

7.1 条件概率及全概率公式

知识呈现

条件概率及全概率

条件概率

定义

一般地, 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) > 0$, 我们称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率.

性质

如果 B 和 C 是两个互斥事件, 则 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$

设 $\bar{B}$ 和 B 互为对立事件, 则 $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.

$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$ 前提是 “ B 与 C 互斥”

概率乘法公式

对任意两个事件 A 与 B , 若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$ 为概率的乘法公式.

推广 $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2)$, 其中 $P(A_1) > 0, P(A_1 A_2) > 0$.

计算方法

定义法: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

利用缩小样本空间法求条件概率的方法

① 缩: 将原来的基本事件全体 Ω 缩小为事件 A , 原来的事件 B 缩小为 AB .

② 数: 数出 A 中事件 AB 所包含的基本事件.

③ 算: 利用 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ 求得结果.

全概率公式

一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$,

且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, 有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

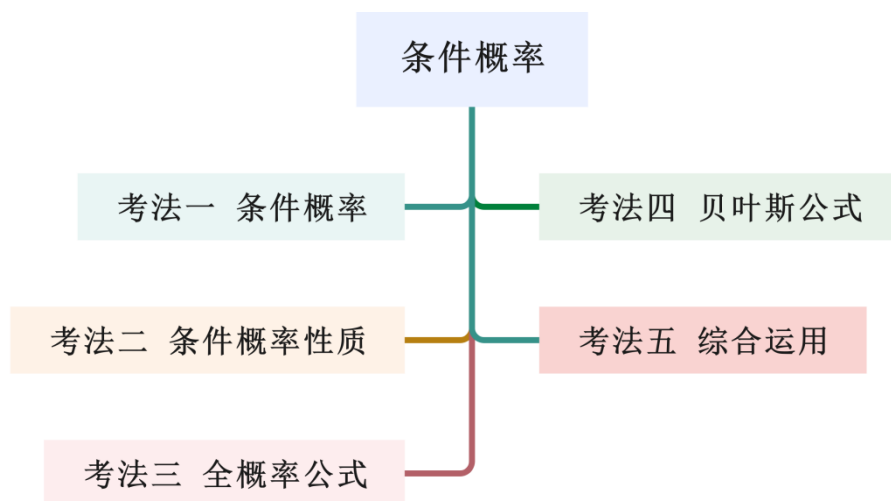
两个事件的全概率问题求解策略

(1) 拆分: 将样本空间拆分成互斥的两部分如 A_1, A_2 (或 A 与 $\bar{A}$).

(2) 计算: 利用乘法公式计算每一部分的概率.

(3) 求和: 所求事件的概率 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$.

例题剖析



考法一 条件概率

【例 1-1】(2023·云南) 某校有 7 名同学获省数学竞赛一等奖，其中男生 4 名，女生 3 名。现随机选取 2 名学生作“我爱数学”主题演讲。假设事件 A 为“选取的两名学生性别相同”，事件 B 为“选取的两名学生为男生”，则 $P(B|A) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】由题意得，事件 A 包含的样本点数 $n(A) = C_3^2 + C_4^2 = 9$ ，

事件 A 和 B 包含的样本点数 $n(AB) = C_4^2 = 6$ ，

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

故选：D

【例 1-2】(2024·陕西汉中) 袋中有除颜色外完全相同的 6 个小球，其中 4 个白球和 2 个红球，现从袋中不放回地连取两个。在第一次取得白球前提下，则第二次取得红球的概率为 ()

- A. 0.25 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.6

【答案】B

【解析】设第一次取得白球为事件 A ，第二次取得红球为事件 B ，

所以在第一次取得红球前提下，则第二次取得白球的概率为：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4 \times 2}{6 \times 5}}{\frac{4 \times 5}{6 \times 5}} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

故选：B.

【一隅三反】

1. (2024·辽宁) 小张、小王两家计划国庆节期间去辽宁游玩，他们分别从“丹东凤凰山，鞍山千山，本溪水洞，锦州笔架山，盘锦红海滩”这五个景点中随机选择一个游玩，记事件 A ：“两家至少有一家选择丹东凤凰山”，事件 B ：“两家选择景点不同”. 则概率 $P(B|A) = (\quad)$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{8}{9}$

【答案】D

【解析】由题意可知 $\bar{A}$ ：两家都没选择丹东凤凰山，即 $P(\bar{A}) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ ，

所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{9}{25}$ ，

而 AB ：有一家选择丹东凤凰山，另一家选别的景点，则 $P(AB) = \frac{4 \times 2}{5 \times 5}$ ，

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{9}{25}} = \frac{8}{9}$.

故选：D

2. (2024·全国·高二假期作业) 现有若干大小、质地完全相同的黑球和白球，已知某袋子中装有 3 个白球、2 个黑球，现从袋中随机依次摸出 2 个球，若第一次摸出的是白球，则放回袋中；若第一次摸出的是黑球，则把黑球换作白球，放回袋中. 记事件 A = “第一次摸球摸出黑球”，事件 B = “第二次摸球摸出白球”，则

$P(B|A) = (\quad)$

- A. $\frac{6}{25}$ B. $\frac{8}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】D

【解析】根据题意可知， $P(A) = \frac{2}{5}$

第一次摸出黑球且第二次摸出白球的概率 $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$ ，

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{4}{5},$$

故选：D.

3. (2024·北京) 俗话说“斜风细雨不须归”，在自然界中，下雨大多伴随着刮风. 已知某地 8 月份刮风的概率为 $\frac{13}{31}$ ，下雨的概率为 $\frac{11}{31}$ ，既刮风又下雨的概率为 $\frac{7}{31}$. 记事件 A 为“8 月份某天刮风”，事件 B 为“8 月份某天下雨”，则 $P(B|A) = (\quad)$

- A. $\frac{7}{11}$ B. $\frac{7}{13}$ C. $\frac{7}{31}$ D. $\frac{11}{31}$

【答案】B

【解析】根据题意可得 $P(A) = \frac{13}{31}$, $P(B) = \frac{11}{31}$, $P(AB) = \frac{7}{31}$,

$$\text{利用条件概率公式可得 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{31}}{\frac{13}{31}} = \frac{7}{13}.$$

故选：B

4. (2024·江西) 我国的生态环境越来越好，旅游的人越来越多. 现有两位游客慕名来江苏旅游，他们分别从“太湖鼋头渚、苏州拙政园、镇江金山寺、常州恐龙园、南京夫子庙、扬州瘦西湖”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩. 记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择太湖鼋头渚”，事件 B 为“两位游客选择的景点相同”，则 $P(B|A)$ 等于 $(\quad)$

- A. $\frac{1}{11}$ B. $\frac{2}{11}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{2}{9}$

【答案】A

【解析】由题意，知 $P(A) = \frac{6 \times 6 - 5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{11}{36}$, $P(AB) = \frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$,

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{11}.$$

故选：A.

考法二 条件概率性质

【例 2-1】(2024·湖北) 已知 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 若 $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, 则

$\frac{P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})}{P(AB)}$ 等于 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】A

【解析】因为 $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$, 即 $P(B) = 2P(AB)$,

同理, 由 $P(B|A) = \frac{1}{3}$ 得 $P(A) = 3P(AB)$,

因为 $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB) = 2P(AB)$, 所以 $P(\bar{A}B) = P(AB)$,

$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB) = 3P(AB)$, 所以 $P(A\bar{B}) = 2P(AB)$,

所以 $\frac{P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})}{P(AB)} = \frac{3P(AB)}{P(AB)} = 3$.

故选: A.

【例 2-2】(2023 上·高二课时练习) 下列式子成立的是 ()

A. $P(A|B) = P(B|A)$

B. $0 < P(B|A) < 1$

C. $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$

D. $P(AB) = P(B) \cdot P(B|A)$

【答案】C

【解析】由条件概率公式知 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 但是 $P(A)$ 不一定等于 $P(B)$, 所以选项 A

错误;

根据条件概率的性质可知 $0 \leq P(B|A) \leq 1$, 所以选项 B 错误;

由条件概率公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 可得出 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$, 所以选项 C 正确;

由条件概率公式 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 可得出 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$, 所以选项 D 错误.

故选: C

【例 2-3】(2023·云南保山) (多选) A, B 为随机事件, 已知 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, 下列结论中正确的是

()

A. 若 A, B 为互斥事件, 则 $P(A+B)=0.8$

B. 若 A, B 为互斥事件, 则 $P(\overline{A+B})=0.8$

C. 若 A, B 相互独立, 则 $P(A+B)=0.65$

D. 若 $P(B|A)=0.3$, 则 A, B 相互独立

【答案】ACD

【解析】A 选项, 根据互斥事件的加法公式可得, $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.5+0.3=0.8$, A 选项正确;

B 选项, 若 A, B 为互斥事件, 故 $P(AB)=0$, 类似集合的运算: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

由 $P(\overline{A+B})=P(\overline{A \cup B})=P(\overline{A} \cap \overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0=1$, 故 B 选项不正确;

C 选项, 由于 A, B 是相互独立事件, 故 $P(AB)=P(A)P(B)$,

于是 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.3-0.5 \times 0.3=0.65$, C 选项正确;

D 选项: $P(B|A)=0.3=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$, 即 $P(AB)=P(A)P(B)$, 于是 A, B 相互独立, D 选项正确.

故选: ACD.

【一隅三反】

1. (2024·广西)(多选) 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 且 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{11}{24}$, $P(\overline{AB}+A\overline{B})=\frac{7}{24}$,

则下列结论中正确的是 ()

A. $P(\overline{AB})=\frac{1}{8}$

B. $P(\overline{A+B})=\frac{5}{6}$

C. $P(A|B)=\frac{9}{11}$

D. $P(\overline{A}|B)=P(\overline{B}|A)$

【答案】AB

【解析】因为 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{11}{24}$, 所以 $P(\overline{A})=\frac{1}{2}$, $P(\overline{B})=\frac{13}{24}$.

因为 $\overline{AB}$ 与 $A\overline{B}$ 为互斥事件, 所以 $P(\overline{AB} \cdot A\overline{B})=0$,

所以 $P(\overline{AB}+A\overline{B})=P(\overline{AB})+P(A\overline{B})-P(\overline{AB} \cdot A\overline{B})=P(\overline{AB})+P(A\overline{B})$

$$=P(B)-P(AB)+P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{11}{24}-2P(AB)=\frac{7}{24},$$

所以 $P(AB)=\frac{1}{3}$,

故 $P(\overline{AB})=P(B)-P(AB)=\frac{11}{24}-\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$, 故 A 正确;

$$P(\bar{A}+B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=P(\bar{A})+P(B)-[P(B)-P(AB)]=P(\bar{A})+P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{24}}=\frac{8}{11}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{11}}{\frac{11}{24}}=\frac{3}{11}, \quad P(\bar{B}|A)=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

所以 $P(\bar{A}|B) \neq P(\bar{B}|A)$, 故 D 错误.

故选:AB.

2. (2024·福建)(多选) 已知随机事件 A, B, C 满足 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $0 < P(C) < 1$, 则下列说法正确的是 ()

A. 不可能事件 $\emptyset$ 与事件 A 互斥

B. 必然事件 Ω 与事件 A 相互独立

C. $P(A|C) = P(AB|C) + P(\bar{A}B|C)$

D. 若 $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$, 则 $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$

【答案】ABC

【解析】因为不可能事件 $\emptyset$ 与事件 A 不会同时发生, 所以互斥, 故选项 A 正确;

因为 $P(\Omega) = 1, P(A\Omega) = P(A), P(A)P(\Omega) = P(A)$,

所以 $P(A\Omega) = P(A)P(\Omega)$, 所以必然事件 Ω 与事件 A 相互独立, 故选项 B 正确;

因为 $AB \cup \bar{A}B = A$, 且 $AB, \bar{A}B$ 互斥, 所以 $P(A|C) = P(AB|C) + P(\bar{A}B|C)$, 故选项 C 正确;

对于选项 D, 假如做抛掷一枚骰子 1 次的试验, 设事件 B 为出现点数小于等于 4, 事件 A 为出现点数小于等于 2,

则 $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$, 但 $P(A) = \frac{1}{3}, P(\bar{A}) = \frac{2}{3}, P(A) \neq P(\bar{A})$, 故选项 D 错误.

故选:ABC.

3. (2024 下·全国·高二随堂练习)(多选) 玻璃缸中装有 2 个黑球和 4 个白球, 现从中先后无放回地取 2 个球. 记“第一次取得黑球”为 A_1 , “第一次取得白球”为 A_2 , “第二次取得黑球”为 B_1 , “第二次取得白球”为 B_2 , 则 ()

A. $P(A_1B_1) = P(A_2B_2)$

B. $P(A_1B_2) = P(A_2B_1)$

C. $P(B_1|A_1) + P(B_2|A_1) < 1$

D. $P(B_2|A_1) + P(B_1|A_2) > 1$

【答案】BD

【解析】由题意，第一次取得黑球的概率 $P(A_1) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{1}{3}$ ，第一次取得白球的概率 $P(A_2) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$ ，第一次取黑球、第二次取黑球的概率 $P(A_1B_1) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_6^1 C_5^1} = \frac{1}{15}$ ，第一次取白球、第二次取白球的概率 $P(A_2B_2) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_6^1 C_5^1} = \frac{2}{5}$ ， $P(A_1B_1) \neq P(A_2B_2)$ ，所以 A 错误；

第一次取黑球、第二次取白球的概率 $P(A_1B_2) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^1 C_5^1} = \frac{4}{15}$ ，第一次取白球、第二次取黑球的概率

$P(A_2B_1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^1 C_5^1} = \frac{4}{15}$ ， $P(A_1B_2) = P(A_2B_1)$ ，所以 B 正确；

由 $P(B_1|A_1) = \frac{P(A_1B_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$ ， $P(B_2|A_1) = \frac{P(A_1B_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}$ ，

得 $P(B_1|A_1) + P(B_2|A_1) = 1$ ，所以 C 错误；

由 $P(B_1|A_2) = \frac{P(A_2B_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}$ ，得 $P(B_2|A_1) + P(B_1|A_2) = \frac{6}{5} > 1$ ，所以 D 正确。

故选：BD

4. (2023·河南平顶山) (多选) 一个口袋中有除颜色外完全相同的 3 个红球和 2 个白球，每次从中随机取出一个球，若取到红球，则往口袋里再放入一个白球，若取到白球，则往口袋里再放入一个红球，取出的球不放回. 像这样取两次球，设事件 $A_i (i=1,2)$ 为“第 i 次取到红球”，事件 $B_j (j=1,2)$ 为“第 j 次取到白球”，事件 C 为“两次取到的球颜色相同”，则 ()

- A. A_1 与 A_2 相互独立 B. $P(B_2|A_1) = \frac{3}{5}$
C. $P(B_1A_2) = \frac{8}{25}$ D. $P(C) = \frac{8}{25}$

【答案】BCD

【解析】对于 A， $P(A_1) = \frac{3}{5}$ ， $P(A_1A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ ， $P(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{25}$ ，

则 $P(A_1A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$ ，所以 A_1 与 A_2 不相互独立，故 A 错误；

对于 B， $P(B_2|A_1)$ 是指在第一次取出红球的条件下，第二次取出白球的概率，第一次取出红球后，再放入一个白球，袋中变为 2 个红球和 3 个白球，此时取出白球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，故 B 正确；

对于 C, $P(B_1A_2)$ 是第一次取到白球且第二次取到红球的概率, $P(B_1A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$, 故 C 正确;

对于 D, 事件 C 包含“两次都取到红球”和“两次都取到白球”两种情况,

$$P(C) = P(A_1A_2) + P(B_1B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{25}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: BCD.

考法三 全概率公式

【例 3-1】(2024·黑龙江) 某人外出出差, 委托邻居给家里盆栽浇一次水, 若不浇水, 盆栽枯萎的概率为 0.8; 若浇水, 盆栽枯萎的概率为 0.1. 若邻居浇水的概率为 P , 该人回来盆栽没有枯萎的概率为 0.83, 则实数 P 的值为 ()

- A. 0.9 B. 0.85 C. 0.8 D. 0.75

【答案】A

【解析】记 A 为事件“盆栽没有枯萎”, $\bar{A}$ 为事件“盆栽枯萎”, W 为事件“邻居给盆栽浇水”, 由题意可得 $P(W) = P, P(\bar{W}) = 1 - P$, $P(\bar{A} | \bar{W}) = 0.8, P(\bar{A} | W) = 0.1$, 由对立事件的概率公式可得 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.83 = 0.17$.

由全概率公式可得

$$P(A) = P(W)P(A | W) + P(\bar{W})P(A | \bar{W}) = P \times 0.1 + (1 - P) \times 0.8 = 0.17, \text{ 解得 } P = 0.9.$$

故选: A

【例 3-2】(2024·河南南阳) 长时间玩手机可能影响视力. 据调查, 某校学生大约 20% 的人近视, 而该校大约有 10% 的学生每天玩手机超过 1 小时, 这些人的近视率约为 60%, 现从每天玩手机不超过 1 小时的学生中任意调查一名学生, 则他近视的概率为 ()

- A. $\frac{5}{21}$ B. $\frac{9}{40}$ C. $\frac{7}{45}$ D. $\frac{7}{20}$

【答案】C

【解析】令 A_1 = “玩手机时间超过 1 小时的学生”, A_2 = “玩手机时间不超过 1 小时的学生”, B = “任意调查一人, 此人近视”,

$$\Omega = A_1 \cup A_2, \text{ 且 } A_1, A_2 \text{ 互斥}, P(A_1) = 0.1, P(A_2) = 0.9, P(B | A_1) = 0.6, P(B) = 0.2,$$

$$\text{依题意有 } P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) = 0.1 \times 0.6 + 0.9 \times P(B | A_2) = 0.2, \text{ 解得 } P(B | A_2) = \frac{0.14}{0.9} = \frac{7}{45}$$

从每天玩手机不超过 1 小时的学生中任意调查一名学生, 则他近视的概率为 $\frac{7}{45}$.

故选: C

【一隅三反】

1. (2024·黑龙江) 小明参加答题闯关游戏, 答题时小明可以从 A, B, C 三块题板中任选一个进行答题, 答对则闯关成功. 已知他选中 A, B, C 三块题板的概率分别为 $0.2, 0.3, 0.5$, 且他答对 A, B, C 三块题板中题目的概率依次为 $0.91, 0.92, 0.93$. 则小明闯关失败的概率是 ()

- A. 0.24 B. 0.14 C. 0.077 D. 0.067

【答案】C

【解析】由题意, 小明闯关失败的概率

$$P = 0.2 \times (1 - 0.91) + 0.3 \times (1 - 0.92) + 0.5 \times (1 - 0.93) = 0.077.$$

故选: C.

2. (2024·全国·高二假期作业) 某批麦种中, 一等麦种占 80% , 二等麦种占 20% 等麦种植后所结麦穗含有 50 粒以上麦粒的概率分别为 $0.6, 0.2$, 则这批麦种植后所结麦穗含有 50 粒以上麦粒的概率为 ()

- A. 0.48 B. 0.52 C. 0.56 D. 0.65

【答案】B

【解析】种植一等麦种和二等麦种的事件分别为 A_1, A_2 , 所结麦穗含有 50 粒以上麦粒为事件 B ,

依题意, $P(A_1) = 0.8$, $P(A_2) = 0.2$, $P(B|A_1) = 0.6$, $P(B|A_2) = 0.2$,

由全概率公式得, $P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0.8 \times 0.6 + 0.2 \times 0.2 = 0.52$.

故选: B

3. (2023·湖北) 某卡车为乡村小学运送书籍, 共装有 10 个纸箱, 其中 5 箱英语书、 5 箱数学书. 到目的地时发现丢失一箱, 但不知丢失哪一箱. 现从剩下 9 箱中任意打开两箱, 结果都是英语书, 则丢失的一箱也是英语书的概率为 ()

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{8}$

【答案】B

【解析】用 A 表示丢失一箱后任取两箱是英语书, 用 B_1 表示丢失的一箱为英语书, B_2 表示丢失的一箱为数学书,

$$\text{则 } P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B_1) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(A|B_2) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18},$$

$$\text{由全概率公式可得 } P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{18} = \frac{2}{9},$$

$$\text{所以, } P(B_1|A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{8}.$$

故选：B.

4. (2023·湖北) (多选) 某儿童乐园有甲、乙两个游乐场，小王同学第一天去甲、乙两家游乐场游玩的概率分别为 0.3 和 0.7，如果他第一天去甲游乐场，那么第二天去甲游乐场的概率为 0.7；如果第一天去乙游乐场，那么第二天去甲游乐场的概率为 0.6，则王同学 ()

- A. 第二天去甲游乐场的概率为 0.63
- B. 第二天去乙游乐场的概率为 0.42
- C. 第二天去了甲游乐场，则第一天去乙游乐场的概率为 $\frac{2}{3}$
- D. 第二天去了乙游乐场，则第一天去甲游乐场的概率为 $\frac{1}{3}$

【答案】AC

【解析】设 A_1 ：第一天去甲游乐场， A_2 ：第二天去甲游乐场， B_1 ：第一天去乙游乐场， B_2 ：第二天去乙游乐场，

依题意可得 $P(A_1) = 0.3$ ， $P(B_1) = 0.7$ ， $P(A_2|A_1) = 0.7$ ， $P(A_2|B_1) = 0.6$ ，

对 A， $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 0.3 \times 0.7 + 0.7 \times 0.6 = 0.63$ ，A 正确；

对 B， $P(B_2) = 1 - P(A_2) = 0.37$ ，B 错误；

对 C， $P(B_1|A_2) = \frac{P(B_1)P(A_2|B_1)}{P(A_2)} = \frac{0.7 \times 0.6}{0.63} = \frac{2}{3}$ ，C 正确；

对 D， $P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)} = \frac{P(A_1)[1 - P(A_2|A_1)]}{P(B_2)} = \frac{0.3 \times (1 - 0.7)}{0.37} = \frac{9}{37}$ ，D 错误，

故选：AC.

5. (2024·陕西汉中) 某电子设备厂所用的元件由甲、乙两家元件厂提供，根据以往的记录，这两个厂家的次品率分别为 0.01，0.03，提供元件的份额分别为 0.90，0.10. 设这两个厂家的产品在仓库里是均匀混合的，且无任何区分的标志，现从仓库中随机取出一个元件，取到的元件是次品的概率为_____.

【答案】0.012

【解析】设事件 A ：“取得一件次品”事件 B_1 ：“取得次品是甲厂生产”， B_2 ：“取得次品是乙厂生产”，

由题意可知 $P(B_1)=0.9, P(B_2)=0.1, P(A|B_1)=0.01, P(A|B_2)=0.03$,

所以由全概率公式知取得次品的概率为

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=0.01\times 0.90+0.03\times 0.10=0.012.$$

故答案为: 0.012

考法四 贝叶斯公式

【例 4】(2024·福建) 根据曲靖一中食堂人脸识别支付系统后台数据分析发现, 高三年级小孔同学一周只去食堂一楼和二楼吃饭. 周一去食堂一楼和二楼的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$, 若他周一去了食堂一楼, 那么周二去食堂二楼的概率为 $\frac{3}{4}$, 若他周一去了食堂二楼, 那么周二去食堂一楼的概率为 $\frac{1}{2}$, 现已知小孔同学周二去了食堂二楼, 则周一去食堂一楼的概率为 ().

- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】记小孔同学周一去食堂一楼为事件 A , 周二去食堂一楼为事件 B ,

$$\text{则本题所求 } P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{B}|A) \cdot P(A) + P(\bar{B}|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{7}.$$

故选: A.

【一隅三反】

1. (2024 湖南) 设有 5 个袋子中放有白球, 黑球, 其中 1 号袋中白球占 $\frac{1}{3}$, 另外 2, 3, 4, 5 号 4 个袋子中白球都占 $\frac{1}{4}$, 今从中随机取 1 个袋子, 从所取的袋子中随机取 1 个球, 结果是白球, 则这个球是来自 1 号袋子中的概率为 ().

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

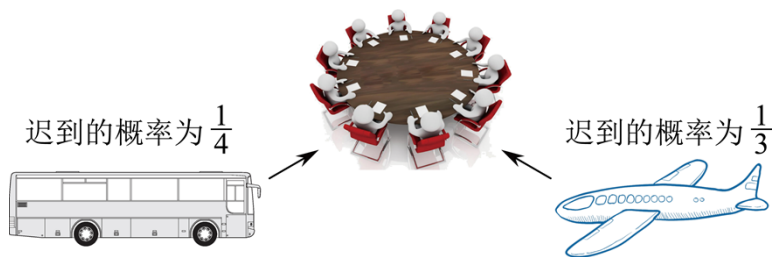
【答案】A

【解析】设事件 A_i 表示“取到第 i 号袋子”($i=1, 2, 3, 4, 5$), 事件 B 表示“取到白球”,

$$\text{则由贝叶斯公式得 } P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{j=1}^5 P(A_j)P(B|A_j)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{1}{4},$$

故选: A

2. (2023·全国·高二课堂例题) 张宇去某地参加会议, 他乘汽车或飞机去的概率分别为0.6、0.4. 如果他乘汽车或飞机前去, 迟到的概率如图所示. 结果他迟到了, 求张宇乘的是汽车的概率.



【答案】 $\frac{9}{17}$

【解析】记事件 A 为“张宇乘汽车”, 则事件 $\bar{A}$ 为“张宇乘飞机”, 事件 B 为“张宇迟到”,

则 $P(A) = 0.6$, $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$.

根据贝叶斯公式可得 $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.6 \times \frac{1}{4}}{0.6 \times \frac{1}{4} + 0.4 \times \frac{1}{3}} = \frac{9}{17}$.

因此, 张宇迟到了, 他乘的是汽车的概率为 $\frac{9}{17}$.

3. (2023·湖南) 某一地区患有某疾病的人占 0.005, 患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95, 正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04. 现抽查了一个人, 试验反应是阳性, 问此人是患者的概率有多大? (保留小数点后四位)

【答案】 0.1066

【解析】设“抽查的人是患者”为事件 A , “试验反应是阳性”为事件 B ,

则“抽查的人不是患者”为事件 $\bar{A}$,

由题意可知 $P(A) = 0.005$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.995$,

$P(B|A) = 0.95$, $P(B|\bar{A}) = 0.04$,

则由贝叶斯公式可得 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$

$= \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.04} = 0.1066$, 即抽查一个人, 试验反应是阳性, 此人是患者的概率为 0.1066.

考法五 综合运用

【例 5-1】(2024·吉林) 中国传统文化中, 过春节吃饺子, 饺子是我国的传统美食, 不仅味道鲜美而且寓意美好. 现有甲、乙两个箱子装有大小、外观均相同的速冻饺子, 已知甲箱中有 3 盒肉馅的“饺子”, 2

盒三鲜馅的“饺子”和 5 盒青菜馅的“饺子”,乙箱中有 3 盒肉馅的“饺子”, 3 个三鲜馅的“饺子”和 4 个青菜馅的“饺子”.问:

(1)从甲箱中取出一盒“饺子”是肉馅的概率是多少?

(2)若依次从甲箱中取出两盒“饺子”, 求第一盒是肉馅的条件下, 第二盒是三鲜馅的概率;

(3)若先从甲箱中随机取出一盒“饺子”放入乙箱, 再从乙箱中随机取出一盒“饺子”, 从乙箱取出的“饺子”是肉馅的概率.

【答案】(1) $\frac{3}{10}$

(2) $\frac{2}{9}$

(3) $\frac{3}{10}$

【解析】(1) 设事件 $A =$ “取出饺子是肉馅”, $P(A) = \frac{3}{10}$,

(2) 设事件 $B =$ “甲箱中取出的第一盒饺子是肉馅”,

事件 $C =$ “取出第二个盒饺子是三鲜馅”,

$$P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$$

(3) 设事件 $D =$ “从乙箱取出的“饺子”是肉馅”.

设事件 A_1, A_2, A_3 分别是甲箱中取出肉馅的“饺子”, 三鲜馅的“饺子”和青菜馅的“饺子”,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_1)P(D|A_1) + P(A_2)P(D|A_2) + P(A_3)P(D|A_3) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{4}{11} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{11} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{11} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

【例 5-2】(2023·河北保定) 某地举办了一次地区性的中国象棋比赛, 小明作为选手参加.除小明外的其他参赛选手中, 一、二、三类棋手的人数之比为 5: 7: 8, 小明与一、二、三类棋手比赛获胜的概率分别是 0.6、0.5、0.4.

(1)从参赛选手中随机抽取一位棋手与小明比赛, 求小明获胜的概率;

(2)如果小明获胜, 求与小明比赛的棋手分别为一、二、三类棋手的概率.

【答案】(1)0.485

(2) $\frac{30}{97}$ 、 $\frac{35}{97}$ 、 $\frac{32}{97}$.

【解析】(1) 记事件 B : “小明获胜”,

记事件 A_i : “小明与第 $i(i=1,2,3)$ 类棋手相遇”,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问: <https://d.book118.com/196224233145010231>