0^2 - x_1^2}{9} + y_0^2 - y_1^2 = 0$ ，

化简可得 $\frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} = -\frac{1}{9}$ ，即 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{9}$ ，故 D 正确。

故选：BCD

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 为双曲线上一点，且 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，

若 $\sin \angle F_1PF_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，则下面有关结论正确的是（ ）

A. $e = \sqrt{5}$

B. $e = 2$

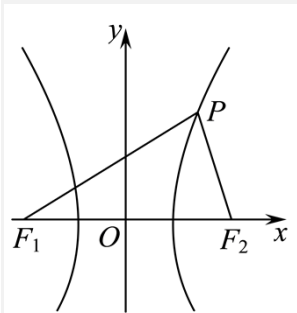
C. $b = \sqrt{5}a$

D. $b = \sqrt{3}a$

【答案】BCD

【分析】利用同角三角函数基本关系式、双曲线定义、双曲线性质、余弦定理、离心率公式运算即可得解。

【详解】解：当 $\angle F_1PF_2$ 为锐角时，如下图，则 $\cos \angle F_1PF_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$ ，



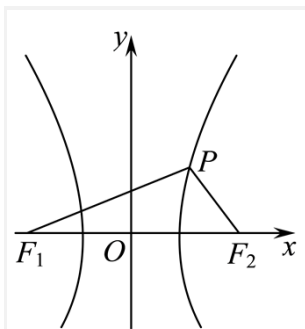
$$\therefore |PF_1| = 2|PF_2|, |PF_1| - |PF_2| = 2a, \therefore |PF_1| = 4a, |PF_2| = 2a,$$

$$\therefore \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{解得: } c^2 = 4a^2, \therefore c = 2a, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = 2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4a^2, b = \sqrt{3}a, \text{ 故 BD 正确;}$$

$$\text{当 } \angle F_1PF_2 \text{ 为钝角时, 如下图, 则 } \cos \angle F_1PF_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4},$$



$$\therefore |PF_1| = 2|PF_2|, |PF_1| - |PF_2| = 2a, \therefore |PF_1| = 4a, |PF_2| = 2a,$$

$$\therefore \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{解得: } c^2 = 6a^2, \therefore c = \sqrt{6}a, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{6},$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6a^2, \text{ 解得: } b = \sqrt{5}a, \text{ 故 A 错误, C 正确. 故选: BCD.}$$

12. 已知斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 经过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 与抛物线 C 交于点 A, B 两点 (点 A 在第一象限), 与抛物线的准线交于点 D , 若 $|AB| = 8$, 则以下结论正确的是 ()

A. $p = \frac{3}{2}$

B. $|AF| = 6$

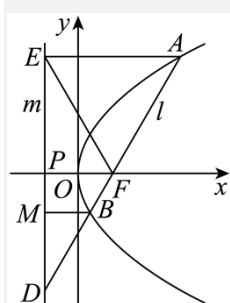
C. $|BD| = 2|BF|$

D. F 为 AD 中点

【答案】BCD

【分析】作出图形, 利用抛物线的定义、相似三角形等知识来判断各选项命题的正误.

【详解】如下图所示:



分别过点 A, B 作抛物线 C 的准线 m 的垂线, 垂足分别为点 E, M .

抛物线 C 的准线 m 交 x 轴于点 P , 则 $|PF| = p$,

由于直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$, 其倾斜角为 60° ,

Q $AE \parallel x$ 轴, $\therefore \angle EAF = 60^\circ$, 由抛物线的定义可知, $|AE| = |AF|$,

则 $\triangle AEF$ 为等边三角形,

$\therefore \angle EFP = \angle AEF = 60^\circ$ ，则 $\angle PEF = 30^\circ$ ，

设 $|BD| = x$ ，由 $\text{Rt}\triangle VDBM : \text{Rt}\triangle VDAE$ ，则 $\frac{MB}{AE} = \frac{BD}{AD}$ ，可得 $|BM| = \frac{x}{2}$ ， $|AE| = 4 + \frac{x}{2}$

所以 $|BM| = |BF| = \frac{x}{2}$ ， $|AE| = |AF| = 4 + \frac{x}{2}$

$|AB| = |AF| + |BF| = 4 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 4 + x = 8$ ，解得 $x = 4$

所以 $|BF| = 2$ ， $|AF| = 6$ ，所以 **B** 正确。

$\therefore |AF| = |EF| = 2|PF| = 2p = 6$ ，得 $p = 3$ ，

A 选项错误；

所以 $|BD| = 4$ ，满足 $|BD| = 4 = 2|BF|$ ，所以 **C** 正确。

而 $|DF| = |BD| + |BF| = 4 + 2 = 6 = |AF|$ ，所以 **D** 正确。

故选：**BCD**

第 II 卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 已知 $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ ， C 为平面内的一动点，且满足 $|AC| = 2|BC|$ ，则点 C 的轨迹方程为_____。

【答案】 $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$

【分析】 设 $C(x, y)$ ，利用两点间的距离公式得到方程，整理即可得解。

【详解】 设 $C(x, y)$ ，由 $|AC| = 2|BC|$ ，则 $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ，

即 $(x+1)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2]$ ，

即 $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$ ，

所以点 C 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$ 。

故答案为： $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$

14. 已知 F_1 ， F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点， P 是椭圆 C 上的点，且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，则三角形 PF_1F_2 的面积为_____。

【答案】 4

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/196133214035010104>