

湖南省湘南 2023-2024 学年高考压轴卷数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $\frac{2a+2i}{1+i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 是纯虚数, 则复数 $2a+2i$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. $(3x^3+x^4)(2-\frac{1}{x})^8$ 展开式中 x^2 的系数为 ()

- A. -1280 B. 4864 C. -4864 D. 1280

3. 设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_6-2S_3=2$, 则 $\frac{3a_8^2}{a_2}$ 的最小值为

- A. 8 B. 16 C. 24 D. 36

4. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点. 若

$|QF_2|, |PF_2|, |PF_1|, |QF_1|$ 依次构成等差数列, 且 $|PQ| = |PF_1|$, 则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{105}}{15}$

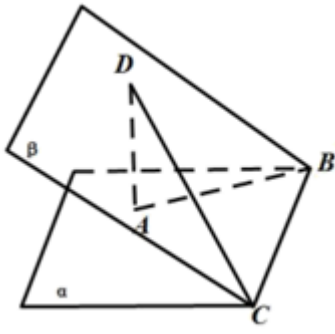
5. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$, 则下列判断错误的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$
- C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称

6. 已知抛物线 $C: x^2 = 8y$, 点 P 为 C 上一点, 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q , 又知点 $A(5, 2)$, 则 $|PQ| + |PA|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{13}{2}$ B. $4\sqrt{10} - 2$ C. 3 D. 5

7. 如图, 平面 α 与平面 β 相交于 BC , $AB \subset \alpha$, $CD \subset \beta$, 点 $A \notin BC$, 点 $D \notin BC$, 则下列叙述错误的是 ()



- A. 直线 AD 与 BC 异面
 B. 过 AD 只有唯一平面与 BC 平行
 C. 过点 D 只能作唯一平面与 BC 垂直
 D. 过 AD 一定能作一平面与 BC 垂直

8. 设函数 $f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + m$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$, 则 $m =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{7}{2}$

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$ B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$
 C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

10. 已知集合 $A = \{x | 1 < x \leq 24\}$, $B = \left\{x | y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}\right\}$, 则 $\partial_A B =$ ()

- A. $\{x | x \geq 5\}$ B. $\{x | 5 < x \leq 24\}$
 C. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$ D. $\{x | 5 \leq x \leq 24\}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 的中点, E 为 AB 上靠近点 B 的三等分点, 且 BD, CE 相交于点 P , 则 $\vec{AP} =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ B. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$
 C. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ D. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

12. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，函数 $y = \ln(1-x)$ 的定义域为 M ，集合 $N = \{x|x^2 - x < 0\}$ ，则下列结论正确的是

- A. $M \cap N = N$
- B. $M \cap (\complement_U N) = \emptyset$
- C. $M \cup N = U$
- D. $M \subseteq (\complement_U N)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(0,5)$ ，点 B 是直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上位于第一象限内的一点. 已知以 AB 为直径的圆被直线 l 所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ ，则点 B 的坐标_____.

14. $(1-2x)(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

15. 在矩形 $ABCD$ 中， $BC=4$ ， M 为 BC 的中点，将 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 分别沿 AM ， DM 翻折，使点 B 与 C 重合于点 P .若 $\angle APD=150^\circ$ ，则三棱锥 $M-PAD$ 的外接球的表面积为_____.

16. “北斗三号”卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆.设地球半径为 R ,若其近地点、远地点离地面的距离大约分别是 $\frac{2}{3}R,4R$,则“北斗三号”卫星运行轨道的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 为了打好脱贫攻坚战，某贫困县农科院针对玉米种植情况进行调研，力争有效地改良玉米品种，为农民提供技术支援，现对已选出的一组玉米的茎高进行统计，获得茎叶图如图（单位：厘米），设茎高大于或等于 180 厘米的玉米为高茎玉米，否则为矮茎玉米.



- (1) 求出易倒伏玉米茎高的中位数 m ；
- (2) 根据茎叶图的数据，完成下面的列联表：

	抗倒伏	易倒伏
矮茎		

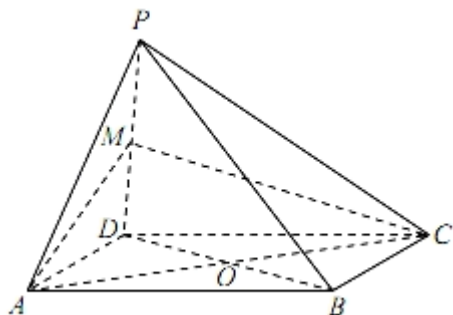
高茎		
----	--	--

(3) 根据(2)中的列联表, 是否可以在犯错误的概率不超过 1% 的前提下, 认为抗倒伏与玉米矮茎有关?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq K)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

18. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC, BD 交于点 O, M 为棱 PD 的中点, $MA = MC$. 求证:

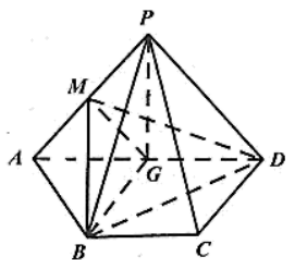


- (1) $PB \parallel$ 平面 AMC ;
- (2) 平面 $PBD \perp$ 平面 AMC .

19. (12 分) 已知 $f(x) = 2|x+1|$, $g(x) = |x-3|$.

- (1) 解 $f(x) \geq g(x)$;
- (2) 若 $|2a-b| \leq 1$, 证明: $f(a) + g(b) \geq 4$.

20. (12 分) 如图, 已知四边形 $ABCD$ 的直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$, $AD = 4$, $DC = BC = 2$, G 为线段 AD 的中点, $PG \perp$ 平面 $ABCD$, $PG = 2$, M 为线段 AP 上一点 (M 不与端点重合).



- (1) 若 $AM = MP$,
- (i) 求证: $PC \parallel$ 平面 BMG ;

(ii) 求平面 PAD 与平面 BMD 所成的锐二面角的余弦值;

(2) 是否存在实数 λ 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 使得直线 PB 与平面 BMG 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 若存在, 确定的 λ 值,

若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为整数, 它们的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $b_1 = 2a_1 = 2$, $b_2 S_3 = 54$, $a_2 + T_2 = 11$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $M_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$;

(3) 是否存在正整数 m , 使得 $\frac{S_m + T_{m+1}}{S_m + T_m}$ 恰好是数列 $\{a_n\}$ 或 $\{b_n\}$ 中的项? 若存在, 求出所有满足条件的 m 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = m$, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{12}{3 + \sin^2 \theta}$.

(1) 求曲线 C_1 的直角坐标方程和曲线 C_2 的参数方程;

(2) 设曲线 C_1 与曲线 C_2 在第二象限的交点为 A , 曲线 C_1 与 x 轴的交点为 H , 点 $M(1, 0)$, 求 $\triangle AMH$ 的周长 l 的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

化简复数 $\frac{2a+2i}{1+i}$, 由它是纯虚数, 求得 a , 从而确定 $2a+2i$ 对应的点的坐标.

【详解】

$$\frac{2a+2i}{1+i} = \frac{2(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = a+1+(1-a)i \text{ 是纯虚数, 则 } \begin{cases} a+1=0 \\ 1-a \neq 0 \end{cases}, a=-1,$$

$2a + 2i = -2 + 2i$ ，对应点为 $(-2, 2)$ ，在第二象限。

故选：B.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查复数的概念与几何意义. 本题属于基础题.

2、A

【解析】

根据二项式展开式的公式得到具体为： $(3x^3) \left[C_8^1 2^7 \left(-\frac{1}{x} \right) \right] + x^4 \cdot \left[C_8^2 2^6 \left(-\frac{1}{x} \right)^2 \right]$ 化简求值即可.

【详解】

根据二项式的展开式得到可以第一个括号里出 $3x^3$ 项，第二个括号里出 $\frac{1}{x}$ 项，或者第一个括号里出 x^4 ，第二个括号里

出 $\frac{1}{x^2}$ ，具体为： $(3x^3) \left[C_8^1 2^7 \left(-\frac{1}{x} \right) \right] + x^4 \cdot \left[C_8^2 2^6 \left(-\frac{1}{x} \right)^2 \right]$

化简得到 $-1280 x^2$

故得到答案为：A.

【点睛】

求二项展开式有关问题的常见类型及解题策略：

(1) 求展开式中的特定项. 可依据条件写出第 $r+1$ 项，再由特定项的特点求出 r 值即可.

(2) 已知展开式的某项，求特定项的系数. 可由某项得出参数项，再由通项写出第 $r+1$ 项，由特定项得出 r 值，最后求出其参数.

3、B

【解析】

方法一：由题意得 $S_6 - 2S_3 = (S_6 - S_3) - S_3 = 2$ ，根据等差数列的性质，得 $S_9 - S_6, S_6 - S_3, S_3$ 成等差数列，设

$S_3 = x (x > 0)$ ，则 $S_6 - S_3 = x + 2$ ， $S_9 - S_6 = x + 4$ ，则

$$\frac{3a_8^2}{a_2} = \frac{(3a_8)^2}{3a_2} = \frac{(a_7 + a_8 + a_9)^2}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{(S_9 - S_6)^2}{S_3} = \frac{(x+4)^2}{x} = x + \frac{16}{x} + 8 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 8 = 16, \text{ 当且仅当 } x = 4 \text{ 时等号成立, 从而 } \frac{3a_8^2}{a_2}$$

的最小值为 16，故选 B.

方法二：设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由等差数列的前 n 项和公式及 $S_6 - 2S_3 = 2$ ，化简可得

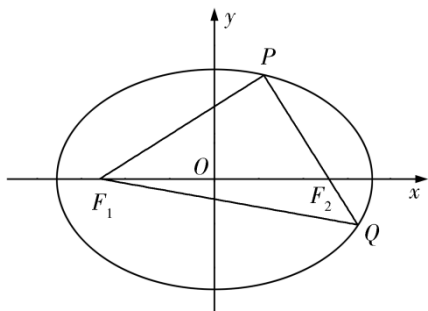
$$6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d - 2(3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d) = 2, \text{ 即 } d = \frac{2}{9}, \text{ 则 } \frac{3a_8^2}{a_2} = \frac{3(a_2 + 6d)^2}{a_2} = \frac{3(a_2 + \frac{4}{3})^2}{a_2} = 3a_2 + \frac{16}{3a_2} + 8 \geq 2\sqrt{3a_2 \cdot \frac{16}{3a_2}} + 8 = 16, \text{ 当且}$$

仅当 $3a_2 = \frac{16}{3a_2}$ ，即 $a_2 = \frac{4}{3}$ 时等号成立，从而 $\frac{3a_8^2}{a_2}$ 的最小值为 16，故选 B.

4、D

【解析】

如图所示，设 $|QF_2|, |PF_2|, |PF_1|, |QF_1|$ 依次构成等差数列 $\{a_n\}$ ，其公差为 d 。



根据椭圆定义得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a$ ，又 $a_1 + a_2 = a_3$ ，则
$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 4a \\ a_1 + (a_1 + d) = a_1 + 2d \end{cases}$$
，解得 $d = \frac{2}{5}a$ ，

$a_1 = \frac{2}{5}a, a_2 = \frac{4}{5}a, a_3 = \frac{6}{5}a, a_4 = \frac{8}{5}a$ 。所以 $|QF_1| = \frac{8}{5}a$ ， $|PF_1| = \frac{6}{5}a$ ， $|PF_2| = \frac{4}{5}a$ ， $|PQ| = \frac{6}{5}a$ 。

在 $\triangle PF_1F_2$ 和 $\triangle PF_1Q$ 中，由余弦定理得
$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{(\frac{4}{5}a)^2 + (\frac{6}{5}a)^2 - (2c)^2}{2 \cdot \frac{4}{5}a \cdot \frac{6}{5}a} = \frac{(\frac{6}{5}a)^2 + (\frac{6}{5}a)^2 - (\frac{8}{5}a)^2}{2 \cdot \frac{6}{5}a \cdot \frac{6}{5}a}$$
，整理解得

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{105}}{15}$ 。故选 D。

5、D

【解析】

先将函数 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$ 化为 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ，再由三角函数的性质，逐项判断，即可得出结果。

【详解】

Q $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$

可得 $f(x) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x\right) + 1 = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

对于 A， $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故 A 正确；

对于 B，由 $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ ，可得 $-1 \leq f(x) \leq 3$ ，故 B 正确；

对于 C，Q 正弦函数对称轴可得： $2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

解得: $x_0 = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z})$,

当 $k=0$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, 故 C 正确;

对于 D, Q 正弦函数对称中心的横坐标为: $2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

解得: $x_0 = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}, (k \in \mathbb{Z})$

若图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 则 $\frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4}$

解得: $k = -\frac{2}{3}$, 故 D 错误;

故选: D.

【点睛】

本题考查三角恒等变换, 三角函数的性质, 熟记三角函数基本公式和基本性质, 考查了分析能力和计算能力, 属于基础题.

6、C

【解析】

由 $|PQ| = |PF| - 2$, 再运用 P, F, A 三点共线时和最小, 即可求解.

【详解】

$$|PQ| + |PA| = |PF| - 2 + |PA| \geq |FA| - 2 = 5 - 2 = 3.$$

故选: C

【点睛】

本题考查抛物线的定义, 合理转化是本题的关键, 注意抛物线的性质的灵活运用, 属于中档题.

7、D

【解析】

根据异面直线的判定定理、定义和性质, 结合线面垂直的关系, 对选项中的命题判断.

【详解】

A. 假设直线 AD 与 BC 共面, 则 A, D, B, C 共面, 则 AB, CD 共面, 与 $AB \subset \alpha, CD \subset \beta$ 矛盾, 故正确.

B. 根据异面直线的性质知, 过 AD 只有唯一平面与 BC 平行, 故正确.

C. 根据过一点有且只有一个平面与已知直线垂直知, 故正确.

D. 根据异面直线的性质知, 过 AD 不一定能作一平面与 BC 垂直, 故错误.

故选: D

【点睛】

本题主要考查异面直线的定义，性质以及线面关系，还考查了理解辨析的能力，属于中档题.

8、A

【解析】

由降幂公式，两角和的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数形式，然后由正弦函数性质求得参数值.

【详解】

$$f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + m = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + m = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + m + 1,$$

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}], \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1], \therefore f(x) \in [m, m+3],$$

$$\text{由题意 } [m, m+3] = [\frac{1}{2}, \frac{7}{2}], \therefore m = \frac{1}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查二倍角公式，考查两角和的正弦公式，考查正弦函数性质，掌握正弦函数性质是解题关键.

9、B

【解析】

根据已知得到函数 $f(x)$ 两个对称轴的距离也即是半周期，由此求得 ω 的值，结合其对称轴，求得 θ 的值，进而求得 $f(x)$ 解析式. 根据图像变换的知识求得 $g(x)$ 的解析式，再利用三角函数求单调区间的方法，求得 $g(x)$ 的单调递减区间.

【详解】

解：已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ ，其中 $\omega > 0$ ， $0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，其图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，

对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 ，有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ ， $\therefore \omega = 2$.

再根据其图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$.

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$ 的图像.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/197006123032006101>